ISSN 1815-4840

CHEMICAL TECHNOLOGY.
CONTROL AND MANAGEMENT

2018, №1-2 (79-80) pp.164-168

International scientific and technical journal

journal homepage: ijctcm.com

Since 2005

УДК 62-506.15

U.F.MAMIROV

ALGORITHMS OF STABLE CONTROL OF A MATRIX OBJECT IN THE CONDITIONS OF PARAMETRIC UNCERTAINTY

Параметрик ноаниқлик шароитидаги матрицавий объектларни барқарор бошқарув алгоритмларини формаллаштириш саволлари кўрилган. Матрицаларга мавҳум мурожжат қилиш усулларидан фойдаланиб, кўрилаётган объектни бошқариш алгоритми келтирилган. Матрицаларга мавҳум мурожаатларни ҳисоблаш учун чегаралаш усули асосидаги рекуррент алгоритмлардан фойдаланилган. Келтирилган ушбу муносабатлар бошқарув алгоритмидаги матрицанинг рекуррент мавҳум мурожаатини амалга оширишни ва шу билан биргаликда ноаниқлик шароитидаги матрицавий объектларни адаптив бошқариш тизимларининг бошқарув таъсирларини амалга оширишга ёрдам беради.

Таянч сўзлар: *матрицавий бошқарув объекти, параметрик ноаниқлик, матрицаларга мавҳум мурожаат.*

Рассматриваются вопросы формирования алгоритмов стабильного управления матричным объектом в условиях параметрической неопределенности. Приводятся алгоритмы управления рассматриваемым объектом с использованием процедуры псевдообращения матриц. Для этого используются рекуррентные алгоритмы, основанные на методе окаймления. Приведенные соотношения позволяют осуществлять рекуррентное псевдообращение матриц в алгоритме управления и тем самым реализовать управляющие воздействия в адаптивной системе управления матричным объектом в условиях неопределенности.

Ключевые слова: *матричный объект управления, параметрическая неопределенность, псевдообращение матриц.*

The problems of forming algorithms for stable control of a matrix object under conditions of parametric uncertainty are considered. Algorithms for managing the object under consideration using the matrix pseudoinversion procedure are given. Recurrent algorithms based on the fringing method are used for pseudo-inversion of matrices. These relations allow us to implement recurrent pseudo-inversion of matrices in the control algorithm and, thereby, realize control actions in the adaptive control system of the matrix object under uncertainty conditions.

Key words: *matrix control object, parametric uncertainty, pseudo-inversion of matrices.*

Повышение требований к качеству функционирования современных технических и технологических систем приводят к необходимости разработки адаптивных методов управления, позволяющих осуществить оптимизацию процессов управления и обеспечить работоспособность системы управления при широких вариациях статических и динамических характеристик объекта. При реализации различных принципов адаптивного управления объектом встает вопрос о том, каким образом выбирать параметры регуляторов координатного и параметрического управления и устройств адаптации, изменяющих параметры регуляторов и наблюдателя [1-4]. При решении разнообразных задач описания объектов и синтеза адаптивных систем управления в условиях неопределенности получили распространение матричные разностные уравнения вида [5,6]

$$x_k = \Phi(x_{k-1}, k), \;\; x(0) = x_0, \;\; k = 1,2,..., \tag{1}$$

где $x_k - (m \times n)$-матрица состояний, k – текущее дискретное время, $\Phi(\cdot)$ – некоторое функциональное преобразование.

Целесообразность представления (1) помимо соображений компактности записи имеет и другое более серьезное основание. Применяя известные процедуры векторизации можно привести исходное описание к традиционной векторной форме и далее использовать известный аппарат теории адаптивных систем управления. Дело в том, что реализация представления (1) при помощи имеющихся в настоящее время «скалярных» процессоров в стандартных ЭВМ при достаточно большом числе элементов матрицы требует выполнения огромного числа операций умножения и в большинстве случаев исключает возможность реализации его в реальном масштабе времени. В то же время представление (1) допускает реализацию его при помощи разрабатываемых в настоящее время так называемых «матричных» процессоров, для которых операции над матрицами являются элементарными [5,6]. В таких случаях становится целесообразным использование матричного настраиваемого упредителя, параметры которого уточняются с помощью адаптивного матричного алгоритма идентификации и, соответственно, матричного алгоритма управления.

