

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
ПОРИСТОГО ТЕЛА

Равшанов Н., Шадманов И.У.

В настоящей статье разработана математическая модель теплового состояния пористого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. При разработке модели учтены внутреннее тепловыделение, теплообмен через поверхности пористого тела с окружающей средой. Для решения задачи разработана модификация дифференциально-разностного метода, где для дискретизации уравнений и условий по времени, абсциссе и ординате используется метод прямых, а по аппликате конечно-разностный метод, а для решения полученной системы уравнений использован метод прогонки. Для описания годового изменения температуры окружающей среды предложена синусоидальная формула, а для суточного изменения – эмпирическая формула, построенная на основе метода наименьших квадратов при изучении термического состояния натуральных продуктов, находящихся под влиянием внешней температуры. Проведен качественный анализ решения и составлена программа проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ. Разработанный математический инструмент служит для исследования процессов теплообмена в материалах, находящихся под солнечной радиацией.

Ключевые слова: математическая модель, тепломассоперенос, влагоперенос, внутреннее тепловыделение, пористое тело.

In this paper developed a mathematical model of the thermal state of a porous whole, having the shape of a rectangular parallelepiped. When developing the model, internal heat generation, heat exchange through the surfaces of the porous body with the environment are taken into account. To solve a problem, a modification of the differential-difference method has been developed, where the method of straight lines is used for discretization of equations and conditions in time, in abscissa and ordinate, and in finiteness the finite-difference method and to solve the resulting system of equations used the sweep method. A sinusoidal formula proposed for describing the annual change in ambient temperature, and an empirical formula based on the least squares method proposed for diurnal variation when studying the thermal state of the natural products under the influence of external temperature. A qualitative analysis of the solution was developed and a program compiled for a computing experiment on a computer. The developed

mathematical instrument serves to research the processes of heat transfer in materials under solar radiation.

Keywords: mathematical model, heat and mass transfer, moisture transfer, internal heat generation, porous body.

Ushbu maqolada to'g'ri burchakli parallelepiped shaklidagi g'ovak jism termal holatining matematik modeli ishlab chiqilgan. Modelni ishlab chiqishda, ichki issiqlik almashinuvi, atrof-muhit bilan g'ovak jism yuza qismining issiqlik almashinuvi hisobga olingan. Muammoni hal etishda differensial-ayirmali usulning modifikatsiyasi ishlab chiqilib, tenglamalarni vaqt bo'yicha absissa va ordinata o'qlarida diskriminatsiya qilishda to'g'ri chiziqlar usuli va aplikata o'qi bo'yicha chekli ayirmalar va haydash usulidan foydalanilgan. Atrof muhit temperaturasining yillik o'zgarishini tavsiflash uchun sinusoidal formula olinib, kundalik o'zgarishi uchun esa tashqi harorat ta'siri ostidagi tabiiy mahsulotlarning termal holatini o'rganish uchun eng kichik kvadratlar metodiga asoslangan emperik formulalar olingan. Yechimni topishda sifatli taxlillar va kompyuterda hisoblash tajribalarini o'tkazish uchun dasturiy ta'minot ishlab chiqilgan. Ishlab chiqilgan matematik dasturiy ta'minot quyosh radiatsiyasi ostida bo'lgan jismlarning issiqlik almashinuvi jarayonini o'rganish uchun xizmat qiladi.

Tayanch iboralar: matematik model, issiqlik va massa almashinuvi, namlik almashinuvi, ichki issiqlik almashinuvi, g'ovak jism.

I. ВВЕДЕНИЕ

В современном обществе существует необходимость в повышении качества и длительности хранения различных пористых продуктов. На сегодняшний день разработан ряд математических моделей, численных алгоритмов и программных продуктов, позволяющих изучить теплообменные процессы при хранении различных продуктов. Несмотря на это, проблемы разработки математических и компьютерных моделей, позволяющие учитывать и оценивать такие факторы, как собственное тепловыделение натурального продукта, влияние изменения температуры окружающей среды и солнечной радиации при анализе процессов теплообмена, изучены недостаточно.

Основные уравнения, описывающие процессы тепломассопереноса при тепловом воздействии на пористые среды, получили название уравнений А.В. Лыкова [1]. Они описывают режим мягкой сушки при малых тепловых потоках, когда температура сушки не превышает 50–70°C, что ниже температуры кипения воды. При этом процесс сушки сопровождается повышением внутреннего избыточного давления водяного пара и перемещением вглубь тела области фазового перехода.

Аналитический метод решения система уравнений тепломассопереноса

Лыкова с линейно зависимыми от времени граничными условиями представлены в работах Jen Y. Liu [2].

В работах Ильясова У.Р., Игошина Д.Е. [3] представлена модель, описывающая процесс тепломассопереноса при сушке влажного пористого материала. Получены решения, описывающие распространение температурных и концентрационных полей. Установлено, что в зависимости от параметров внешнего воздействия может происходить как сушка, так и увлажнение среды.

В работе [4] разработано программное обеспечение математической модели поверхностного испарения, которое позволяет рассчитывать непрерывно весь процесс сушки как в жестких, так и мягких условиях.

Найдены аналитические решения задач о нестационарных полях влагосодержания и температуры в теле в форме шара в области линейной изотермы десорбции паров воды из материала при равномерном начальном распределении влагосодержания и температуры по радиусу тела и граничных условиях третьего рода, учитывающих изменение влагосодержания и температуры сушильного агента в камерной сушилке с течением времени процесса сушки [5].

