УДК 681.03/

ИНТЕРВАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТИПОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Назиров Ш.А.*, *Муминов Б.Б.

В данной статье разработано интервальное расширение структуры решения основных типов краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Ключевые слова: структуры решения, интервальное расширение, краевые задачи, метод R-функция.

Ушбу мақолада хусусий ҳосилали тўртинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг асосий чегаравий масалаларининг ечим тузилишини интервал арифметиканинг асосоий амалларини қўллаган ҳолда интервал кенгайтирилган ечимларининг тузилиши ишлаб чиқилган.

Таянч иборалар: ечим тузилиш, интервал кенгайтма, чегаравий масала, R-функция усули.

This article is designed interval extension structure basic types of solutions of boundary value problems for differential equations of the fourth order adopting major components interval arithmetic operations.

Keywords: structure solutions, interval arithmetic, boundary value problems, R-function method.

I. ВВЕДЕНИЕ

Метод R-функцией особенно широко применяется для решения краевых задач математической физики, выражающихся дифференциальными, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями, при помощи которых описываются математические модели различных физических, технических, механических и т.д. процессов [1]. Метод R-функций позволяет построить координатные последовательности, удовлетворяющие краевым условиям точно, без каких-либо аппроксимаций. Однако при решении систем дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений в частных производных высокого порядка из-за плохой обусловленности матрицы (полная матрица больших порядков, составленная в результате дискретизации по пространственным переменным с применением метода R-функций) теряется точность приближенного решения. Кроме того, подобные потери точности возникают в случаях, когда исходные данные задачи не точные, приближенно вычисляются значения интегралов и погрешности методов решения разрешающих уравнений и т.д.

Эти недостатки можно устранить при помощи интервального метода [2-4]. Отсюда следует необходимость разработки алгоритма сочетания метода R-функций и интервального метода для решения практических задач, которое будем называть интервально-значной R-функцией [5]. Поэтому здесь строятся интервальные расширения для структурных формул, построенные для основных типов краевых задач поперечного изгиба тонких пластин, что описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка.

II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Построении интервальные расширения структурных формулы

Для простоты изложения рассмотрим задачи о поперечном изгибе тонких пластин [9]:

$$D\Delta^2 u = q \qquad (1),$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\vartheta^2)}$ - цилиндрическая жесткость пластина, h - толщина пластины, E – модуль юнга, ϑ- коэффициент Пуассона, q – поперечные нагрузка, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, u - прогиб пластины.

В задачах о поперечном изгибе тонких пластин на границе Г (или ее участках Γ_i) задается по два краевых условия.

1.Жестко защемленная пластина. На контуре пластины равны нулю прогибы и углы поворота:

$$u\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad (2)$$

Здесь n нормаль к Г. В этом случае можно использовать следующее структурные формулы [1]:

$$u = \omega^2 \Phi \qquad (3)$$

При этом предполагается, что $|\nabla\omega| > 0$ на Г. На практике встречаются варианты жесткого защемления с поперечными смещениями и поворотами кромки пластины. Для него вместо краевых условий (2) есть условия

$$u\Big|_{\Gamma} = \varphi_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \psi_0 \qquad (4)$$

,

где φ_0, ψ_0 — заданные функции на Г. Обозначив продолжения в область Г как $EC\varphi_0 = \varphi, EC\psi_0 = \psi$, ($EC$ - оператор склеивания граничных значений) продолжим в Г и также в структуры решения краевой задачи (1), (3).

Построение вида полинома метода R-функций имеет вид [1]:

$$u = \varphi + \omega\psi - \omega D_1\varphi + \omega^2\Phi \qquad (5)$$

где Φ – неопределенная функция, D_1 – дифференциальный оператор, со следующим вида,

$$D_1 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad (6)$$

и ω – уравнение границы области, со следующим вида,

$$\omega = \begin{cases} > 0, & (x,y) \in \Omega \\ = 0, & (x,y) \in \Gamma \\ < 0 & (x,y) \in \Gamma \cup \Omega \end{cases},$$

Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решения (5):

$$\left[\underline{u},\bar{u}\right] = \left[\underline{\varphi},\bar{\varphi}\right] + \left[\underline{\omega},\bar{\omega}\right]\left[\underline{\psi},\bar{\psi}\right] - \left[\underline{\omega},\bar{\omega}\right]D_1\left[\underline{\varphi},\bar{\varphi}\right] + \left[\underline{\omega},\bar{\omega}\right]^2\left[\underline{\Phi},\bar{\Phi}\right] =$$
$$= \left[\underline{\varphi},\bar{\varphi}\right] + [\min\{L\}, max\{L\}] - [min\{L_1\}, \max\{L_1\}] + [min\{L_2\}, max\{L_2\}] =$$
$$= \left[\underline{\varphi} + \min\{L\} - \max\{L_1\} + min\{L_2\}, \bar{\varphi} + max\{L\} - min\{L_1\} + max\{L_2\}\right]$$

и получаем

$$\left[\underline{u},\bar{u}\right] = \left[\underline{\varphi} + \min\{L\} - \max\{L_1\} + min\{L_2\}, \bar{\varphi} + max\{L\} - min\{L_1\} + max\{L_2\}\right]. \qquad (7)$$

Формула (7) является интервальной в структуре решения краевой задачи (4).

Здесь $L = \left\{\underline{\omega}\underline{\psi}, \bar{\omega}\underline{\psi}, \underline{\omega}\bar{\psi}, \bar{\omega}\bar{\psi}\right\}$, $L_1 = \left\{\underline{\omega}D_1\underline{\varphi}, \bar{\omega}D_1\underline{\varphi}, \underline{\omega}D_1\bar{\varphi}, \bar{\omega}D_1\bar{\varphi}\right\}$ $L_2 = \left\{\underline{\omega}^2\underline{\Phi}, \bar{\omega}^2\underline{\Phi}, \underline{\omega}^2\bar{\Phi}, \bar{\omega}^2\bar{\Phi}\right\}$, $\left[\underline{\Phi},\bar{\Phi}\right]$ - неопределенная интервальная функция.

