УДК 519.17

ШАРЫ, ОТРЕЗКИ, ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И СТРУКТУРЫ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ

Козин И.В.[1], *Нарзуллаев У.Х.*[2]
[1] Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина;
[2] Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, Самарканд, Узбекистан
ainc00@gmail.com; ulug1956_56@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены расширение таких понятий, как шар, отрезок, выпуклое множество на произвольное метрическое пространство. В частности, наряду с эвклидовой метрикой рассмотрены манхэттенская метрика, супремальная метрика в многомерном векторном пространстве. Рассмотрены также метрика Хемминга в бинарном пространстве, и ряд метрик в пространстве перестановок. Формально описаны отрезки в бинарном пространстве с метрикой Хемминга и в пространстве перестановок с метрикой Кэндалла. Показано, что отрезок в метрике Хемминга совпадает с понятием схемы (шимы), которое используется в теории генетических алгоритмов в модели Холланда. Доказано, что отрезок между двумя перестановками в пространстве перестановок с метрикой Кэндалла состоит из всех перестановок, сохраняющих относительные порядки, индуцированные этими перестановками. Введено понятие структур с наследственностью, описаны примеры и свойства этих структур. Показано, что множества отрезков в метрическом пространстве образуют структуру с наследственностью.*

Ключевые слова: *метрическое пространство, шар, отрезок, выпуклое множество, метрика Хемминга, метрика Кэндалла, структуры с наследственностью.*

I. ВВЕДЕНИЕ

После аннотации, но перед первым разделом, располагается введение, включающее в себя описание предметной области, обоснование актуальности задачи, обзор известных результатов.

Наличие метрики позволяет определить ряд геометрических объектов, хорошо знакомым нам в конечномерном линейном пространстве с эвклидовой метрикой. Однако, если метрика не является эвклидовой, то соответствующие объекты приобретают другой вид. В настоящей работе рассмотрены такие объекты, как шар, отрезок, выпуклое множество и показано, как они выглядят в различных метрических пространствах.

Особо отметим понятие выпуклости [1], которое играет важную роль во многих разделах математики: в геометрии и математическом и функциональном анализе, в топологии и алгебре. Для экстремальных задача в эвклидовом пространстве выпуклость функций гарантирует единственность точки ее максимума/минимума. Предпринималось множество попыток аксиоматизировать понятие выпуклости. Значительный вклад в этом направлении сделан в работе [2]. Интересное приложение понятие выпуклости в теории эволюционных алгоритмов развито в работах [3-4]

В настоящей работе выпуклость рассматривается на основе двух подходов. Во-первых, с точки зрения классического определения выпуклого множества в эвклидовом пространстве. А именно: выпуклым множеством эвклидова пространства X называется множество, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит все точки отрезка, соединяющего эти точки. Таким образом, основой понятия выпуклости является понятие отрезка. Показано, как понятие отрезка может быть обобщено на произвольное метрическое пространство. Соответственно будет обобщено и понятие выпуклого множества.

Другой подход основан на аксиомах наследственности. Показано, что множество отрезков метрического пространства образуют структуру с наследственностью, исследуются свойства этой структуры.

II. ШАРЫ И ОТРЕЗКИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Напомним, что метрическим пространством называется пара (X, ρ), где X - множество, $\rho : X \times X \to R^1$ - функция, со следующими свойствами:

1) $\forall x, y \in X, \quad \rho(x, y) \ge 0;$
$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\forall x, y \in X, \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\forall x, y, z \in X,$
$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (1)

Шаром радиуса r с центром в точке x_0 называется множество $D_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \le r\}$ всех точек метрического пространства X, которые удалены от точки x_0 на расстояние не большее r.

Метрическим отрезком (в дальнейшем отрезком), соединяющим две точки x и y метрического пространства X, будем называть множество

$[x, y] = \{z \in X \mid \rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)\}$

Приведем примеры конечномерных метрических пространств, шаров и отрезков в этих пространствах.

