ISSN 1815-4840
CHEMICAL TECHNOLOGY.
CONTROL AND MANAGEMENT
2018, №3 (81) pp.65-69
International scientific and technical journal
journal homepage: ijctcm.com
Since 2005

УДК 62-506.15

U.F.MAMIROV

REGULAR ALGORITHMS OF LOCAL-OPTIMAL STABILIZATION OF CONTROL OBJECTS WITH INCOMPLETE INFORMATION

Тўлиқ кузатилмайдиган ва ўлчанмайдиган ғалаёнлар шароитида динамик бошқариш объектини локал-оптимал барқарорлашнинг турғун алгоритмларини қуриш саволлари кўриб чиқилган. Сохта тескари матрица концепцияси асосида бошқариш объектини локал-оптимал барқарорлашни шакллантириш алгоритмлари келтирилган. Турғун сохта тескари матрица учун умумлашган фарқлар усули бўйича мунтазамлаш параметрини танлашдаги экстремал масалалар учун Тихоновнинг мунтазамлаш усулидан фойдаланилган. Қидирилаётган ечимни аниқлашда мунтазамлаш тизимларини алмаштириш усули орқали ечиладиган уч диагоналли чизиқли алгебраик тенгламалар тизимига келтириш усулларидан фойдаланилган.

Таянч сўзлар: *ахборот тўлиқ бўлмаган бошқариш объекти, локал-оптимал барқарорлаш, сохта мурожаат, мунтазам алгоритлар.*

Рассматриваются вопросы построения устойчивых алгоритмов локально-оптимальной стабилизации управляемых динамических объектов в условиях неполных наблюдений и неизмеряемых возмущений. Приводятся алгоритмы формирования локально-оптимальной стабилизации объектов управления на основе концепций псевдообращения матриц. Для устойчивого псевдообращения матриц используется метод регуляризации Тихонова для экстремальных задач с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки. При определении искомого решения используется процедура приведения регуляризованной системы к набору трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений, которые решаются методом прогонки.

Ключевые слова: *объекты управления с неполной информацией, локально-оптимальная стабилизация, псевдообращение, регулярные алгоритмы.*

The problems of constructing stable algorithms for locally optimal stabilization of controlled dynamic objects under conditions of incomplete observations and non-measurable perturbations are considered. Algorithms for the formation of locally optimal control objects on the basis of pseudo-inversion concepts of matrices are presented. For a stable pseudo-inversion of matrices, we use the Tikhonov regularization method for extremal problems with the choice of the regularization parameter by the generalized residual principle. In determining the desired solution, we use the procedure for reducing the regularized system to a set of three diagonal systems of linear algebraic equations that are solved by the sweep method.

Keywords: *control objects with incomplete information, locally-optimal stabilization, pseudoinversion, regular algorithms.*

Задачи стабилизации и управления различными классами динамических объектов при неполной информации является одной из важных и часто встречающихся задач, возникающих при разработке систем управления. В реальных условиях весьма типична ситуация, когда целый ряд факторов, таких, как нелинейность и многомерность управляемого объекта, ограничения на управление, неполнота информации о состояния объекта, наличие неконтролируемых возмущений и т.д., не позволяют получить точное решение этой задачи [1-5]. В связи с этим разработка субоптимальных методов и алгоритмов адаптивной стабилизации и управления представляется актуальной. Одним из таких методов является метод локальной оптимизации. Локально-оптимальные алгоритмы стабилизации динамических систем подробно исследовались в работах [6-12]. В частности, в этих работах были получены условия грубости системы, замыкаемой локально-оптимальным управлением, т.е. условия сохранения асимптотической устойчивости положения равновесия замкнутой системы и астатизма нулевого порядка при небольших изменениях структуры и параметров управляемого объекта.