Свободно опертая пластина. Для нее краевые условия имеют вид

$$u\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + v_0\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad (8)$$

где n_0 и τ - направления нормали и касательной к Г соответственно.

Как было показано в [1], эти условия можно написать также в виде

$$u\Big|_{\Gamma}=0, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{v_0}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\Big|_{\Gamma}=0 \qquad (9)$$

где p - радиус кривизны Г.

В структуре решения краевой задачи (1), (9) построение вида полинома метода R-функции имеет вид [1]:

$$u=\omega\Phi_1-\frac{\omega^2}{2}\left[D_2(\omega\Phi_1)+v_0T_2(\omega\Phi_1)-\omega\Phi_2\right] \qquad (10)$$

где Φ_1,Φ_2 - неопределенные функции и D_2,T_2 – дифференциальные операторы следующего вида [1],

$$D_2u=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2u=\sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (11)$$

$$T_2u=\sum_{i=0}^{2}(-1)^{2-i}C_m^i\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{m-i}\partial x_2^{i}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^i\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^{m-i} \qquad (12)$$

Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решения (9):

$$[\underline{u},\bar{u}]=[\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]-\frac{[\underline{\omega},\bar{\omega}]^2}{2}\times$$
$$\times\left[D_2\left([\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right)+v_0T_2\left([\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right)-\left([\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]\right)\right]. \qquad (13)$$

принимая во внимание, что

$$[\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right],$$

где $\underline{X_1}=min\{X_1\}$, $\overline{X_1}=max\{X_1\}$, $X_1=\left\{\underline{\omega}\,\underline{\Phi_1},\underline{\omega}\,\overline{\Phi_1},\bar{\omega}\,\underline{\Phi_1},\bar{\omega}\overline{\Phi_1}\right\}$,

$$\frac{[\underline{\omega},\bar{\omega}]^2}{2}=\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right],$$

где $\underline{a_1}=min\{a_1\}$, $\overline{a_1}=max\{a_1\}$, $a_1=\left\{\frac{1}{2}\underline{\omega}^2,\frac{1}{2}\bar{\omega}^2\right\}$,

$$D_2\left([\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right)=[\underline{\omega},\bar{\omega}]D_2\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]D_2[\underline{\omega},\bar{\omega}]=\left[\underline{X_2},\overline{X_2}\right],$$

$$\text{где} \quad [\underline{\omega},\overline{\omega}]D_2\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] = \left[\underline{X_5},\overline{X_5}\right], \left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]D_2[\underline{\omega},\overline{\omega}] = \left[\underline{X_6},\overline{X_6}\right],$$

$$\underline{X_5} = min\{X_5\}, \overline{X_5} = max\{X_5\}, X_5 = \left\{\underline{\omega}D_2\,\underline{\Phi_1}, \underline{\omega}\,D_2\overline{\Phi_1}, \overline{\omega}D_2\,\underline{\Phi_1}, \overline{\omega}D_2\overline{\Phi_1}\right\},$$

$$\underline{X_6} = min\{X_6\}, \overline{X_6} = max\{X_6\}, X_6 = \left\{\underline{\Phi_1}D_2\underline{\omega}, \overline{\Phi_1}\,D_2\underline{\omega}\,, \underline{\Phi_1}\,D_2\overline{\omega}, \overline{\Phi_1}\,D_2\overline{\omega}\right\},$$

$$\left[\underline{X_2},\overline{X_2}\right] = \left[\underline{X_5}\,,\overline{X_5}\right] + \left[\underline{X_6},\overline{X_6}\right] = \left[\underline{X_5} + \underline{X_6}, \overline{X_5} + \overline{X_6}\right],$$

$$v_0T_2\left([\underline{\omega},\overline{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right) = v_0[\underline{\omega},\overline{\omega}]T_2\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] + v_0\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]T_2[\underline{\omega},\overline{\omega}] = \left[\underline{X_3},\overline{X_3}\right],$$

$$\text{где} \quad v_0[\underline{\omega},\overline{\omega}]T_2\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] = \left[\underline{X_7},\overline{X_7}\right], v_0\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]T_2[\underline{\omega},\overline{\omega}] = \left[\underline{X_8},\overline{X_8}\right],$$

$$\underline{X_7} = min\{X_7\}, \overline{X_7} = max\{X_7\}, X_7 = \left\{v_0\underline{\omega}T_2\,\underline{\Phi_1}, v_0\underline{\omega}\,T_2\overline{\Phi_1}, v_0\overline{\omega}T_2\,\underline{\Phi_1}, v_0\overline{\omega}T_2\overline{\Phi_1}\right\},$$

$$\underline{X_6} = min\{X_6\}, \overline{X_6} = max\{X_6\}, X_6 = \left\{v_0\underline{\Phi_1}D_2\underline{\omega}, v_0\overline{\Phi_1}\,D_2\underline{\omega}\,, v_0\,\underline{\Phi_1}D_2\overline{\omega}, v_0\overline{\Phi_1}D_2\overline{\omega}\right\},$$

$$[\underline{\omega},\overline{\omega}]\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right] = \left[\underline{X_4},\overline{X_4}\right],$$

$$\text{где} \quad \underline{X_4} = min\{X_4\}, \overline{X_4} = max\{X_4\}, X_4 = \left\{\underline{\omega}\,\underline{\Phi_2}, \underline{\omega}\,\overline{\Phi_2}, \overline{\omega}\,\underline{\Phi_2}, \overline{\omega}\overline{\Phi_2}\right\},$$

и получаем

$$[\underline{u},\overline{u}] = \left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right] - \left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\left[\underline{X_2},\overline{X_2}\right] + \left[\underline{X_3},\overline{X_3}\right] - \left[\underline{X_4},\overline{X_4}\right]\right]. \qquad (14)$$