2.1 Векторное пространство с канонической (эвклидовой) метрикой

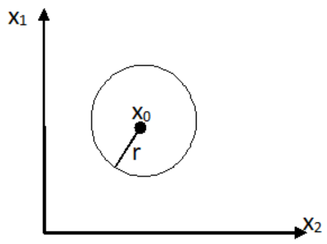

Рис.1а Шар радиуса r с центром в точке x_0 в R^n

В векторном пространстве $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ каноническая (эвклидова) метрика $\rho(x, y)$ задается следующим равенством:

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$$

$$\rho_{эвкл}(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^n}$$

В этой метрике шар в 2-мерном векторном пространстве выглядит так как показано на рис.1а, отрезок между точками выглядит как обычный отрезок прямой (рис.1б).

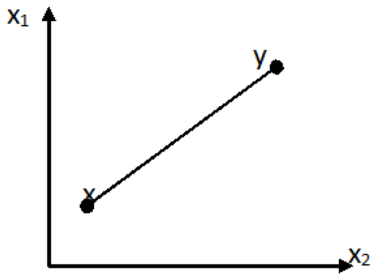

Рис.1б Отрезок между двумя точками в R^n

2.2 Векторное пространство *с манхеттенской* метрикой

Приведем другой пример метрики в векторном пространстве R^n. Манхеттенская метрика(метрика городских кварталов)[5] определяет расстояние между точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ формулой

$$\rho_{manh}(x, y) = | y_1 - x_1 | + | y_2 - x_2 | + \ldots + | y_n - x_n |$$

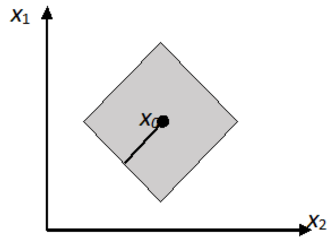

Рис.2а Шар радиуса r в R^n в манхеттенской метрике

Пример шара с центром в точке x_0 в 2-мерном векторном пространстве с манхеттенской метрикой приведен на рис 2а. Пример отрезка [*x*,*y*] в этой метрике в 2-мерном векторном пространстве изображен на рис.2б.

Заметим, что в манхеттенской метрике выпуклыми множествами являются прямоугольные параллелепипеды различных размерностей и только они. В частности, шары не являются выпуклыми множествами.

2.3 Векторное пространство *с супремальной* метрикой

Рассмотрим еще один пример метрики в векторном пространстве R^n. Супремальная метрика[6] определяет расстояние между точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ формулой

$$\rho_{\sup r}(x, y) = \max_{i=1,2,\ldots,n} | y_i - x_i |$$

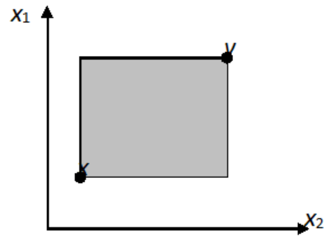

Рис.2б Отрезок между двумя точками в R^n в манхеттенской метрике

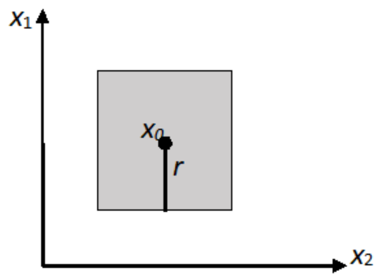

Рис. 32а Шар радиуса r в R^n в супремальной метрике

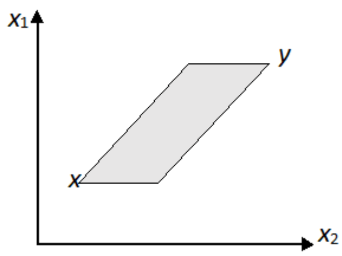

Рис.3б Отрезок между двумя точками в R^n в супремальной метрике

Пример шара радиуса r с центром в точке x_0 и отрезка [*x*,*y*] в этой метрике изображены на рис.3а, 3б.

2.4 Бинарное *n*-мерное пространство и метрика Хэмминга

Рассмотрим теперь бинарное *n*-мерное пространство $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, где

$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,2,...,n$. Стандартная метрика в этом пространстве – метрика Хэмминга [7]. Расстояние $\rho_{Hem}(x,y)$ между точками $x, y \in B^n$ определяется, как количество позиций, в которых различаются координаты этих точек. Например, расстояние Хэмминга между точками (1,0,1,1,0,1) и (0,1,1,0,1,0) в шестимерном бинарном пространстве равно 5.