Рассмотрим задачу синтеза адаптивной системы управления матричным линейным объектом в дискретном времени

$$x_k = Ax_{k-1}B \tag{2}$$

с $(m\times m)$ - и $(n\times n)$-матрицами неизвестных параметров A и B соответственно. При этом в соответствие объекту ставится настраиваемая модель (упредитель)

$$\hat{x}_k = A_{k-1}x_{k-1}B_{k-1}, \tag{3}$$

параметры которой, входящие в матрицы A_{k-1} и B_{k-1}, уточняются в реальном времени с помощью адаптивного идентификатора [7,8]. Необходимо получить оценки A_k и B_k и найти управляющие воздействия u_k, обеспечивающие близость в некотором смысле последовательности x_k к желаемой траектории движения объекта y_k.

Объект управления (2) и настраиваемую модель (3) запишем в векторной форме

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1}(B\otimes A^T) = \bar{x}_{k-1}R,$$

$$\hat{\bar{x}}_k = \bar{x}_{k-1}(B_{k-1}\otimes A_{k-1}^T) = \bar{x}_{k-1}R_{k-1},$$

где $\bar{x}_k$ – результат строчной векторизации матрицы x_k, $\otimes$ – символ кронекерова произведения, T – знак транспонирования.

Тогда, следуя [6] алгоритм идентификации можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}A_k = A_{k-1} + (\operatorname{tr} v_k B_{k-1}^T x_{k-1}^T x_{k-1} B_{k-1} v_k^T)\times\\ \times(\operatorname{tr} v_k B_{k-1}^T x_{k-1}^T x_{k-1} B_{k-1} B_{k-1}^T x_{k-1}^T x_{k-1} B_{k-1} v_k^T)^{-1} v_k B_{k-1}^T x_{k-1}^T,\\ B_k = B_{k-1} + (\operatorname{tr} v_{A,k}^T A_k x_{k-1} x_{k-1}^T A_k^T v_{A,k})\times\\ \times(\operatorname{tr} A_k x_{k-1} x_{k-1}^T A_k^T v_{A,k} v_{A,k}^T A_k x_{k-1} x_{k-1}^T A_k^T)^{-1} x_{k-1}^T A_k^T v_{A,k}\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$v_k = x_k - A_{k-1}x_{k-1}B_{k-1},$$

$$v_{A,k} = x_k - A_k x_{k-1}B_{k-1},$$

$$v_{B,k} = x_k A_k x_{k-1}B_k .$$

Задачу синтеза регулятора рассмотрим на примере управляемого матричного объекта [5]

$$x_k = Ax_{k-1}B + Cu_{k-1}D,$$

в соответствие которому ставится настраиваемая модель

$$\hat{x}_k = A_{k-1}x_{k-1}B_{k-1} + C_{k-1}u_{k-1}D_{k-1},$$

где u_{k-1} – $(s\times r)$ – матрица управляющих воздействий, C, C_{k-1}, D, D_{k-1} – $(m\times s)$ -, $(r\times n)$- матрицы истинных параметров и оценок,

$$\tilde{A}_{k-1}=\left[\begin{array}{c:c} A_{k-1} & 0 \\ \hdashline 0 & C_{k-1}\end{array}\right],\quad \tilde{B}_{k-1}=\left[\begin{array}{c:c} B_{k-1} & 0 \\ \hdashline 0 & D_{k-1}\end{array}\right],$$

$$\tilde{x}_{k-1}=\left[\begin{array}{c:c} x_{k-1} & 0 \\ \hdashline 0 & u_{k-1}\end{array}\right].$$

Используя методику синтеза адаптивных систем [6-8] в качестве критерия управления примем функцию удельных потерь $J_t = tr(y_{k+1}-\hat{x}_{k+1})Q_1(y_{k+1}-x_{k+1})^T$ с учетом ограничений на область допустимых управлений, задаваемых в форме $tr\, u_k Q_2 u_k^T \le U^2$. Здесь: y_{k+1} – некоторая априори заданная матричная траектория желаемого движения объекта, Q_1 и Q_2 -положительно определенные весовые ($n\times n$)- и ($r\times r$)- матрицы.