принимая во внимание, что

$$\left[\underline{X_2},\overline{X_2}\right] + \left[\underline{X_3},\overline{X_3}\right] - \left[\underline{X_4},\overline{X_4}\right] = \left[\underline{X_9},\overline{X_9}\right],$$

$$\text{где} \quad \left[\underline{X_9},\overline{X_9}\right] = \left[\underline{X_2} + \underline{X_3} - \overline{X_4}, \overline{X_2} + \overline{X_3} - \underline{X_4}\right],$$

$$\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_9},\overline{X_9}\right] = \left[\underline{X_{10}},\overline{X_{10}}\right],$$

$$\text{где} \quad \underline{X_{10}} = min\{X_{10}\}, \overline{X_{10}} = max\{X_{10}\}, X_{10} = \left\{\underline{a_1}\,\underline{X_9}, \underline{a_1}\,\overline{X_9}, \overline{a_1}\,\underline{X_9}, \overline{a_1}\overline{X_9}\right\},$$

и получаем

$$[\underline{u},\overline{u}] = \left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right] - \left[\underline{X_{10}},\overline{X_{10}}\right] = \left[\underline{X_1} - \overline{X_{10}}, \overline{X_1} - \underline{X_{10}}\right] \qquad (15)$$

или

$$[\underline{u},\overline{u}] = \left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right] - \left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_2},\overline{X_2}\right] - \left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_3},\overline{X_3}\right] + \left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_4},\overline{X_4}\right]. \qquad (16)$$

Принимая во внимание, что

$$\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_2},\overline{X_2}\right] = \left[\underline{X_{11}},\overline{X_{11}}\right],$$

$$\text{где} \quad \underline{X_{11}} = min\{X_{11}\}, \overline{X_{11}} = max\{X_{11}\}, X_{11} = \left\{\underline{a_1}\,\underline{X_2}, \underline{a_1}\,\overline{X_2}, \overline{a_1}\,\underline{X_2}, \overline{a_1}\overline{X_2}\right\},$$

$$\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_3},\overline{X_3}\right]=\left[\underline{X_{12}},\overline{X_{12}}\right],$$

где $\underline{X_{12}} = min\{X_{12}\}, \overline{X_{12}} = max\{X_{12}\}, X_{12} = \left\{\underline{a_1}\ \underline{X_3}, \underline{a_1}\ \overline{X_3}, \overline{a_1}\ \underline{X_3}, \overline{a_1}\overline{X_3}\right\},$

$$\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{X_4},\overline{X_4}\right]=\left[\underline{X_{13}},\overline{X_{13}}\right],$$

где $\underline{X_{13}} = min\{X_{13}\}, \overline{X_{13}} = max\{X_{13}\}, X_{13} = \left\{\underline{a_1}\ \underline{X_4}, \underline{a_1}\ \overline{X_4}, \overline{a_1}\ \underline{X_4}, \overline{a_1}\overline{X_4}\right\},$

и получаем

$$[\underline{u},\bar{u}]=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right]-\left[\underline{X_{11}},\overline{X_{11}}\right]-\left[\underline{X_{12}},\overline{X_{12}}\right]+\left[\underline{X_{13}},\overline{X_{13}}\right]=$$
$$=\left[\underline{X_1}-\overline{X_{11}}-\overline{X_{12}}+\underline{X_{13}},\overline{X_1}-\underline{X_{11}}-\underline{X_{12}}+\overline{X_{13}}\right] \qquad (17)$$

В интервальном расширении структуры (15), (17), $\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]$, $\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]$ - неопределенная интервальная функция, D_2, T_2 – дифференциальный операторы вида (11) и (12).

3.Упруго закрепленные пластины. Для них функция прогибов u удовлетворяет на Г краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma}=0, \qquad (18)$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+\left(\frac{1-\upsilon_0}{\rho_0}+k_0\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma}=0 \qquad (19)$$

где ρ_0 - радиус кривизны границы Г, а k_0 - жесткость заделки на изгиб.

Структуры решение краевой задачи (1), (18) и (19) построение вида полинома метода R-функции имеет вид [1]:

$$u=\omega\Phi_1+\frac{1}{2}\omega^3\Phi_2-\frac{1}{2}\omega^2[\Phi_1(D_2\omega+\upsilon_0T_2\omega+k)+2D_1\Phi_1] \qquad (20)$$

где Φ_1, Φ_2- неопределенной функции и D_2, T_2, D_1 – дифференциальный операторы вида (11) и (12), (6).

Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение в структуре решения (20):

$$[\underline{u},\bar{u}]=[\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+\frac{1}{2}[\underline{\omega},\bar{\omega}]^3\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}[\underline{\omega},\bar{\omega}]^2\left[\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right](D_2[\underline{\omega},\bar{\omega}]+\upsilon_0\mathrm{T}_2[\underline{\omega},\bar{\omega}]+k)+2D_1\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right] \qquad (21)$$

учитывая, что

$$[\underline{\omega},\overline{\omega}]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right],\ \frac{1}{2}[\underline{\omega},\overline{\omega}]^2=\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right],$$

$$\frac{1}{2}[\underline{\omega},\overline{\omega}]^3\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]=\left[\underline{X_{14}},\overline{X_{14}}\right],\text{ где } \underline{X_{14}}=min\{X_{14}\},\ \overline{X_{14}}=max\{X_{14}\},$$

$$X_{14}=\left\{\frac{1}{2}\underline{\omega}^3\underline{\Phi_2},\frac{1}{2}\underline{\omega}^3\ \overline{\Phi_2},\frac{1}{2}\overline{\omega}^3\ \underline{\Phi_2},\frac{1}{2}\overline{\omega}^3\overline{\Phi_2}\right\},$$

и получаем (20) в виде:

$$[\underline{u},\overline{u}]=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right]+\left[\underline{X_{14}},\overline{X_{14}}\right]-\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]$$

$$\left[\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\left([D_2\,\underline{\omega},D_2\overline{\omega}]+[\upsilon_0\mathrm{T}_2\underline{\omega},\upsilon_0\mathrm{T}_2\overline{\omega}]+k\right)+\left[2D_1\underline{\Phi_1},2D_1\overline{\Phi_1}\right]\right] \qquad (22)$$