В [10,11] предложен конструктивный локально-оптимальный алгоритм стабилизации управляемой системы в условиях неполной информации. Пусть непрерывный объект управления в дискретном времени описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \xi_k + \psi(x_k, u_k, \xi_k), \\ y_k &= Cx_k + \Gamma(x_k),\ k = 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_k \in R^n$ - вектор состояния, $u_k \in U \subseteq R^m$ - вектор управления, U - допустимое множество управлений, $y_k \in R^s$ - вектор наблюдений, $\xi_k \in \Xi \subseteq R^n$ - вектор ненаблюдаемых возмущений, *A*, *B*, *C* - матрицы соответствующих размерностей, $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\Gamma(\cdot)$ - вектор-функции.

Предполагается, что неизмеряемое постоянное во времени возмущение ξ допустимо для системы (1), если найдется такое допустимое управление $u^* = u^*(\xi) \in U$, что $Bu^* + \xi + \psi(0, u^*, \xi) = 0$ [7,10]. Здесь принимается допущение, что точное описание объекта, вообще говоря, неизвестно. Но может быть использована следующая приближенная модель

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \tilde{D}x_k + \tilde{F}u_k + \xi_k, \\ y_k &= \tilde{G}x_k,\ k = 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{2}$$

где приняты те же обозначения для переменных.

Условия аппроксимации примем в виде

$$\left\|\tilde{D} - D\right\| \le \eta, \quad \left\|\tilde{F} - F\right\| \le h, \quad \left\|\tilde{G} - G\right\| \le \gamma .$$

Предлагаемый в [10] алгоритм стабилизации имеет следующий вид:

$$u_k = -\tilde{F}^+ \tilde{S}_k , \tag{3}$$

где $\tilde{F}^+$ – псевдообратная матрица, $\tilde{S}_k = (I + \tilde{D})\tilde{x}_k - \tilde{D}\tilde{x}_{k-1} - \tilde{F}u_{k-1}$, I - единичная матрица, а последовательность $\tilde{x}_t$ порождается уравнением:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{D}\tilde{x}_k + K(y_k - \tilde{G}\tilde{x}_k) + M^{\oplus}\sum_{t=1}^{n} H_t\left[p_k(t) - p_k(t-1)\right] - L(y_{k-n} - \tilde{G}\tilde{x}_{k-n}) + \tilde{F}u_k . \tag{4}$$

В соотношении (4) приняты следующие обозначения:

$$p_k(t) = y_{k-n+t} - \tilde{G}\tilde{D}^t\tilde{x}_{k-n} - \tilde{G}\sum_{i=1}^{t-1}\tilde{D}^{t-i-1}\tilde{F}u_{k-n+i}\ ,\ t = 1,2,\ ...\ \ p_k(0) = y_{k-n} - \tilde{G}\,\tilde{x}_{k-n},$$

где H_t - матрица размера $(sn \times s)$ блочной структуры, у которой блок, образованный столбцами с номерами 1,..., s и строками с номерами $(t-1)s+1,...,ts$, является единичной $(s \times s)$ матрицей, а остальные элементы H_t равны нулю, $M = (\tilde{G}\ \tilde{G}\tilde{D}\ \tilde{G}\tilde{D}^2\ ...\ \tilde{G}\tilde{D}^{n-1})^T$ – матрица наблюдаемости размера $(sn \times s)$, $M^{\oplus}$ - левый обратный к *M*, т.е. $MM^{\oplus}$ - тождественный оператор.

Система (4) в отличии от известных наблюдателей позволяет оценивать не только состояние x_k, но и учитывать ненаблюдаемые возмущения ξ_k по типу «оценки» вида

$$\hat{\xi} = x_k - \tilde{D}x_{k-1} - \tilde{F}u_{k-1} .$$

В [7,10] показано, что приведенный алгоритм обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы при неточной модели и неполных наблюдениях вектора состояния, и является асимптотически грубым.

Вместе с тем здесь при реализации алгоритма стабилизации вида (3) используется псевдообратная матрица $\tilde{F}^{+}$. Известно [13-15], что задача вычисления псевдообратной матрицы в общем случае неустойчива по отношению к погрешностям в задании матрицы. На практике к рассмотрению таких возмущений может побуждать ограниченная точность, с которой наблюдаемое явление описывается количественной информацией. Влияние погрешностей округлений, производимых в ходе численной процедуры, тоже можно проанализировать так, как если бы оно имело причиной возмущения входных данных.