Будем полагать, что ранг матрицы C_{k-1} размерности $m\times s$ с $m\ge s$ равен s, а ранг матрицы D_{k-1} размерности $r\times n$ с $r\le n$ равен r. Тогда, полагая, что ограничения на область допустимых управлений отсутствуют, то есть $Q_2=0$, и $Q_1=I_n$, можно получить следующее соотношение для управления [6]

$$u_k=(C_{k-1}^T C_{k-1})^{-1}C_{k-1}^T(y_{k+1}-A_{k-1}x_k B_{k-1})D_{k-1}^T(D_{k-1}D_{k-1}^T)^{-1},$$

или

$$u_k=C_{k-1}^{+}(y_{k+1}-A_{k-1}x_k B_{k-1})D_{k-1}^{+}. \tag{5}$$

Для формирования управления на основе (5) целесообразно использовать рекуррентные формулы для псевдообращения матриц C_{k-1} и D_{k-1}. На основе теории и методов псевдообращения матриц [9-14] приведем алгоритм псевдообращения для матрицы C_{k-1}, который может быть использован и при вычислении псевдообратной матрицы D_{k-1}^{+}.

Известно [10,13], что для каждой действительной ($m\times s$)-матрицы C существует единственная действительная псевдообратная матрица U, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$UCU=U,\ (CU)^T=CU,\ CUC=C,\ (UC)^T=UC. \tag{6}$$

На практике нередки случаи, когда дополнительная информация в виде ($s\times 1$)-матрицы $c_{k-1,m+1}$ присоединяется к имеющейся ($m\times s$)-матрице $C_{k-1,m}$ в качестве ее последней строки, так что вновь образовавшаяся матрица $C_{k-1,m+1}$ может быть представлена в форме

$$C_{k-1,m+1}=\left|\begin{array}{c} C_{k-1,m} \\ \hdashline c_{k-1,m+1}^T\end{array}\right|. \tag{7}$$

Известно [11,12], что псевдообратная матрица $U_{k-1,m+1}$ для матрицы $C_{k-1,m+1}$ в форме (7) может быть представлена в виде

$$U_{k-1,m+1}=\left\| V_{k-1,m}^T \vdots v_{k-1,m+1}\right\|, \tag{8}$$

где

$$V_{k-1,m}^T=U_{k-1,m}-v_{k-1,m+1}c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m}.$$

Из первого соотношения (6) используя разбиение $U_{k-1,m+1}$ в форме (8) можно записать

$$U_{k-1,m+1} = U_{k-1,m+1} C_{k-1,m+1} U_{k-1,m+1} = [V_{k-1,m}^T C_{k-1,m} + v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}] U_{k-1,m+1} . \quad (9)$$

Отсюда

$$I = V_{k-1,m}^T C_{k-1,m} + v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T .$$

На основе (9) находим $U_{k-1,m} C_{k-1,m} = V_{k-1,m}^T C_{k-1,m} + v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} C_{k-1,m}$, откуда можно прийти к выражению

$$V_{k-1,m}^T = U_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} , \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), находим

$$U_{k-1,m+1} = U_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} \vdots v_{k-1,m+1} , \quad (11)$$

для $m=1$ имеем $U_{k-1,1} = (c_{k-1,1}^T c_{k-1,1})^{-1} c_{k-1,1}$.

При использовании алгоритма (11) могут быть два случая. Возможен случай, когда строка: $c_{k-1,m+1}^T$ не увеличивает ранга матрицы $C_{k-1,m}$. Тогда можно $v_{k-1,m+1}$ определить из выражения [9,11]

$$v_{k-1,m+1}^T = (c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} U_{k-1,m}^T c_{k-1,m+1} + 1)^{-1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} U_{k-1,m}^T . \quad (12)$$

Вводя обозначение

$$S_{k-1,m} = U_{k-1,m} U_{k-1,m}^T = (C_{k-1,m}^T C_{k-1,m})^{-1} \quad (13)$$

и, подставляя (13) в (12) и транспонируя, находим

$$v_{k-1,m+1} = S_{k-1,m} c_{k-1,m+1} (c_{k-1,m+1}^T S_{k-1,m} c_{k-1,m+1} + 1)^{-1} .$$

В этом случае матрица $S_{k-1,m}$ определяется выражением

$$S_{k-1,m+1} = S_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T S_{k-1,m} ,$$

В случае, когда строка $c_{k-1,m+1}^T$ увеличивает ранг матрицы $C_{k-1,m}$, столбец $v_{k-1,m+1}$ можно определить на основе выражения [10,12]

$$v_{k-1,m+1} = (I - U_{k-1,m}^T C_{k-1,m}^T) c_{k-1,m+1} [c_{k-1,m+1}^T (I - U_{k-1,m}^T C_{k-1,m}^T) c_{k-1,m+1}]^{-1} .$$

Введя обозначение

$$T_{k-1,m} = I - U_{k-1,m}^T C_{k-1,m}^T$$

находим

$$v_{k-1,m+1} = T_{k-1,m} c_{k-1,m+1} (c_{k-1,m+1}^T T_{k-1,m} c_{k-1,m+1})^{-1} .$$

В этом случае матрицу $T_{k-1,m}$ можно определить следующим образом

$$T_{k-1,m+1} = T_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T T_{k-1,m} .$$

при $m=1$ имеем $T_{k-1,1} = I - U_{k-1,1} C_{k-1,1}$.