В [6] рассматривается математическая модель нестационарных процессов взаимосвязанного тепломассопереноса в капиллярно-пористых средах с учетом влияния капиллярных и поверхностных сил, интенсивности массообмена между фазами и термокапиллярных течений. На основе метода взвешенных невязок разработан численный метод решения уравнений тепловлагопереноса в капиллярно-пористых средах. Проведена экспериментальная верификация предложенной математической модели тепловлагопереноса.

В статьях [7, 8] задача о фронте испарения в пористом сферическом теле решается методом разделения переменных. Решение получено в виде бесконечных рядов экспоненциально-тригонометрических функций. Для определения местоположения фронта испарения из условия сопряжения потока тепла использован своеобразный метод, заключающийся в замене рядов на несобственные интегралы.

Бунт пористого тела в геометрическом плане имеет форму прямоугольника с размерами $20 \times 10 \text{ м}^2$ и меньше. При этом длинная сторона параллельна меридиану местности. Высота его может составлять до 8 м. Через определенный срок, в зависимости от влажности массы, производится продувание бунта, для чего через нижнее основание по его длине проводится проем высотой 2 м и шириной 1 м. Продувание массы проводится в режиме отсоса через один конец проема, а второй конец проема закрывается наглухо. Просачиваемый через массу воздушный поток устраняет локализацию теплового напряжения, а низкое статическое давление отсоса способствует снижению температуры испарения влаги [9-11].

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных разработаны различные методы [12-15]. Но для численного решения трехмерной задачи теплопередачи использовали дифференциально-разностный метод, сущность которого сводится к построению отдельных дифференциальных уравнений по той или иной координате, минуя прогоночный процесс. В рамках параграфа фундаментальная и диагональная матрицы заимствованы из работ [16, 17] и граничные условия задачи сформированы под результаты этих работ.

Охватить все эти тонкости технологии хранения пористого тела при разработке математической модели можно. Но трехмерность задачи, сложная конфигурация области расчета и одновременный учет тепло- и влагопереноса с малыми коэффициентами на уровне молекулярного обмена, учет воздействия внешних факторов в виде солнечной радиации и температуры окружающей среды, процесс испарения и другие факторы накладывают определенные трудности как при математическом моделировании объекта, так и в процессе решения задачи и проведении вычислительного эксперимента. В связи с этим необходимо организовать исследовательскую работу по принципу «от простого к сложному», постепенно усложняя математическую модель и методы решения задачи.

II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Постановка задачи. Процесс теплообмена в нем описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

где $f = f(x, y, z, t)$ – интенсивность внутренних сплошных и дискретных источников тепла ($K c^{-1}$); a – коэффициент температуропроводности массы ($m^2 c$), изменение которого в зависимости от координат и времени не учитывается [9].

Интенсивность внутреннего тепловыделения вне проема задается в виде экспоненциального закона $f(t) = be^{-at}$.

Учитываются возможные варианты отсутствия проема и наличие одного или нескольких проемов.

Параллелепипед расположен в первом октанте декартовой системы координат, и размеры его по координатам составляют l_x, l_y, l_z .

Заданы начальное

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad (2)$$

и граничные условия на гранях прямоугольного параллелепипеда:

$$T(0, y, z, t) = \mu_{x0}(y, z, t), \quad (3)$$

$$T(l_x, y, z, t) = \mu_{xl}(y, z, t), \quad (4)$$

$$T(x, 0, z, t) = \mu_{y0}(x, z, t), \quad (5)$$

$$T(x, l_y, z, t) = \mu_{yl}(x, z, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(x, y, l_z, t)}{\partial z} = \eta [T_{oc}(t) - T(x, y, l_z, t)]. \quad (8)$$

Здесь $T_{oc}(t)$ – температура окружающей среды. Возможен вариант использования пятиэтапной аппроксимации температуры окружающей среды. Но этот вариант громоздкий для случая решения трехмерной задачи. Поэтому учет температуры окружающей среды в граничных условиях производится в упрощенном гипотетическом варианте.

Среднесуточное значение температуры окружающей среды в зависимости от даты τ_g задается приближенно:

$$T(\tau_g) = T_{\min g} + (T_{\max g} - T_{\min g}) \sin 2\pi \frac{\tau_g - 121}{\Pi_p}, \quad (9)$$

где Π_p – продолжительность астрономического года Земли; $T_{\min g}$ – среднесуточное значение температуры окружающей среды; $T_{\max g} - T_{\min g}$ – суточная амплитуда его изменения.

Суточное изменение температуры окружающей среды с интервалом 25°C (континентальный климат) описывается следующей формулой:

$$T(t) = T(\tau_g) + 12.5T_a(t), \quad (10)$$

где $T_a(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{v=1}^6 \left(A_v \cos \frac{2\pi vt}{\Pi} + B_v \sin \frac{2\pi vt}{\Pi} \right)$ – суточное изменение

температуры окружающей среды в интервале $[-1; 1]$ с наилучшим порядком аппроксимации, согласно результатам натуральных наблюдений [10]. Коэффициенты тригонометрического полинома составили: $A_0 = -0.36800848$; $A_1 = 0.87952815$; $A_2 = 0.30449003$; $A_3 = 0.01014991$; $A_4 = -0.03398899$; $A_5 = -0.00319683$; $A_6 = 0.00810565$; $B_1 = 0.33607974$; $B_2 = 0.04234428$; $B_3 = -0.04441236$; $B_4 = -0.01811762$; $B_5 = 0.00593935$; $B_6 = 0.00312235$.