Определение. Схемой называется конечная последовательность, каждый элемент которой принадлежит множеству $\{0,1,*\}$, где символ «*» может быть одним из двух чисел: 0 или 1. Например, схема *sh*=(0,*,1,*,0,*) . Таким образом, схема определяет множество *B*(*sh*) точек бинарного пространства. Мощность этого множества равна 2^k, где *k*-число символов «*» в схеме. Понятие схемы(шимы) используется в теории генетических алгоритмов в модели Холланда [8]

Теорема. Отрезок между двумя точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (x_1, x_2, ..., x_n)$ совпадает с множеством *B*(*sh*), где схема $sh = (s_1, s_2, ..., s_n)$ строится по следующему правилу:

$$s_i = \begin{cases} 0 \;\; если \;\; x_i = y_i = 0; \\ 1 \;\; если \;\; x_i = y_i = 0; \quad i = 1,2,...,n \\ * \;\; если \;\; x_i \neq y_i. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть точка $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in B(sh)$. Если $x_i = y_i$, то $z_i = x_i = y_i$. Если же $x_i \neq y_i$, то либо $z_i = x_i$, либо $z_i = y_i$. Тогда, в соответствии с определением расстояния Хемминга, $\rho_{Hem}(x,y) = \rho_{Hem}(x,z) + \rho_{Hem}(z,y)$. То есть точка *z* принадлежит отрезку [*x*,*y*]. Наоборот, для любой точки $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in [x, y]$ имеют место неравенства $\min(x_i, y_i) \le z_i \le \max(x_i, y_i)$, $i = 1,2,...,n$. Это в свою очередь означает, что $z \in B(sh)$.

Отметим еще один факт: в бинарном пространстве B^n выпуклыми множествами являются отрезки и только они.

2.5 Пространство перестановок *n* элементов

Следующий интересный пример метрического пространства - это пространство перестановок *n* элементов S_n. Каждый элемент этого пространства описывается перестановкой $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, где все координаты попарно различные числа из множества $\{1,2,\ldots,n\}$.

Расстояние между точками пространства S_n может быть определено различными способами. Приведем некоторые из них [5].

1) расстояние Хэмминга - расстояние между перестановками определяется как количество позиций перестановок, в которых элементы перестановок различаются;

2) метрика Кэли – минимальное количество транспозиций элементов, которые необходимо выполнить, чтобы перевести одну перестановку в другую;

3) метрика Кэндалла – минимальное количество транспозиций соседних элементов, которые необходимо выполнить, чтобы перевести одну перестановку в другую.

Пусть $s = s_1 s_2 ... s_n \in S_n$. Запись $i <_s j$ будет означать, что в перестановке *s* элемент *i* предшествует элементу *j*.

Определим порядковую матрицу (a_{ij}^s) перестановки s следующим образом:

$$a_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{если } i <_s j \\ -1 & \text{если } j <_s i \\ 0 & \text{если } i = j \end{cases}.$$

Теорема. Пусть заданы две перестановки $u = u_1 u_2 ... u_n$ и $v = v_1 v_2 ... v_n$. Расстояние Кэндалла между перестановками u и v определяется формулой

$$\rho_{Kend}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij}^v - a_{ij}^u |. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $u \neq v$. Тогда в перестановке v найдутся два соседних элемента i,j такие, что

$$i <_u j \text{ и } j <_v j. \qquad (3)$$

Действительно, пусть таких элементов в перестановке v нет. Выберем в перестановке v наиболее близкие элементы i,j обладающие указанным свойством. Выберем элемент k между элементами j и i в перестановке v. Тогда имеем $i <_u j$, $j <_v k <_v i$. Но это означает, что в перестановке u либо $k <_u i$, либо $j <_u k$. В любом случае i,j не являются ближайшими, обладающими свойством (3), в перестановке v. Следовательно, обязательно найдутся соседние элементы i,j в перестановке v, обладающие свойством (3). Последовательно меняя местами в перестановке v соседние элементы, обладающие свойством (3) можно перейти к перестановке u за минимальное число шагов, равное $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij}^v - a_{ij}^u |$. Это и будет расстояние Кэндалла между перестановками.