В выражениях (7)-(13) $U_{k-1,m+1}$ – псевдообратная матрица для матрицы, составленной из первых $m+1$ строк исходной; $c_{k-1,m+1}^T$ есть ($m+1$)-я строка исходной матрицы; $v_{k-1,m+1}$ есть ($m+1$)-й столбец псевдообратной матрицы; $T_{k-1,m+1}$, $S_{k-1,m+1}$ – симметрические матрицы связи вектор-столбца $v_{k-1,m+1}$ с вектор-строкой $c^T_{k-1,m+1}$; I – единичная матрица; T – знак транспонирования; $\vdots$ – знак отделения m столбцов матрицы $U_{k-1,m+1}$ от ($m+1$)-го столбца.

Рассмотренный алгоритм псевдообращения является прямым и использует преимущества, свойственные методу окаймления [9,11]. При использовании данного алгоритма имеется возможность контролировать правильность вычислений после каждого шага учитывая симметричность матриц $T_{k-1,m}$ и $S_{k-1,m}$, а также других соотношений и определять ранг исходной матрицы по числу ненулевых значений вектора $v_{k-1,m}$.

Приведенные соотношения позволяют осуществить рекуррентное псевдообращение матриц C_{k-1} и D_{k-1} в выражении (5), и тем самым реализовать управляющие воздействия в адаптивной системе управления матричным объектом в условиях неопределенности.

References:
1. Afanas'ev V.N. Upravlenie neopredelenny'mi dinamicheskimi ob`ektami. - M.: Fizmatlit, 2008. - 208 s.
2. Bobcov A.A., Py'rkin A.A. Adaptivnoe i robastnoe upravlenie s kompensaciey neopredelennostey. Uchebnoe posobie. - SPb.: NIU ITMO, 2013. - 135s.
3. Nikiforov V.O., Ushakov A.V. Upravlenie v usloviyah neopredelennosti: chuvstvitel'nost', adaptaciya, robastnost'. - SPb: SPb GITMO (TU), 2002. - 232 s.
4. Igamberdiev H.Z., YUsupbekov A.N., Zaripov O.O. Regulyarny'e metody' ocenivaniya i upravleniya dinamicheskimi ob`ektami v usloviyah neopredelennosti. - T.: TashGTU, 2012. - 320 s.
5. Kuncevich V.M. O reshenii zadachi dvumernoy diskretnoy fil'tracii (Sintez matrichny'h fil'trov) // AiT. 1987. №6, -S. 68-78.
6. Bodyanskiy E.V., Pliss I.P. O reshenii zadachi upravleniya matrichny'm ob`ektom v usloviyah neopredelennosti // AiT., 1990, №2, -S. 175-178.
7. Antonov V., Terehov V., Tyukin I. Adaptivnoe upravlenie v tehnicheskih sistemah. Uchebnoe posobie. Izd-vo: Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2001. - 244s.
8. Bunich A.L., Bahtadze N.N. Sintez i primenenie diskretny'h sistem upravleniya s identifikatorom / Otv. red. V.A. Lotockiy. M.: Nauka, 2003. - 232 s.
9. Gantmaher F.R. Teoriya matric. -M.: Nauka, 1988. - 552 s.
10. Golub Dj., Van Louch CH. Matrichny'e vy'chisleniya: Per. s angl. -M.: Mir, 1999. -548 s.
11. Horn R., Djonson CH. Matrichny'y analiz: Per. s angl. -M.: Mir., 1989. -655s.
12. Demmel' Dj. Vy'chislitel'naya lineynaya algebra. Teoriya i prilojeniya: Per. s angl. -M.: Mir, 2001 -430 s.
13. Jdanov A.I. Vvedenie v metody' resheniya nekorrektny'h zadach: -Izd. Samarskogo gos. ae`rokosmicheskogo un-ta, 2006. - 87 s.
14. Louson CH., Henson R. CHislennoe reshenie zadach metoda naimen'shih kvadratov / Per. s angl. -M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. -232 s.

Мамиров Уктам Фарходович – докторант кафедры «Системы обработки информации и управление», ТашГТУ
Тел.: (90) 900-56-25, E-mail.: uktammamirov@gmail.com.