или

$$[\underline{u},\overline{u}]=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right]+\left[\underline{X_{14}},\overline{X_{14}}\right]-\left[\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right][D_2\,\underline{\omega},D_2\overline{\omega}]+\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right.$$

$$\left.[\upsilon_0\mathrm{T}_2\underline{\omega},\upsilon_0\mathrm{T}_2\overline{\omega}]+\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]k+\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[2D_1\underline{\Phi_1},2D_1\overline{\Phi_1}\right]\right] \qquad (23)$$

принимая во внимание, что

$$\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{W_1},\overline{W_1}\right],$$

где $\underline{W_1}=min\{W_1\},\ \overline{W_1}=max\{W_1\},\ W_1=\left\{\underline{a_1}\ \underline{\Phi_1},\underline{a_1}\ \overline{\Phi_1},\overline{a_1}\ \underline{\Phi_1},\overline{a_1}\overline{\Phi_1}\right\},$

$$\left[\underline{W_1},\overline{W_1}\right][D_2\,\underline{\omega},D_2\overline{\omega}]=\left[\underline{W_2},\overline{W_2}\right],$$

где $\underline{W_2}=min\{W_2\},\ \overline{W_2}=max\{W_2\},\ W_2=\left\{\underline{W_1}\ D_2\,\underline{\omega},\underline{W_1}\ D_2\overline{\omega},\overline{W_1}\ D_2\,\underline{\omega},\overline{W_1}D_2\overline{\omega}\right\},$

$$\left[\underline{W_1},\overline{W_1}\right][\upsilon_0\mathrm{T}_2\underline{\omega},\upsilon_0\mathrm{T}_2\overline{\omega}]=\left[\underline{W_3},\overline{W_3}\right],\text{ где } \underline{W_3}=min\{W_3\},\ \overline{W_3}=max\{W_3\},$$

$$W_3=\left\{\underline{W_1}\ \upsilon_0\mathrm{T}_2\underline{\omega},\underline{W_1}\ \upsilon_0\mathrm{T}_2\overline{\omega},\overline{W_1}\ \upsilon_0\mathrm{T}_2\underline{\omega},\overline{W_1}\upsilon_0\mathrm{T}_2\overline{\omega}\right\},$$

$$\left[\underline{W_1},\overline{W_1}\right]k=\left[k\underline{W_1},k\overline{W_1}\right]=\left[\underline{W_4},\overline{W_4}\right],\left[\underline{a_1},\overline{a_1}\right]\left[2D_1\underline{\Phi_1},2D_1\overline{\Phi_1}\right]\Big]=\left[\underline{W_5},\overline{W_5}\right],$$

где $\underline{W_5}=min\{W_5\},\ \overline{W_5}=max\{W_5\},\ W_5=\left\{\underline{a_1}2D_1\ \underline{\Phi_1},\underline{a_1}2D_1\ \overline{\Phi_1},\overline{a_1}\ 2D_1\underline{\Phi_1},\overline{a_1}2D_1\overline{\Phi_1}\right\},$

и получаем (23) в виде:

$$[\underline{u},\overline{u}]=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right]+\left[\underline{X_{14}},\overline{X_{14}}\right]-\left[\left[\underline{W_2},\overline{W_2}\right]+\left[\underline{W_3},\overline{W_3}\right]+\left[\underline{W_4},\overline{W_4}\right]+\left[\underline{W_5},\overline{W_5}\right]\right]=$$

$$=\left[\underline{X_1},\overline{X_1}\right]+\left[\underline{X_{14}},\overline{X_{14}}\right]-\left[\underline{W_2},\overline{W_2}\right]-\left[\underline{W_3},\overline{W_3}\right]-\left[\underline{W_4},\overline{W_4}\right]-\left[\underline{W_5},\overline{W_5}\right]=$$

$$\left[\underline{X_1}+\underline{X_{14}}-\overline{W_2}-\overline{W_3}-\overline{W_4}-\overline{W_5},\overline{X_1}+\overline{X_{14}}-\underline{W_2}-\underline{W_3}-\underline{W_4}-\underline{W_5}\right] \qquad (24)$$

В интервальном расширении структуры (21)-(24), $\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]$, $\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]$ - неопределенная интервальная функции, D_2,T_2,D_1 – дифференциальный операторы вида (11) и (12), (3).

4. Частично жестко защемленные и частично упруго закрепленные пластины. Пусть контур Г пластины состоит из двух непересекающихся частей $Г_1$ и $Г_2$, на первой из которых пластина жестко защемлена, а на второй - упруго закреплена. Краевые условия в этом случае имеют вид

$$u\Big|_{\Gamma_1}=0;\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1}=0; \tag{25}$$

$$u\Big|_{\Gamma_2}=0;\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+\left(\frac{1-\upsilon_0}{\rho_0}+k_0\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_2}=0, \tag{26}$$

где υ_0, ρ_0 и k_0 есть соответственно коэффициент Пуассона, радиус кривизны $Г_2$ и жесткость закрепления пластины. Как и ранее, будем обозначать $\mathrm{EC}\rho_0^{-1}=\rho^{-1}$, $\mathrm{EC}k_0=k$ (ЕС - оператор продолжения граничных значений).

Структуры решение краевой задачи (1), (24) и (25) построение вида полинома метода R-функции имеет вид [1]:

$$u=\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+\omega_2^2}\left\{\omega_2\Phi_1+\omega_2^3\Phi_2-\frac{\omega_2^2}{2}\left[\Phi_1\left(D_2^{(2)}\omega_2+\upsilon_0T_2^{(2)}\omega_2+k\right)+2D_1^{(2)}\Phi_1\right]\right\} \tag{27}$$

где Φ_1, Φ_2 - неопределенной функции и D_2, T_2, D_1 – дифференциальный операторы вида (11) и (12), (6).

Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение в структуре решения (27):

$$[\underline{u},\overline{u}]=\frac{\left[\underline{\omega_1},\overline{\omega_1}\right]^2}{\left(\left[\underline{\omega_1},\overline{\omega_1}\right]^2+\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^2\right)}\left\{\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^3\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^2}{2}\left[\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\left(D_2^{(2)}\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]+\upsilon_0T_2^{(2)}\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]+k\right)+2D_1^{(2)}\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right]\right\} \tag{28}$$

или

$$[\underline{u},\overline{u}]=\frac{\left[\underline{\omega_1},\overline{\omega_1}\right]^2}{\left(\left[\underline{\omega_1},\overline{\omega_1}\right]^2+\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^2\right)}\left\{\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^3\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]-\right.$$
$$-\frac{\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^2}{2}\left[D_2^{(2)}\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+\upsilon_0T_2^{(2)}\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+k\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]+\right.$$
$$\left.\left.+2D_1^{(2)}\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]\right]\right\} \tag{29}$$

принимая во внимание, что

$$\frac{\left[\underline{\omega_1},\overline{\omega_1}\right]^2}{\left(\left[\underline{\omega_1},\overline{\omega_1}\right]^2+\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^2\right)}=\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right],$$

где $\underline{B_1}=\min\{B_1\},\overline{B_1}=max\{B_1\},$

$$B_1=\left\{\underline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\underline{\omega_1^2}+\underline{\omega_2^2}\right)},\underline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\overline{\omega_1^2}+\overline{\omega_2^2}\right)},\overline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\underline{\omega_1^2}+\underline{\omega_2^2}\right)},\overline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\overline{\omega_1^2}+\overline{\omega_2^2}\right)}\right\}$$

$$\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{B_2},\overline{B_2}\right],$$

где $\underline{B_2}=\min\{B_2\},\overline{B_2}=max\{B_2\},B_2=\left\{\underline{\omega_2\Phi_1},\underline{\omega_2}\overline{\Phi_1},\overline{\omega_2}\underline{\Phi_1},\overline{\omega_2}\overline{\Phi_1}\right\},$

$$\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^3\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]=\left[\underline{B_3},\overline{B_3}\right],$$

где $\underline{B_3}=\min\{B_3\},\overline{B_3}=max\{B_3\},B_3=\left\{\underline{\omega_2^3\Phi_2},\underline{\omega_2^3}\overline{\Phi_2},\overline{\omega_2^3}\underline{\Phi_2},\overline{\omega_2^3}\overline{\Phi_2}\right\},$

$$\frac{\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]^2}{2}=\frac{\left[\underline{\omega_2^2},\overline{\omega_2^2}\right]}{2}=\left[\frac{\underline{\omega_2^2}}{2},\frac{\overline{\omega_2^2}}{2}\right]=\left[\underline{b},\overline{b}\right],\qquad D_2^{(2)}\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{B_4},\overline{B_4}\right],$$

где $\underline{B_4}=\min\{B_4\},\overline{B_4}=max\{B_4\},B_4=\left\{D_2^{(2)}\underline{\omega_2\Phi_1},D_2^{(2)}\underline{\omega_2}\overline{\Phi_1},D_2^{(2)}\overline{\omega_2}\underline{\Phi_1},D_2^{(2)}\overline{\omega_2}\overline{\Phi_1}\right\},$

$$\upsilon_0T_2^{(2)}\left[\underline{\omega_2},\overline{\omega_2}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{B_5},\overline{B_5}\right],$$

где

$\underline{B_5}=\min\{B_5\},\overline{B_5}=max\{B_5\},B_5=\left\{\upsilon_0T_2^{(2)}\underline{\omega_2\Phi_1},\upsilon_0T_2^{(2)}\underline{\omega_2}\overline{\Phi_1},\upsilon_0T_2^{(2)}\overline{\omega_2}\underline{\Phi_1},\upsilon_0T_2^{(2)}\overline{\omega_2}\overline{\Phi_1}\right\},$

$$k\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{k\Phi_1},k\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{B_6},\overline{B_6}\right],$$

$$2D_1^{(2)}\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]=\left[2D_1^{(2)}\underline{\Phi_1},2D_1^{(2)}\overline{\Phi_1}\right]=\left[\underline{B_7},\overline{B_7}\right],$$

и получаем (28) в виде:

$$\left[\underline{u},\overline{u}\right]=\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left\{\left[\underline{B_2},\overline{B_2}\right]+\left[\underline{B_3},\overline{B_3}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\left[\underline{B_4},\overline{B_4}\right]+\left[\underline{B_5},\overline{B_5}\right]+\left[\underline{B_6},\overline{B_6}\right]+\left[\underline{B_7},\overline{B_7}\right]\right]\right\}\qquad(30)$$

или

$$\left[\underline{u},\overline{u}\right]=\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{B_2},\overline{B_2}\right]+\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{B_3},\overline{B_3}\right]-\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_4},\overline{B_4}\right]-$$
$$-\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_5},\overline{B_5}\right]-\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_6},\overline{B_6}\right]-\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_7},\overline{B_7}\right]\qquad(31).$$

Принимая во внимание, что

$$\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{B_2},\overline{B_2}\right]=\left[\underline{C_1},\overline{C_1}\right],$$

где $\underline{C_1}=\min\{C_1\},\overline{C_1}=max\{C_1\},C_1=\left\{\underline{B_1B_2},\underline{B_1}\overline{B_2},\overline{B_1}\underline{B_2},\overline{B_1}\overline{B_2}\right\},$

$$\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{B_3},\overline{B_3}\right]=\left[\underline{C_2},\overline{C_2}\right],$$