Опишем теперь отрезок между двумя перестановками в метрике Кэндалла.

Теорема. В метрике Кэндалла отрезком, соединяющим перестановки, является множество всех перестановок, сохраняющих относительный порядок между элементами в u, и v, а именно: $[u,v] = \{w \in S_n : i <_u j \text{ и } i <_v j \Rightarrow i <_w j\}$

Доказательство. Обозначим $W = \{w \in S_n : i <_u j \text{ и } i <_v j \Rightarrow i <_w j\}$. Тогда, в соответствии с (2), для всякой перестановки $w \in W$ имеет место равенство $\rho(u,v) = \rho(u,w) + \rho(w,v)$ и потому $W \subseteq [a,b]$. Пусть перестановка w принадлежит отрезку $[u,v]$, соединяющему перестановки $u = u_1 u_2 ... u_n$ и $v = v_1 v_2 ... v_n$. Тогда если $i <_u j$ и $i <_v j$, то этот же порядок элементов i,j присутствует и в перестановке w. В противном случае удалось бы уменьшить число транспозиций соседних элементов, позволяющих перейти от u к v. Следовательно, $[a,b] \subseteq W$ и теорема доказана.

Можно показать, что любое выпуклое множество в метрике Кэндалла является отрезком. Отметим еще одно свойство: шар в этой метрике, т.е. множество элементов вида $D_r(u_0) = \{u \in S_n \mid \rho_{Kend}(u_0,u) \leq r\}$, вообще говоря, не является выпуклым множеством [9]

III. СТРУКТУРЫ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ

Так как понятие отрезка между двумя точками можно определить в любом метрическом пространстве, то можно перенести классическое определение выпуклости в любое метрическое пространство. Однако понятие выпуклости можно ввести и независимо от понятия отрезка. Для этого рассмотрим структуры с наследственностью.

Определение. Структурой с наследственностью будем называть пару (X,Θ), где X – множество, а Θ - функция, которая каждой паре точек $x,y\in X$, ставит в соответствие подмножество $\Theta_{xy}\subseteq X$, причем:

1) $\forall x,y\in X,\ x\in\Theta_{xy}, y\in\Theta_{xy}$

2) $\forall x,y\in X,\ \Theta_{xy}=\Theta_{yx}$ (4)

3) $\forall x,y\in X,\ \forall u\in\Theta_{xy},\ \Theta_{xy}\supseteq\Theta_{xu}\cup\Theta_{uy}$

Множество Θ_{xy} называется множеством потомков точек $x,y\in X$. Таким образом, структура с наследственностью определяется совокупностью множеств потомков $\{\Theta_{xy}\}_{x,y\in X}$ со свойствами (4).

Приведем теперь некоторые свойства структур с наследственностью.

Теорема. Пусть задана структура с наследственностью (X,Θ). Тогда для любого точки $x\in X$ и любой точки $y\in\Theta_{xx}$ справедливо равенство $\Theta_{xx}=\Theta_{xy}$.

Доказательство. Пусть $y\in\Theta_{xx}$. Тогда, в соответствии с определением (4), получаем, что и $\Theta_{xx}\supseteq\Theta_{xy}\cup\Theta_{yx}$. С другой стороны, в соответствии с тем же определением, $\Theta_{xy}\supseteq\Theta_{xx}\cup\Theta_{xy}$. Следовательно, $\Theta_{xx}=\Theta_{xy}$

В частности, $\forall y\in\Theta_{xx}$ выполняется равенство $\Theta_{yy}=\Theta_{xx}$.

Теорема. Пусть задана структура с наследственностью (X,Θ). Тогда для любого множества потомков Θ_{xy} и для любой точки $z\in\Theta_{xy}$ из условия $y\in\Theta_{xz}$ следует, что $\Theta_{xz}=\Theta_{xy}$.