Известно [13], что задача о вычислении F^{+} эквивалентна решению экстремальной задачи: найти такую $Z \in U^{*}$, что

$$\|FZ - I\|_{m\times m} = \inf\{\|FZ - I\|_{m\times m} : Z \in U^{*}\}. \tag{5}$$

Решение Z задачи (5) единственно и совпадает с F^{+}. Это позволяет построить алгоритм отыскания устойчивого приближения к F^{+} по заданной $\tilde{F}$, используя метод регуляризации Тихонова для экстремальных задач [16,17] с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

Введем в рассмотрение сглаживающий функционал Тихонова

$$M_h^{\alpha}[Z] = J_h^2(Z) + \alpha\|Z\|_*^2 = \left\|\tilde{F}Z - I\right\|_{m\times m}^2 + \alpha\|Z\|_*^2, \quad \alpha > 0, \quad Z \in U^{*}. \tag{6}$$

Известно, что задача минимизации квадратичного функционала (6) в евклидовом пространстве U^{*} имеет единственное решение $\tilde{Z}_{\alpha}$. Поэтому при $\alpha > 0$ можно определить обобщенную невязку [18]

$$\rho_{\xi}(\alpha) = J_h(\tilde{Z}_{\alpha}) - Ch\left\|\tilde{Z}_{\alpha}\right\|_* - \mu_h^{\beta}, \; C = const \geq 1, \; \xi \equiv (h, \beta).$$

Величина μ_h^{β} представляет собой β-приближение к модифицированной мере несовместности μ_h:

$$\mu_h \equiv \inf\{J_h(Z) + h\|Z\|_* : Z \in U^{*}\} = \inf\{\left\|\tilde{F}Z - I\right\|_{m\times m} + h\|Z\|_* : Z \in U^{*}\},$$

т.е. $0 \leq \mu_h^{\beta} - \mu_h \leq \beta$.

Согласно результатам [17,18] уравнение $\rho_{\xi}(\alpha) = 0$ имеет при условии $\|I\|_{m\times m} > \mu_h^{\beta}$ единственное решение $\alpha(\xi) > 0$. В качестве приближения к псевдообратной матрице F^{+} возьмем экстремаль $\tilde{Z}_{\alpha(\xi)}$ функционала (6), отвечающую параметру $\alpha = \alpha(\xi)$. Тогда $\tilde{Z}_{\alpha(\xi)} \to F^{+}$ при $\xi = (h, \beta) \to 0$.

Экстремаль $\tilde{Z}_{\alpha}$ функционала А.Н. Тихонова удовлетворяет необходимому условию минимума

$$(\tilde{F}^T\tilde{F} + \alpha I)Z = \tilde{F}^T. \tag{7}$$

Матричное уравнение (7) эквивалентно набору систем линейных алгебраических уравнений вида [18]

$$(\tilde{F}^T\tilde{F} + \alpha I)z_j = (\tilde{a}^T)_j, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{8}$$

где z_j и $(\tilde{a}^T)_j$ суть j-е столбцы матриц Z и $\tilde{F}^{*}$. Процесс решения систем (8) можно рационально организовать на основе метода [19,20]. При этом прежде всего с помощью преобразований отражения матрица $\widetilde{F}$ приводится к двухдиагональному виду $\widetilde{B}:\widetilde{F}=U\widetilde{B}V^T$, где U и V – ортогональные матрицы.

Уравнение (7) переходит тогда в

$$(\widetilde{B}^T\widetilde{B}+\alpha I)X=\widetilde{W}, \tag{9}$$

где $\widetilde{W}=V^T\widetilde{F}=\widetilde{B}^TU^T$ и $X=V^TZ$. При заданном α имеем m трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений, порождаемых матричным уравнением (9), которые решаются методом прогонки [15]. Обобщенная невязка вычисляется по равенству

$$\rho_\xi(\alpha)=\left\|\widetilde{B}\widetilde{X}_\alpha-U^T\right\|_{m\times m}-Ch\left\|\widetilde{X}_\alpha\right\|_*-\mu_h^\beta,$$

где $\widetilde{X}_\alpha$ – решение (9).