где $\underline{C_2} = \min\{C_2\}, \overline{C_2} = max\{C_2\}, C_2 = \left\{\underline{B_1}\underline{B_3}, \underline{B_1}\overline{B_3}, \overline{B_1}\underline{B_3}, \overline{B_1}\overline{B_3}\right\}$,

$$\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_4},\overline{B_4}\right] = \left[\underline{C_3},\overline{C_3}\right],$$

где $\underline{C_3} = \min\{C_3\}, \overline{C_3} = max\{C_3\}, C_3 = \left\{\underline{A_1}\underline{B_4}, \underline{A_1}\overline{B_4}, \overline{A_1}\underline{B_4}, \overline{A_1}\overline{B_4}\right\}$,

$\underline{A_1} = min\{A_1\}, \quad \overline{A_1} = max\{A_1\}, \quad A_1 = \left\{\underline{B_1}\underline{b}, \underline{B_1}\overline{b}, \overline{B_1}\underline{b}, \overline{B_1}\overline{b}\right\}$,

$$\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_5},\overline{B_5}\right] = \left[\underline{C_4},\overline{C_4}\right],$$

где $\underline{C_4} = \min\{C_4\}, \overline{C_4} = max\{C_4\}, C_4 = \left\{\underline{A_1}\underline{B_5}, \underline{A_1}\overline{B_5}, \overline{A_1}\underline{B_5}, \overline{A_1}\overline{B_5}\right\}$,

$$\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_6},\overline{B_6}\right] = \left[\underline{C_5},\overline{C_5}\right],$$

где $\underline{C_5} = \min\{C_5\}, \overline{C_5} = max\{C_5\}, C_5 = \left\{\underline{A_1}\underline{B_6}, \underline{A_1}\overline{B_6}, \overline{A_1}\underline{B_6}, \overline{A_1}\overline{B_6}\right\}$,

$$\left[\underline{B_1},\overline{B_1}\right]\left[\underline{b},\overline{b}\right]\left[\underline{B_7},\overline{B_7}\right] = \left[\underline{C_6},\overline{C_6}\right],$$

где $\underline{C_6} = \min\{C_6\}, \overline{C_6} = max\{C_6\}, C_6 = \left\{\underline{A_1}\underline{B_7}, \underline{A_1}\overline{B_7}, \overline{A_1}\underline{B_7}, \overline{A_1}\overline{B_7}\right\}$,

и получаем (30) в виде:

$$[\underline{u},\overline{u}] = \left[\underline{C_1},\overline{C_1}\right] + \left[\underline{C_2},\overline{C_2}\right] - \left[\underline{C_3},\overline{C_3}\right] - \left[\underline{C_4},\overline{C_4}\right] - \left[\underline{C_5},\overline{C_5}\right] - \left[\underline{C_6},\overline{C_6}\right] \qquad (32)$$

или

$$[\underline{u},\overline{u}] = \left[\underline{C_1} + \underline{C_2} - \overline{C_3} - \overline{C_4} - \overline{C_5} - \overline{C_5}, \overline{C_1} + \overline{C_2} - \underline{C_3} - \underline{C_4} - \underline{C_5} - \underline{C_6}\right] \qquad (33)$$

В интервальном расширении структуры (28), (30), (32), $\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right], \left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]$ – неопределенная интервальная функции, D_2, T_2, D_1 – дифференциальный операторы вида (11) и (12), (6).

5. Пластины, частично жестко защемленные и частично свободные. Пусть Γ_1 - участок границы Γ, по которому пластина жестко защемлена, а остальная часть границы $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ - свободна. Краевые условия в этом случае имеют вид:

$$u\Big|_{\Gamma_1} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0; \qquad (34)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \upsilon_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0; \qquad (35)$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} + (2 - \upsilon_0)\frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \tau^2}\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0. \qquad (36)$$

Структуры решения краевой задачи (1), (34), (35) и (36) построение вида полинома метода R-функции имеет вид [1]:

$$u = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^4}\left\{\omega_2^4 \Phi_2 + \Phi_1 - \frac{\omega_2^3}{6}\left[D_3^{(2)} + (2 - \upsilon_0)\left(D_1^{(2)} T_2^{(2)}\right)\right]\{\Phi_1 - [\omega_2^2 D_2^{(2)} \Phi_1 + \right.$$
$$\left. + \upsilon_0 T_2^{(2)} \Phi_1]\} - \frac{\omega_2^3}{2}\left[D_2^{(2)} \Phi_1 - \upsilon_0 T_2^{(2)} \Phi_1\right]\right\} \qquad (37)$$

где Φ_1, Φ_2 - неопределенной функции и D_2, T_2, D_1 – дифференциальный операторы вида (11) и (12), (3), D_3 – дифференциальный оператор, со следующим вида [1],

$$D_3 u = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^3 u = \sum_{|\alpha|=3} \frac{3}{\alpha!}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (38)$$

и применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решение (37):

$$[\underline{u}, \bar{u}] = \frac{\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]^2}{\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]^2 + \left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^4}$$
$$\left\{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^4 \left[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}\right] + \left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] - \frac{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^3}{6}\left[D_3^{(2)} + (2 - \upsilon_0)\left(D_1^{(2)} T_2^{(2)}\right)\right]\right.$$
$$\left\{\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] - \left[\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^2 D_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) + \upsilon_0 \left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^2 T_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right)\right]\right\} -$$
$$\left. - \frac{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^3}{2}\left[D_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) - \upsilon_0 T_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right)\right]\right\}. \qquad (39)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]^2}{\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]^2 + \left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^4} = \left[\underline{V_1}, \overline{V_1}\right], \quad \text{где} \quad \underline{V_1} = \min\{V_1\}, \overline{V_1} = max\{V_1\},$$

$$V_1 = \left\{\underline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\underline{\omega_1^2} + \underline{\omega_2^4}\right)}, \underline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^4}\right)}, \overline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\underline{\omega_1^2} + \underline{\omega_2^4}\right)}, \overline{\omega_1^2}\frac{1}{\left(\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^4}\right)}\right\},$$

$$\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^4 \left[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}\right] = \left[\underline{V_2}, \overline{V_2}\right],$$