Доказательство. Пусть $z\in\Theta_{xy}$. Тогда, в соответствии с определением (4), получаем, что и $\Theta_{xy}\supseteq\Theta_{xz}\cup\Theta_{zy}$ и, соответственно, $\Theta_{xz}\subseteq\Theta_{xy}$. Если точка $y\in\Theta_{xz}$, то $\Theta_{xy}\subseteq\Theta_{xz}$. Следовательно, $\Theta_{xz}=\Theta_{xy}$

Заметим, что наличие структуры с наследственностью на множестве X позволяет определить на этом множестве структуры выпуклости.

Выпуклым подмножеством называется подмножество в X, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит множество потомков этих точек. Пустое множество по определению считается выпуклым. Очевидно следующее утверждение: пересечение любого числа выпуклых подмножеств выпукло.

Определение. Пусть задана структура с наследственностью (X,Θ). Выпуклой оболочкой подмножества $Y\subseteq X$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств множества X, содержащих подмножество Y.

Другими словами – выпуклая оболочка подмножества $Y\subseteq X$ это наименьшее по включению выпуклое подмножество в X, содержащее Y.

Один из тривиальных примеров структуры с наследственностью - это разбиение множества. Пусть множество X разбито на k подмножеств $X_1,X_2,...,X_k$, причем

1) $\bigcup_{i=1}^{k}X_k=X$;

2) $\forall i, j,\ \ i \neq j\ \ X_i \cap X_j = \varnothing$;

3) $\forall i\ \ X_i \neq \varnothing$.

Каждый элемент $x \in X$ принадлежит ровно одному элементу разбиения, который будем обозначать X_x. Множество всевозможных объединений элементов разбиения образует структуру с наследственностью. Причем $\forall x, y \in X\ \ [x, y] = X_x \cup X_y$, где X_x - это элемент разбиения, который содержит элемент *x*.

IV. СТРУКТУРЫ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ И МЕТРИКА

В метрическом пространстве (X, ρ) естественным образом определяется структура с наследственностью. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Множество отрезков метрического пространства (X, ρ) образуют структуру с наследственностью.

Доказательство. Свойства 1) и 2) определения (4) для метрических отрезков с очевидностью вытекают из определения метрики. Докажем теперь свойство 3) структур с наследственностью. Пусть *x,y* – две произвольные точки пространства *X*. Возьмем произвольную точку $z \in [x, y]$. Покажем, что $[x, y] \supseteq [x, z] \cup [z, y]$. Пусть $u \in [x, z]$. В соответствии с определением отрезка $\rho(x, z) = \rho(x, u) + \rho(u, z)$. По определению расстояния

$\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, y)$. С другой стороны, имеем соотношения:

$$\begin{gathered}\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y) = \\ \rho(x, u) + \rho(u, z) + \rho(z, y) \geq . \\ \rho(x, u) + \rho(u, y)\end{gathered}$$

Таким образом $\rho(x, y) = \rho(x, u) + \rho(u, y)$ и, следовательно, $[x, z] \subseteq [x, y]$. Аналогично можно показать, что $[z, y] \subseteq [x, y]$ и потому $[x, z] \cup [z, y] \subseteq [x, y]$

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрено расширение геометрических понятий отрезка, шара, выпуклости на произвольное метрическое пространство. В частности, эти понятия переносятся и на дискретные пространства такие как бинарное пространство, пространство перестановок. Это позволит перенести ряд результатов, связанных с понятием выпуклого множества, выпуклой функции и окрестности, в область дискретной математики и дает почву для построения новых семейств алгоритмов поиска оптимальных и субоптимальных решений как дискретных, так и непрерывных оптимизационных задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 336 с

[2] *Солтан В.П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости /В.П.Солтан. –Кишенев: Штиинца, 1984, – 224 с.

[3] *Moraglio A.*, Poli R. Topological interpretation of crossover. / In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, –2004. – P 1377–1388.

[4] *Moraglio A., Poli R.* Topological Crossover for the Permutation Representation. / Intelligenza Artificiale, – 2011. volume 5, issue 1, –P. 49-70.