В качестве начальной температуры массы можно принимать среднее значение температуры за τ -е сутки: $T_0 = T(\tau_g)$.

Для задания $f(x, y, z, t)$ в центре проема с координатой (x, y, z) используется интеграл

$$-\oint_{\Gamma} \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial \bar{n}} d\Gamma = \eta(T_{oc} - T_{\Gamma})l_x,$$

где Γ, l_x – граница проема в плоскости yOz и ее длина; T_{Γ} – температура массы на границе проема, значение которой берется за предыдущее время для точки (x, y, z) .

Метод решения. Для численного решения задачи (1)–(8) поэтапно вводится сетка по переменным x, y и z :

$$\omega_x = \left(x_i = ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x + 1; h_x = \frac{l_x}{N_x + 1} \right),$$

$$\omega_y = \left(y_j = jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y + 1; h_y = \frac{l_y}{N_y + 1} \right),$$

$$\omega_z = \left(z_k = kh_z, k = 0, 1, \dots, N_z + 1; h_z = \frac{l_z}{N_z + 1} \right)$$

и по времени $t_n = n\tau$. Осуществляется поэтапный переход к дискретным координатам и функциям, согласно положениям дифференциально-разностного метода, известного также как метод прямых [16, 17].

В уравнении и условиях делается переход к дискретным координатам по времени t и координате x , введением новых искомым $u_i^{n+1}(y, z)$ и функции $f_i^{n+1}(y, z), \mu_{x0}^{n+1}(y, z), \mu_{xl}^{n+1}(y, z), \mu_{y0,i}^{n+1}(z), \mu_{yl,i}^{n+1}(z), v_{z0,i}^{n+1}(y)$ и T_{oc}^{n+1} .

Для внутренних узлов $i = 1..N_x$ отрезка с длиной l_x уравнение (1) аппроксимируется в виде:

$$\frac{1}{\tau} u_i^{n+1} + \frac{a}{h_x^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^{n+1} + f_i^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_i^n = 0. \quad (11)$$

С учетом реализации граничных условий (3) и (4) в (11) можно составить матричное уравнение:

$$\frac{1}{\tau} U^{n+1} + \frac{a}{h_x^2} M_x U^{n+1} + a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^{n+1} + F^{n+1} = 0, \quad (12)$$

где $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N_x}^{n+1})^*$

$$F^{n+1} = \left(f_1^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_1^n + \frac{a}{h_x^2} \mu_{x0}^{n+1}, f_2^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_2^n, \dots, f_{N_x-1}^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_{N_x-1}^n, f_{N_x}^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_{N_x}^n + \frac{a}{h_x^2} \mu_{xl}^{n+1} \right)^*$$

$$M_x = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N_x}.$$

Вводятся фундаментальная B_x и диагональная Λ_x матрицы [16, 17] с элементами $b_{x,s,p} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x+1}} \sin \frac{sp\pi}{N_x+1}$, $\lambda_{x,s} = -2 \left(1 + \cos \frac{s\pi}{N_x+1} \right)$ при $s, p=1, 2, \dots, N_x$.

Известно, что матрицы M_x и Λ_x взаимно подобные:

$$M_x = B_x \Lambda_x B_x^{-1},$$

где B_x^{-1} – обратная матрица B_x , равная в данном случае матрице B_x .

Уравнение (12) умножается слева на матрицу B_x^{-1} и, с учетом $B_x^{-1} M_x U^{n+1} = \Lambda_x U^{(1)}$, составляется новое матричное уравнение

$$\frac{1}{\tau} U^{(1)} + \frac{a}{h_x^2} \Lambda_x U^{(1)} + a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^{(1)} + F^{(1)} = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \left(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_{N_x}^{(1)} \right)^* = B_x^{-1} U^{n+1} = B_x U^{n+1} = \\ &= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{x,1,p} u_p^{n+1}, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,2,p} u_p^{n+1}, \dots, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,N_x,p} u_p^{n+1} \right)^*, \\ F^{(1)} &= \left(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_{N_x}^{(1)} \right)^* = B_x^{-1} F^{n+1} = B_x F^{n+1} = \\ &= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{x,1,p} (F^{n+1})_p, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,2,p} (F^{n+1})_p, \dots, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,N_x,p} (F^{n+1})_p \right)^*. \end{aligned}$$

Здесь $(F^{n+1})_p$ – p -й элемент вектор-столбца F^{n+1} .

Из уравнения (13) делается переход к N_x автономным уравнениям:

$$\frac{1}{\tau} u_i^{(1)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} u_i^{(1)} + a \left(\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial z^2} \right) + f_i^{(1)} = 0. \quad (14)$$

На втором этапе дискретизации в уравнении (14) из координаты y переход к конечным разностям, для чего вводятся функции $u_{i,j}^{(2)}(z)$ и $f_{i,j}^{(2)}(z)$ взамен функций $u_i^{(1)}(y, z)$ и $f_i^{(1)}(y, z)$.