После нахождения корня обобщенной невязки $\alpha(\xi)$, а также матрицы $\widetilde{X}_{\alpha(\xi)}$ можно вычислить приближение $\widetilde{Z}_{\alpha(\xi)}$ к $F^+:\widetilde{Z}_{\alpha(\xi)}=V\widetilde{X}_{\alpha(\xi)}$.

Рассмотрим влияние возмущения входных данных на точность определения u_{k_0}. Итак, имеем

$$\begin{gathered} F^TFu_{k_0}=F^TS_k, \\ \left(F^TF+\alpha I\right)u_{k_\alpha}=F^TS_k, \\ \left(\widetilde{F}^T\widetilde{F}+\alpha I\right)\widetilde{u}_{k_\alpha}=\widetilde{F}^T\widetilde{S}_k. \end{gathered} \tag{10}$$

Из второго и третьего уравнений (10) на основе матричных преобразований [13,15] получаем

$$\left(\widetilde{F}^T\widetilde{F}+\alpha I\right)\left(\widetilde{u}_{k_\alpha}-u_{k_\alpha}\right)=-\left(\widetilde{F}^T\widetilde{F}+F^TF\right)u_{k_\alpha}+\left(\widetilde{F}^T\widetilde{S}_k-F^TS_k\right)$$

и далее,

$$\left\|\widetilde{u}_{k_\alpha}-u_{k_\alpha}\right\|_E\le\left(\left\|\widetilde{F}^T\widetilde{F}-F^TF\right\|_E\left\|u_{k_0}\right\|_E+\left\|\widetilde{F}^T\widetilde{S}_k-F^TS_k\right\|_E\right)\alpha^{-1}=\frac{\theta}{\alpha},$$

так как $\left\|u_{k_\alpha}\right\|_E\le\left\|u_{k_0}\right\|_E$, где θ – некоторая константа.

Можно показать [15,19], что уравнение

$$F^TFF^TFv=F^TS_k$$

всегда имеет решение.

Пусть v_0 - его нормальное решение. Обозначим через $v_{\lambda\alpha}$ решение такого уравнения:

$$\left(F^TF+\lambda I\right)\left(F^TF+\alpha I\right)v_{\lambda\alpha}=F^TS_k.$$

Используя предельные переходы [17] можно написать

$$\lim_{\substack{\lambda\to+0,\\ \alpha\to+0}}v_{\lambda\alpha}=v_0.$$

Если u_{k_α} и u_{k_λ} - решения (10), соответственно, для значений параметра, равных α и λ, то

$$\left(F^TF+\lambda I\right)\left(F^TF+\alpha I\right)\left(u_{k_\lambda}-u_{k_\alpha}\right)=\left(F^TF+\lambda I\right)(\alpha-\lambda)u_{k_\lambda}=(\alpha-\lambda)F^TS_k. \tag{11}$$

На основе (11) можно написать

$$\min_\alpha\left\|u_{k_0}-\widetilde{u}_{k_\alpha}\right\|_E\le\min_\alpha\left(\left\|u_{k_0}-u_{k_\alpha}\right\|_E+\left\|u_{k_0}-\widetilde{u}_{k_\alpha}\right\|_E\right)=2\left(\theta\left\|v_0\right\|_E\right)^{1/2}.$$

Если исходные данные системы $Fu_k = S_k$ заданы точно, то внесение ошибок при реализации вычислительного процесса [18-20] равносильно внесению возмущений порядка $O\left(2^{-t}\right)$ в F и S_k. Следовательно,

$$\min_{\alpha}\left\|u_{k_0} - \tilde{u}_{k_\alpha}\right\| = O\left(2^{-t/2}\right),$$

и численная устойчивость имеет место.

Приведенные регулярные алгоритмы локально-оптимальной стабилизации объектов управления при неполной информации, построенные на основе устойчивого псевдообращения матриц методом регуляризации Тихонова для экстремальных задач с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки, позволяют повысить точность формирования управляющих воздействий в системах с неполными наблюдениями и неизмеряемыми возмущениями.