[5] *Елена Деза, Мишель Мари Деза*. Энциклопедический словарь расстояний = Dictionary of Distances. — M: Наука, 2008. — С. 276. - ISBN 978-5-02-036043-3

[6] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин,* Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М. Наука. 2004г. 572с.
[7] *Richard W. Hamming.* Error-detecting and error-correcting codes, Bell System Technical Journal 29(2):147-160, 1950.
[8] *Whitley D.* (1993) "A Genetic Algorithm Tutorial", Colorado State University, Dept. of CS, TR CS-93-103.
[9] *И. В. Козин, А. С. Бондаренко, С. И. Полюга.* Об оценке мощности шарового покрытия пространства перестановок // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 1. – С. 134-138

Поступила в редакцию 5.02.2022

Цитирование: *Козин И.В., Нарзуллаев У.Х.* Шары, отрезки, выпуклые множества в метрических пространствах и структуры с наследственностью // Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий. – 2022. – №1(1). –С. 7-15.

BALLS, SEGMENTS, CONVEX SETS IN METRIC SPACES AND STRUCTURES WITH HEREDITY

Kozin I.V.[1], *Narzullaev U.Kh.*[2]
[1] Zaporizhzhia National University, Zaporozhye, Ukraine;
[2] Samarkand Branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan
ainc00@gmail.com; ulug1956_56@mail.ru

Abstract. *The article considers the extension of such concepts as a ball, a segment, a convex set to an arbitrary metric space. In particular, along with the Euclidean metric, the Manhattan metric and the supremal metric in a multidimensional vector space are considered. The Hamming metric in binary space and a number of metrics in the space of permutations are also considered. Segments are formally described in the binary space with the Hamming metric and in the space of permutations with the Kendall metric. It is shown that the interval in the Hamming metric coincides with the concept of a skhema (shim), which is used in the theory of genetic algorithms in the Holland model. It is proved that the segment between two permutations in the space of permutations with the Kendall metric consists of all permutations that preserve the relative orders induced by these permutations. The concept of structures with heredity is introduced, examples and properties of these structures are described. It is shown that the sets of segments in a metric space form a structure with heredity.*

Keywords: *metric space, ball, segment, convex set, Hamming metric, Kendall metric, structures with heredity.*

METRIK FAZOLARDA SHARLAR, KESMALAR, QAVARIQ TO‘PLAMLAR VA IRSIYATLI TUZILMALAR

Kozin I.V.[1], *Narzullayev U.X.*[2]

[1] Zaporojye Milliy universiteti, Zaporojye, Ukraina;

[2] Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali, Samarqand, O‘zbekiston

ainc00@gmail.com; ulug1956_56@mail.ru

Abstract. *Maqolada shar, kesma, qavariq to‘plam kabi tushunchalarning ixtiyoriy metrik fazoga kengayishi ko‘rib chiqilgan. Xususan, Evklid metrikasi bilan bir qatorda manxetten metrikasi hamda ko‘p o‘lchovli vektor fazodagi supremal metrikasi ko‘rib chiqilgan. Shuningdek, binar fazodagi Xemming metrikasi va o‘rin almashtirishlar fazosidagi bir qator metrikalar o‘rganilgan. Xemming metrikali binar fazodagi va Kendall metrikali o‘rin almashtirishlar fazosidagi kesmalar formal ravishda tasvirlangan. Xemming metrikasidagi kesma Golland modelidagi genetik algoritmlar nazariyasida qo‘llaniladigan sxema (shim) tushunchasi bilan ustma ust tushushi ko‘rib chiqilgan. Kendall metrikali o‘rin almashtirishlar fazosida ikkita almashtirish orasidagi kesma ushbu almashtirishlar tomonidan induksiya qilingan nisbiy tartiblarni saqlaydigan barcha almashtirishlardan iborat ekanligi isbotlangan. Irsiyatli tuzilmalar tushunchasi kiritilgan, misollar keltirilgan va ushbu tuzilmalarning xossalari tavsiflangan. Metrik fazodagi kesmalar to‘plami irsiyatga ega bo‘lgan tuzilmani tashkil etishi ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar: *metrik fazo, shar, kesma, qavariq to‘plam, Xemming metrikasi, Kendall metrikasi.*