Нужны значения функции $u_{i,j}^{(2)}(z)$ на границах $j=0$ и $j=N_y+1$. Они находятся согласно введенной замене переменных:

$$\mu_{y0,i}^{(2)}(z) = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} \mu_{y0}^{n+1}(ph_x, z), \quad (15)$$

$$\mu_{yl,i}^{(2)}(z) = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} \mu_{yl}^{n+1}(ph_x, z). \quad (16)$$

Также в последующем нужны будут граничные условия (7) и (8) по третьей координате, они запишутся в виде:

$$\frac{\partial u_{i,j}^{(2)}(0)}{\partial z} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} v_{z0,i,p}^{n+1}(jh_y) = v_{z0,i,j}^{(2)}, \quad \frac{\partial u_{i,j}^{(2)}(l_z)}{\partial z} = \eta [T_{oc}^{(2)} - u_{i,j}^{(2)}(l_z)],$$

где
$$T_{oc}^{(2)} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} T_{oc}^{n+1}.$$

Реализация условий (15) и (16) в (14) и само уравнение (14) при дискретизации по координате y приводят к матричному уравнению:

$$\frac{1}{\tau} U_i^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} U_i^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} M_y U_i^{(2)} + a \frac{d^2 U_i^{(2)}}{dz^2} + F_i^{(2)} = 0, \quad (17)$$

где
$$U_i^{(2)} = \left(u_{i,1}^{(2)}, u_{i,2}^{(2)}, \dots, u_{i,N_y}^{(2)} \right)^*,$$

$$F_i^{(2)} = \left(f_{i,1}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,1}^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} \mu_{y0,i}^{(2)}, f_{i,2}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,2}^{(2)}, \dots, f_{i,N_y-1}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,N_y-1}^{(2)}, f_{N_y}^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_{N_y}^{(n)} + \frac{a}{h_y^2} \mu_{yl,i}^{(2)} \right)^*,$$

$$M_y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N_y}.$$

Для уравнения (17) вводится фундаментальная B_y и диагональная Λ_y матрицы с соответствующими элементами, как в случае уравнения (12).

Умножается уравнение (17) слева на матрицу B_y^{-1} :

$$\frac{1}{\tau} \bar{U}_i^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \Lambda_x \bar{U}_i^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} \Lambda_y \bar{U}_i^{(2)} + a \frac{\partial^2 \bar{U}_i^{(2)}}{\partial z^2} + \bar{F}_i^{(2)} = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_i^{(2)} &= (\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)}, \dots, \bar{u}_{N_y}^{(2)})^* = B_x^{-1} U^{(2)} = B_x U^{(2)} = \\ &= \left(\sum_{q=1}^{N_y} b_{y,1,q} u_{i,q}^{(2)}, \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,2,q} u_{i,q}^{(2)}, \dots, \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,N_y,q} u_{i,q}^{(2)} \right)^*, \\ \bar{F}_i^{(2)} &= (\bar{f}_1^{(2)}, \bar{f}_2^{(2)}, \dots, \bar{f}_{N_y}^{(2)})^* = B_y^{-1} F_i^{(2)} = B_y F_i^{(2)} = \\ &= \left(\sum_{q=1}^{N_y} b_{y,1,q} (F_i^{(2)})_q, \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,2,q} (F_i^{(2)})_q, \dots, \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,N_y,q} (F_i^{(2)})_q \right)^*. \end{aligned}$$

Здесь используется обозначение $(F_i^{(2)})_q$ для q -го элемента вектор-столбца $F_i^{(2)}$.

Из (18) делается переход к отдельным N_x, N_y автономным уравнениям:

$$\frac{1}{\tau} \bar{u}_{i,j}^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} \bar{u}_{i,j}^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} \lambda_{y,j} \bar{u}_{i,j}^{(2)} + a \frac{d^2 \bar{u}_{i,j}^{(2)}}{dz^2} + \bar{f}_{i,j}^{(2)} = 0. \quad (19)$$

Граничными условиями для этих уравнений служат:

$$\frac{d\bar{u}_{i,j}^{(2)}(0)}{dz} = \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,i,q} v_{z0,i,q}^{n+1} = \bar{v}_{z0,i,j}^{(2)}, \quad \frac{d\bar{u}_{i,j}^{(2)}(l_z)}{dz} = \eta [T_{oc}^{(2)} - \bar{u}_{i,j}^{(2)}(l_z)],$$

$$\text{где } T_{oc}^{(2)} = \sum_{p=1}^{N_y} b_{y,i,p} T_{oc}^{(1)}.$$

Теперь по координате z вводятся дискретные функции $u_{i,j,k}^{(3)}$ и $f_{i,j,k}^{(3)}$, и в (19) делается переход к разностным уравнениям для внутренних узлов [14-16]:

$$\frac{1}{\tau} u_{i,j,k}^{(3)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} u_{i,j,k}^{(3)} + \frac{a}{h_y^2} \lambda_{y,j} u_{i,j,k}^{(3)} + a \frac{u_{i,j,k+1}^{(3)} - 2u_{i,j,k}^{(3)} + u_{i,j,k-1}^{(3)}}{h_z^2} + f_{i,j,k}^{(3)} = 0.$$

Составляется уравнение для применения метода прогонки:

$$a_k u_{i,j,k+1}^{(3)} - b_k u_{i,j,k}^{(3)} + c_k u_{i,j,k-1}^{(3)} = -f_{i,j,k}^{(3)},$$

$$\text{где } a_k = c_k = \frac{a}{h_z^2}, \quad b_k = a_k + c_k - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} + \frac{a}{h_y^2} \lambda_{y,j} \right).$$