где $\underline{V_2} = \min\{V_2\}, \overline{V_2} = max\{V_2\}, V_2 = \{\underline{\omega_2^4}\underline{\Phi_2}, \underline{\omega_2^4}\overline{\Phi_2}, \overline{\omega_2^4}\underline{\Phi_2}, \overline{\omega_2^4}\overline{\Phi_2}\},$

$$D_3^{(2)}\frac{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^3}{6} = \left[D_3^{(2)}\frac{\underline{\omega_2^3}}{6}, D_3^{(2)}\frac{\overline{\omega_2^4}}{6}\right] = \left[\underline{V_3}, \overline{V_3}\right],$$

$$(2-\upsilon_0)\left(D_1^{(2)}T_2^{(2)}\right)\frac{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^3}{6} =$$

$$= \left[\frac{(2-\upsilon_0)\left(D_1^{(2)}T_2^{(2)}\right)\underline{\omega_2^3}}{6}, \frac{(2-\upsilon_0)\left(D_1^{(2)}T_2^{(2)}\right)\overline{\omega_2^3}}{6}\right] = \left[\underline{V_4}, \overline{V_4}\right],$$

$$\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^2 D_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) == \left[\underline{V_5}, \overline{V_5}\right],$$

где $\underline{V_5} = \min\{V_5\}, \overline{V_5} = max\{V_5\}, V_5 = \{\underline{\omega_2^2}D_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \underline{\omega_2^2}D_2^{(2)}\overline{\Phi_1}, \overline{\omega_2^2}D_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \overline{\omega_2^2}D_2^{(2)}\overline{\Phi_1}\},$

$$\upsilon_0\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^2 T_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) = \left[\underline{V_6}, \overline{V_6}\right],$$

где

$\underline{V_6} = \min\{V_6\}, \overline{V_6} = max\{V_6\}, V_6 = \{\upsilon_0\underline{\omega_2^2}T_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \upsilon_0\underline{\omega_2^2}T_2^{(2)}\overline{\Phi_1}, \upsilon_0\overline{\omega_2^2}T_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \upsilon_0\overline{\omega_2^2}T_2^{(2)}\overline{\Phi_1}\},$

$$\frac{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^3}{2}D_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) = \left[\underline{V_7}, \overline{V_7}\right],$$

где $\underline{V_7} = \min\{V_7\}, \overline{V_7} = max\{V_7\}, V_7 = \left\{\frac{\underline{\omega_2^3}}{2}D_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \frac{\underline{\omega_2^3}}{2}D_2^{(2)}\overline{\Phi_1}, \frac{\overline{\omega_2^3}}{2}D_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \frac{\overline{\omega_2^3}}{2}D_2^{(2)}\overline{\Phi_1}\right\},$

$$\upsilon_0\frac{\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]^3}{2}T_2^{(2)}\left(\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) = \left[\underline{V_8}, \overline{V_8}\right],$$

где

$\underline{V_8} = \min\{V_8\}, \overline{V_8} = max\{V_8\}, V_8 = \left\{\upsilon_0\frac{\underline{\omega_2^3}}{2}T_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \upsilon_0\frac{\underline{\omega_2^3}}{2}T_2^{(2)}\overline{\Phi_1}, \upsilon_0\frac{\overline{\omega_2^3}}{2}T_2^{(2)}\underline{\Phi_1}, \upsilon_0\frac{\overline{\omega_2^3}}{2}T_2^{(2)}\overline{\Phi_1}\right\},$

и получаем (39) в виде:

$$\left[\underline{u}, \overline{u}\right] = \left[\underline{V_1}, \overline{V_1}\right]\left\{\left[\underline{V_2}, \overline{V_2}\right] + \left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] - \left[\underline{V_3}, \overline{V_3}\right] - \left[\underline{V_4}, \overline{V_4}\right]\left\{\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] - \left[\underline{V_5}, \overline{V_5}\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left[\underline{V_6}, \overline{V_6}\right]\right\} - \left[\underline{V_7}, \overline{V_7}\right] + \left[\underline{V_8}, \overline{V_8}\right]\right\} \qquad (40)$$

или

$$[\underline{u},\bar{u}] = \left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_2},\overline{V_2}\right] + \left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] - \left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_3},\overline{V_3}\right] - \left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_4},\overline{V_4}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]$$

$$+\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_4},\overline{V_4}\right]\left[\underline{V_5},\overline{V_5}\right] +$$

$$+\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_4},\overline{V_4}\right]\left[\underline{V_6},\overline{V_6}\right] - \left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_7},\overline{V_7}\right] + \left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_8},\overline{V_8}\right] \qquad (41)$$

Принимая во внимание, что

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_2},\overline{V_2}\right] = \left[\underline{G_1},\overline{G_1}\right],$$

где $\underline{G_1} = \min\{G_1\}, G_1 = max\{G_1\}, G_1 = \left\{\underline{V_1}\underline{V_2}, \underline{V_1}\overline{V_2}, \overline{V_1}\underline{V_2}, \overline{V_1}\overline{V_2}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] = \left[\underline{G_2},\overline{G_2}\right],$$

где $\underline{G_2} = \min\{G_2\}, \overline{G_2} = max\{G_2\}, G_2 = \left\{\underline{V_1}\underline{\Phi_1}, \underline{V_1}\overline{\Phi_1}, \overline{V_1}\underline{\Phi_1}, \overline{V_1}\overline{\Phi_1}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_3},\overline{V_3}\right] = \left[\underline{G_3},\overline{G_3}\right],$$

где $\underline{G_3} = \min\{G_3\}, \overline{G_3} = max\{G_3\}, G_3 = \left\{\underline{V_1}\underline{V_3}, \underline{V_1}\overline{V_3}, \overline{V_1}\underline{V_3}, \overline{V_1}\overline{V_3}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_4},\overline{V_4}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] = \left[\underline{G_4},\overline{G_4}\right],$$