References:

1. Afanas'ev V.N. Upravlenie neopredelenny'mi dinamicheskimi ob`ektami. - M.: Fizmatlit, 2008. - 208 s.
2. Bobcov A.A., Py'rkin A.A. Adaptivnoe i robastnoe upravlenie s kompensaciey neopredelennostey. Uchebnoe posobie. - SPb.: NIU ITMO, 2013. - 135s.
3. Ostrovskiy G.M. Tehnicheskie sistemy' v usloviyah neopredelennosti: analiz gibkosti i optimizaciya. -M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2008. - 319 s.
4. Nikiforov V.O., Ushakov A.V. Upravlenie v usloviyah neopredelennosti: chuvstvitel'nost', adaptaciya, robastnost'. - SPb: SPb GITMO (TU), 2002. - 232 s.
5. Igamberdiev H.Z., YUsupbekov A.N., Zaripov O.O. Regulyarny'e metody' ocenivaniya i upravleniya dinamicheskimi ob`ektami v usloviyah neopredelennosti. - T.: TashGTU, 2012. - 320 s.
6. Kel'mans G.K., Poznyak A.S., CHernicer A.V., Lokal'no-optimal'noe upravlenie ob`ektami s neizvestny'mi parametrami, Avtomat. i telemeh., 1992, № 10. -S. 80-93.
7. Darhovskiy B.S., Magaril-Il'yaev G.G. O sinteze sistem stabilizacii // AiT. 1990, №12. -S. 66-74.
8. Bodyanskiy E.V., Boryachok M.D. Lokal'no-optimal'noe psevdodual'noe upravlenie ob`ektami s neizvestny'mi parametrami, Avtomat. i telemeh., 1992, № 2. -S. 90-97.
9. Kogan M.M., Neymark YU.I. Ob optimal'nosti lokal'no-optimal'ny'h resheniy zadach upravleniya i fil'tracii // AiT. 1992. №4. -S. 101-110.
10. Darhovskiy B.S. Lokal'no optimal'naya stabilizaciya pri nepolnoy informacii // AiT. 1997. №4. -S. 144-154.
11. Kogan M.M., Neymark YU.I. Funkcional'ny'e vozmojnosti adaptivnogo lokal'no-optimal'nogo upravleniya // AiT. 1994. №6. -S. 94-105.
12. Kim K.S., Smagin V.I. Lokal'no-optimal'noe upravlenie diskretny'mi sistemami s zapazdy'vaniem v kanale upravleniya pri nepolnoy informacii o sostoyaniya vozmusch'eniyah // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. 2016. №1(34). - S. 11-17.
13. Gantmaher F.R. Teoriya matric. -M.: Nauka, 1988. - 552 s.
14. Demmel' Dj. Vy'chislitel'naya lineynaya algebra. Teoriya i prilojeniya: Per. s angl. -M.: Mir, 2001 -430 s.
15. Verjbickiy V.M. Vy'chislitel'naya lineynaya algebra. -M.: Vy'ssh. shk., 2009. -351 s.
16. Nekorrektny'e zadachi estestvoznaniya / Pod redakciey A.N. Tihonova, A.V. Goncharskogo. -M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1987. - 299 s.
17. Tihonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., YAgola A.G. CHislenny'e metody' resheniya nekorrektny'h zadach, M.: Nauka, 1990.
18. Leonov A.S. Reshenie nekorrektno postavlenny'h zadach: Ocherk teorii, prakticheskie algoritmy' i demonstracii. -M.: Librokom. -336 s.
19. Voevodin V.V., Kuznecov YU.A. Matricy' i vy'chisleniya. 1984. -318 s.
20. Jdanov A.I. Vvedenie v metody' resheniya nekorrektny'h zadach: -Izd. Samarskogo gos. ae`rokosmicheskogo un-ta, 2006. - 87 s.

Мамиров Уктам Фарходович – докторант кафедры
«Системы обработки информации и управление», ТашГТУ
Тел.: (90) 900-56-25, E-mail.: uktammamirov@gmail.com.