Согласно этим обозначениям, прогонка осуществляется по формуле:

$$u_{i,j,k}^{(3)} = \alpha_k u_{i,j,k+1}^{(3)} + \beta_k,$$

$$\text{где } \alpha_k = \frac{a_k}{b_k - c_k \alpha_{k-1}}, \quad \beta_k = \frac{c_k \beta_{k-1} + f_{i,j,k}^{(3)}}{b_k - c_k \alpha_{k-1}}.$$

Граничное условие при $z = 0$ реализуется со вторым порядком точности:

$$3u_{i,j,0}^{(3)} - 4u_{i,j,1}^{(3)} + u_{i,j,2}^{(3)} = -2h_z \bar{v}_{z0,i,j}^{(2)}.$$

Так как $a_1 u_{i,j,2}^{(3)} - b_1 u_{i,j,1}^{(3)} + c_1 u_{i,j,0}^{(3)} = -f_{i,j,1}^{(3)}$, то исключив $u_{i,j,2}^{(3)}$ из последних двух уравнений, составляется:

$$u_{i,j,0}^{(3)} = \alpha_0 u_{i,j,1}^{(3)} + \beta_0,$$

$$\text{где } \alpha_0 = \frac{4a_1 - b_1}{3a_1 - c_1}, \quad \beta_0 = \frac{-2h_z \bar{v}_{z0,i,j}^{(2)} + f_{i,j,1}^{(3)}}{3a_1 - c_1}.$$

Вычисление значений прогоночных коэффициентов начинается с этих формул и продолжается до значений α_{N_z} и β_{N_z} . Далее осуществляется обратная прогонка, для первого шага которой необходимо значение $u_{i,j,N_z+1}^{(3)}$. Оно находится из аппроксимации граничного условия при $z = l_z$:

$$3u_{i,j,N_z+1}^{(3)} - 4u_{i,j,N_z}^{(3)} + u_{i,j,N_z-1}^{(3)} = 2h_z\eta(T_{oc}^{(2)} - u_{i,j,N_z}^{(3)}).$$

С учетом $u_{i,j,N_z-1}^{(3)} = \alpha_{N_z-1}u_{i,j,N_z}^{(3)} + \beta_{N_z-1}$ последнее уравнение приобретает вид:

$$3u_{i,j,N_z+1}^{(3)} + (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z\eta)u_{i,j,N_z}^{(3)} = 2h_z\eta T_{oc}^{(3)} - \beta_{N_z-1}.$$

Здесь учитывается $u_{i,j,N_z}^{(3)} = \alpha_{N_z}u_{i,j,N_z+1}^{(3)} + \beta_{N_z}$. Поэтому

$$\left[3 + (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z\eta)\alpha_{N_z} \right] u_{i,j,N_z+1}^{(3)} = 2h_z\eta T_{oc}^{(3)} - \beta_{N_z-1} - (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z\eta)\beta_{N_z}.$$

Отсюда находится, что

$$u_{i,j,N_z+1}^{(3)} = \frac{2h_z\eta T_{oc}^{(3)} - \beta_{N_z-1} - (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z\eta)\beta_{N_z}}{3 + (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z\eta)\alpha_{N_z}}.$$

Вычислением значения $u_{i,j,N_z+1}^{(3)}$ начинается обратная прогонка по формуле $u_{i,j,k}^{(3)} = \alpha_k u_{i,j,k+1}^{(3)} + \beta_k$ для значений $k = N_z, N_z - 1, \dots, 2, 1, 0$.

Описанный выше алгоритм применяется для каждого нового временного шага $n+1=1, 2, \dots$. Но для его первого шага нужны значения $u_{i,j,k}^{(3)}$ для начального времени $t = 0$.

При дискретизации по времени t и координате x вводится $u_i^0(y, z)$. После диагонализации уравнения (13) делается переход к условию $u_i^{(1)0}(y, z) = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} u_p^0(y, z)$.

При дискретизации по y вводится замена $u_{i,j}^{(2)0}(z) = u_i^{(1)0}(y, z)$. При диагонализации уравнения (18) получается $\bar{u}_{i,j}^{(2)0}(z) = \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,j,q} u_{i,q}^{(2)0}(z)$. Потом производится замена $u_{i,j,k}^{(3)0} = \bar{u}_{i,j}^{(2)0}(z)$. В итоге получается, что для сеточной функции $u_{i,j,k}^{(3)}$ начальным условием будет

$$u_{i,j,k}^{(3)0} = \sum_{p=1}^{N_x} \sum_{q=1}^{N_y} b_{x,i,p} b_{y,j,q} u_{p,q,k}^0.$$

Остался последний этап вычислений: переход из $u_{i,j,k}^{(3)}$ к исходной искомой $u_{i,j,k}^{n+1}$. С учетом $B_x^{-1} = B_x$ и $B_y^{-1} = B_y$ этот переход осуществляется по формуле $u_{i,j,k}^{n+1} = \sum_{p=1}^{N_x} \sum_{q=1}^{N_y} b_{x,j,p} b_{y,j,q} u_{p,q,k}^{(3)}$.

Таким образом, точность аппроксимации уравнений и условий составляет первый порядок по времени и второй порядок – по координатам.

Обсуждение результатов. Расчеты термического состояния пористого бунта проводятся с учетом внутреннего тепловыделения пористого тела:

$$f(t) = b(x, y, z)e^{-at}.$$

В программе предусмотрен модуль ввода данных (рис. 1).

Программа имеет возможность графической интерпретации отдельных результатов: временного изменения температуры в центре массы, а также на верхних и нижних вершинах параллелепипеда. Результаты вычислительного эксперимента представляются в трехмерном матричном виде, а также в виде изотерм по трем плоскостям разрезов. Температура в этих плоскостях визуализирована в цветном изображении согласно зонам изотерм.

На рис. 2 представлены графические результаты вычислений температуры бунта пористого тела с одним проемом, полученные при начальной температуре бунта 40°C и при температуре окружающей среды 25°C . Через 50 дней внутренняя часть бунта нагревается до 57°C за счет внутреннего тепловыделения. Части, соприкасающиеся с наружной атмосферой, – приграничные и части вокруг проема остывают до 25°C , потому что температура окружающей среды меньше начальной температуры бунта пористого тела.

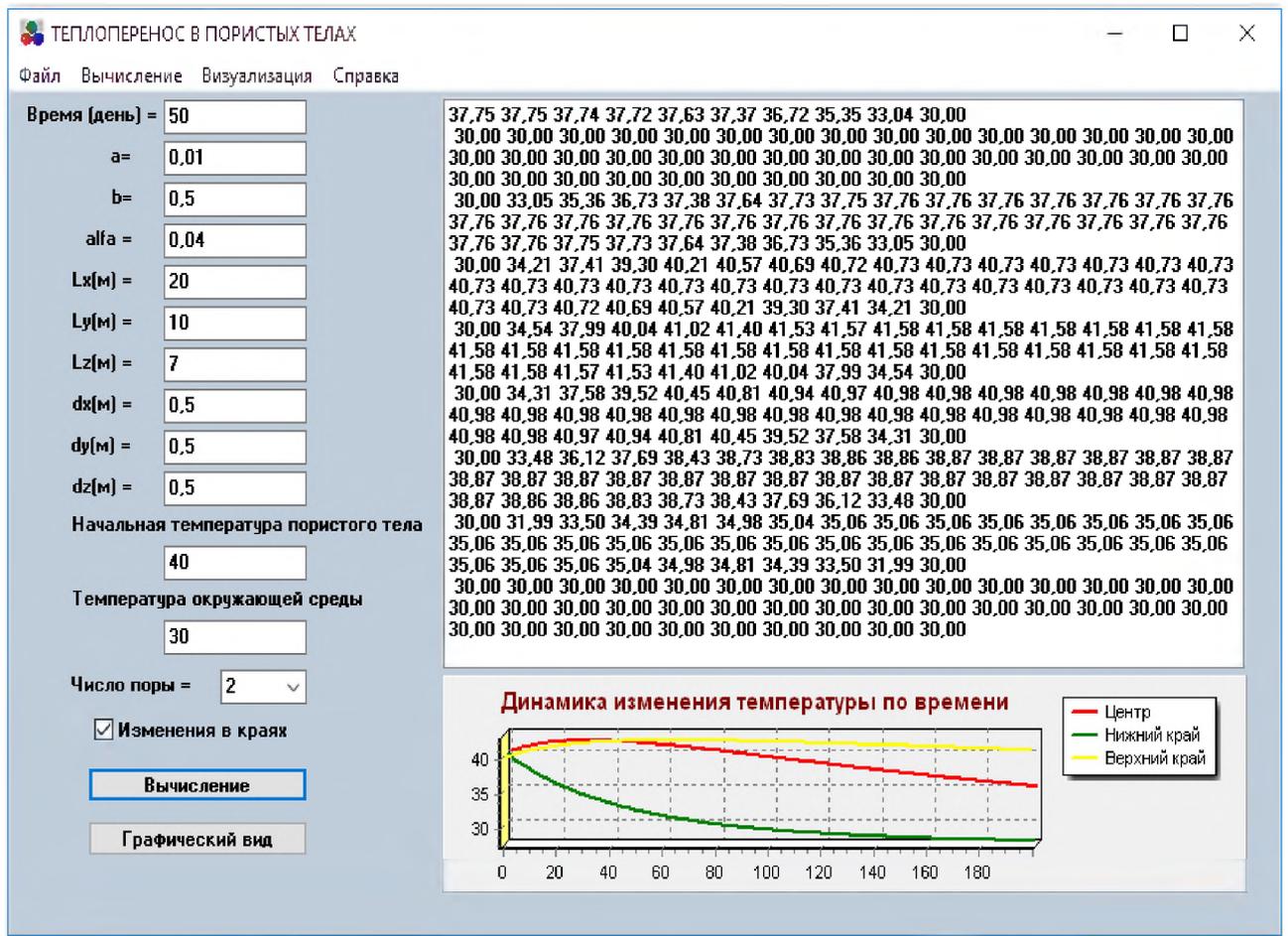


Рис. 1. Модуль программы для ввода данных

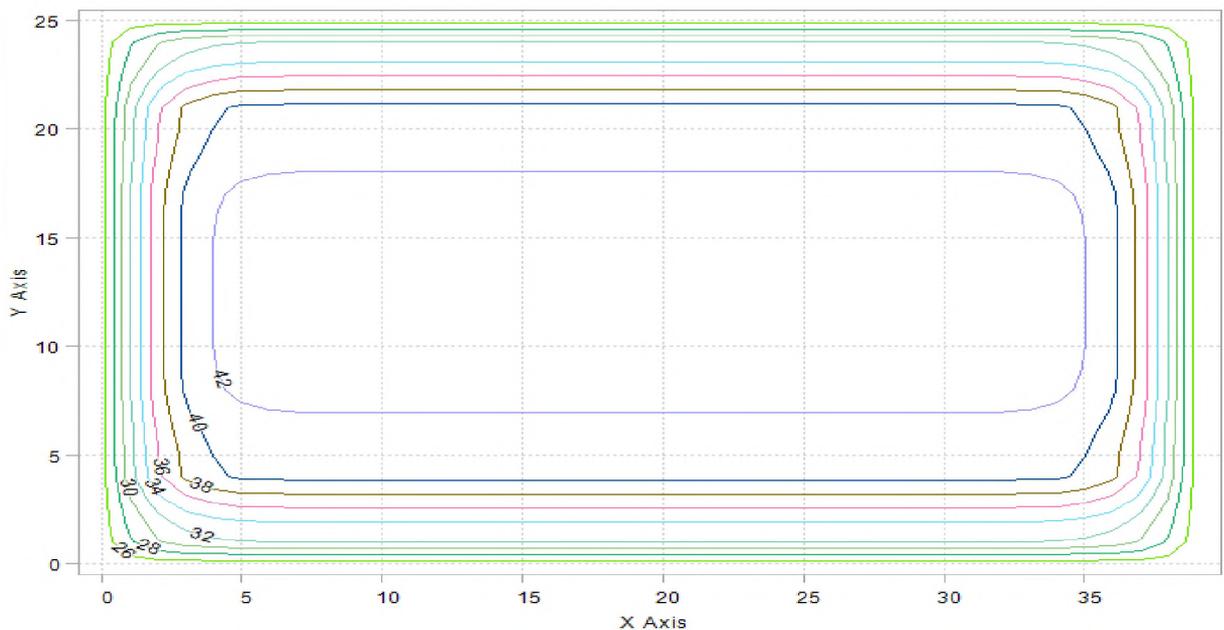


Рис. 2. Распределение температуры в пористого тела после 50-суток:

$$a = 0.01 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}; l_x = 20 \text{ м}; l_y = 10 \text{ м}; l_z = 7 \text{ м}; h_x = h_y = h_z = 0.5 \text{ м};$$

$$T_{oc} = 25^{\circ} \text{C}; T(x, y, z, 0) = 40^{\circ} \text{C}; b = 0.5^{\circ} \text{C} / \text{сек}; \alpha = 0.04 / \text{с}$$

При ослаблении теплообмена с окружающей средой, когда исходная температура и температура окружающей среды соответствуют 40°C , наибольшая температура в бунте, относительно предыдущего варианта расчета, увеличивается на $0,4^{\circ}\text{C}$, т.е. в отдельных точках она доходит до $56,9^{\circ}\text{C}$.

С увеличением влагосодержания пористого тела значения коэффициента температуропроводности и интенсивность тепловыделения увеличиваются. И это приводит к более интенсивному нагреванию внутренней части бунта до $65\text{-}70^{\circ}\text{C}$ и выше (рис. 3). Фактор внутреннего тепловыделения становится весомым и это может привести к самовозгоранию бунта или потере природных качеств пористого тела при долгом хранении.

При уменьшении размеров бунта теплообмен с окружающей средой протекает интенсивно, и фактор внутреннего тепловыделения оказывается на втором плане. При длительном хранении (70 суток) внутренние точки бунта, который имеет размеры 15, 9 и 6 м, нагреваются до 53°C .

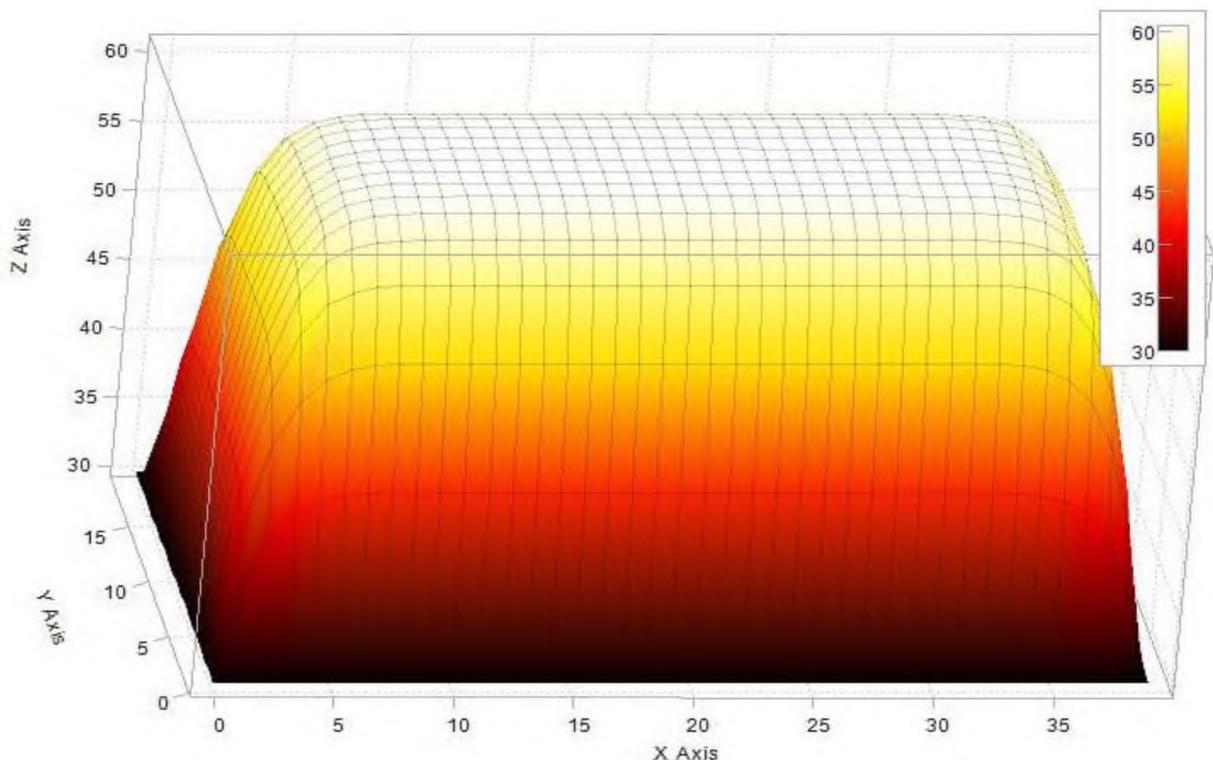


Рис. 3. Распределение температуры в пористом теле, полученное после 70 дней хранения

Расчеты показали, что при уменьшении значения коэффициента температуропроводности роль фактора внутреннего тепловыделения увеличивается. Например, после 60-и суток хранения при $a = 0.01 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ максимальная температура внутри бунта достигает 58°C .

При хранении бунта пористого тела без проема внутренняя часть более интенсивно нагревается и температура внутри бунта достигает до 58°C . Этот показатель на $3\text{-}4^\circ\text{C}$ больше, чем в случае с одним проемом.

Проемы обеспечивают теплообмен внутренней части бунта пористого телас окружающей средой и способствуют остыванию массы. Фактор внутреннего тепловыделения становится заметным при хранении бунта долгое время.

Температура внутренних точек достигает до 63°C и выше при хранении бунта пористого тела более 90 суток.

III. ВЫВОДЫ

Результаты расчетов показали следующие особенности термического состояния бунта пористого тела:

- во-первых, с увеличением размеров бунта роль теплообмена с окружающей средой становится незначительной и наблюдается повсеместное увеличение температуры пористого тела за счет внутреннего тепловыделения;

- во-вторых, при больших значениях влажности массы, что учитывается значением коэффициента b , температура пористого тела растет интенсивнее, чем при малых значениях влажности;

- в-третьих, наличие проема, через который данная масса пористого тела сообщается с теплом окружающей среды, приводит к уменьшению наибольшего значения температуры в бунте пористого тела.

Результаты показали, что при малых размерах хранимого материала ощутима роль теплообмена с окружающей средой. При больших размерах объема сельхозпродуктов, становится ощутимой роль внутреннего тепловыделения, приводящего к повсеместному возрастанию температуры массы. Наличие проема способствует определенному снижению температуры пористого тела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лыков А.В. Теория сушки. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.

[2] Jen Y. Liu., Сушка пористых материалов в среде с переменным потенциалом // Журнал теплообмена, август 1991 г., вып. 113, - с. 757-762.

[3] Ильясов У.Р., Игошин Д.Е., Математическое моделирование сушки влажного пористого материалов диффузионном приближении // Научный журнал «Теплофизика и аэромеханика», Новосибирск, 2008, том 15, № 4, - С.

689-697.

[4] Федяева А. А., Федяева В. Н., Видинб Ю.В., Математическое моделирование динамики процессов тепловлажностной обработки капиллярно-пористых коллоидных дискретных материалов, Журнал Сибирского федерального университета. Инженерно-технологии., 1 (2008) 68-75.

[5] Натареев О.С., Моделирование и расчет процесса сушки влажных материалов в камерной сушилке, Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Иваново – 2016.

[6] Гринчик Н.Н., Гишкелюк И.А., Кундае С.П., Моделирование тепломассопереноса и поверхностных явлений в капиллярно-пористых средах на основе уравнений двухфазной фильтрации и изотерм сорбции., Сборник научных статей «Современная Наука», № 2(7), 2001.

[7] Равшанов Н., Хужаев Ж.И. Фронт испарения в сферическом пористом теле // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. – Ташкент, ИМИТ, АН РУз, 2012. - вып. 128. – С. 84-99.

[8] Хужаев Ж.И. Моделирование процесса тепломассопереноса в пористых телах при наличии фронта испарения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. -Ташкент, 2015. - № 1. - С. 10-15.

[9] Маматов А.З. Моделирование технологии сушки хлопка-сырца с целью повышения качества волокна. – Автореф. дис... докт. техн. наук. - Ташкент, 1995. – 32 с.

[10] Парпиев А.П., Мардонов Б.М., Усманкулов А.К. Тепло- и массообменные процессы в хлопке-сырце и его компонентах. – Ташкент: Фан ва технология, 2013. – 219 с.

[11] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II: Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1975. – 552 с.

[12] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

[13] Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1977. - 736 с.

[14] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

[15] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

[16] Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.

[17] Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Труды МИ АН СССР. – Москва, 1949. – Т. 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).

[18] Хужаев Ж.И. Аппроксимации суточного изменения температуры окружающей среды // Перспективы эффективного развития информационных технологий и телекоммуникационных систем: Тез. докл. Республиканской научно-технической конференции. 13-14 марта 2014. Ч. 1. – Ташкент, 2014. – С. 157-160.