где $\underline{G_4} = \min\{G_4\}, \overline{G_4} = max\{G_4\}, G_4 = \left\{\underline{V_1}\underline{M_1}, \underline{V_1}\overline{M_1}, \overline{V_1}\underline{M_1}, \overline{V_1}\overline{M_1}\right\}$,

$\underline{M_1} = \min\{M_1\}, \overline{M_1} = max\{M_1\}, M_1 = \left\{\underline{V_4}\underline{\Phi_1}, \underline{V_4}\overline{\Phi_1}, \overline{V_4}\underline{\Phi_1}, \overline{V_4}\overline{\Phi_1}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_4},\overline{V_4}\right]\left[\underline{V_5},\overline{V_5}\right] = \left[\underline{G_5},\overline{G_5}\right],$$

где $\underline{G_5} = \min\{G_5\}, \overline{G_5} = max\{G_5\}, G_5 = \left\{\underline{V_1}\underline{M_2}, \underline{V_1}\overline{M_2}, \overline{V_1}\underline{M_2}, \overline{V_1}\overline{M_2}\right\}$,

$\underline{M_2} = \min\{M_2\}, \overline{M_2} = max\{M_2\}, M_2 = \left\{\underline{V_4}\underline{V_5}, \underline{V_4}\overline{V_5}, \overline{V_4}\underline{V_5}, \overline{V_4}\overline{V_5}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_4},\overline{V_4}\right]\left[\underline{V_6},\overline{V_6}\right] = \left[\underline{G_6},\overline{G_6}\right],$$

где $\underline{G_6} = \min\{G_6\}, \overline{G_6} = max\{G_6\}, G_6 = \left\{\underline{V_1}\underline{M_3}, \underline{V_1}\overline{M_3}, \overline{V_1}\underline{M_3}, \overline{V_1}\overline{M_3}\right\}$,

$\underline{M_3} = \min\{M_3\}, \overline{M_3} = max\{M_3\}, M_3 = \left\{\underline{V_4}\underline{V_6}, \underline{V_4}\overline{V_6}, \overline{V_4}\underline{V_6}, \overline{V_4}\overline{V_6}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_7},\overline{V_7}\right] = \left[\underline{G_7},\overline{G_7}\right],$$

где $\underline{G_7} = \min\{G_7\}, \overline{G_7} = max\{G_7\}, G_7 = \left\{\underline{V_1}\underline{V_7}, \underline{V_1}\overline{V_7}, \overline{V_1}\underline{V_7}, \overline{V_1}\overline{V_7}\right\}$,

$$\left[\underline{V_1},\overline{V_1}\right]\left[\underline{V_8},\overline{V_8}\right] = \left[\underline{G_8},\overline{G_8}\right],$$

где $\underline{G_8} = \min\{G_8\}, \overline{G_8} = max\{G_8\}, G_8 = \left\{\underline{V_1}\underline{V_8}, \underline{V_1}\overline{V_8}, \overline{V_1}\underline{V_8}, \overline{V_1}\overline{V_8}\right\}$, и получаем (41) в виде:

$$[\underline{u}, \overline{u}] = [\underline{G_1}, \overline{G_1}] + [\underline{G_2}, \overline{G_2}] - [\underline{G_3}, \overline{G_3}] - [\underline{G_4}, \overline{G_4}] + [\underline{G_5}, \overline{G_5}] + \\ + [\underline{G_6}, \overline{G_6}] - [\underline{G_7}, \overline{G_7}] + [\underline{G_8}, \overline{G_8}] \quad (42)$$

или

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{G_1} + \underline{G_2} - \overline{G_3} - \overline{G_4} + \underline{G_5} + \underline{G_6} - \overline{G_7} + \underline{G_8} \\ \overline{u} &= \overline{G_1} + \overline{G_2} - \underline{G_3} - \underline{G_4} + \overline{G_5} + \overline{G_6} - \underline{G_7} + \overline{G_8} \end{aligned} \quad (43)$$

В интервальном расширении структуры (40), (41), (42), $[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}]$, $[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}]$ – неопределенная интервальная функции, D_2, T_2, D_1, D_3 – дифференциальный операторы вида (11), (12), (6), и (38).

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены интервальные расширения структур решений основных типов краевых задач: жестко защемленная пластина, свободно опертая пластина, упруго закрепленные пластины, частично жестко защемленные и частично упруго закрепленные пластины, частично жестко защемленные и частично свободные пластины для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Полученные результаты можно использовать для построения интервально - значений структуры решения для других краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных различных порядка. Полученные решения легко реализуется в компьютерах.

Эта статья посвящается памяти профессора Шодмонкула Арзикуловича Назирова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения /. – Киев г Наук. думка, 1982.—552 с.

[2] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. –Новосибирск: Издательство «XYZ» Института вычислительных технологий, 2009. – 580 с.

[3] Фаддеева В. И. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Гостех» издать, 1950. -240 с

[4] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. - М.; Л. : Гостехиздат, 1950. - 695 с.

[5] Назиров Ш.А. Многомерная интервально - значная R-функция. // Вопросы вычислительной и прикладной математике. –Тошкент, 2011. - № 126. –С. 23-59

[6] Назиров Ш.А. Метод интервально-значных R-функций в задачах математического моделирования // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математике и информационных технологий Аль-Хорезми 2012», Том № 2, 19-22 декабрь, 2012 г. Ташкент. С. 65-70.
[7] Назиров Ш.А. Интервально-значные двух аргументные R-функции. Республиканская научно-методическая конференция «Современные информационные технологии в телекоммуникации и связи». Ташкент. 2011. С.15-20.
[8] Назиров Ш.А. Вычисления значений n-мерных дифференциальных кортежей многомерной интервально-значной функции. Вычислительные технологии. Новосибирск. 2014. Вып. 2.
[9] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.— М. : Физ-матгиз, 1963.— 635 с.
[10] Бондаренко Б. Л. Полигармонические полиномы.— Ташкент: Фан, 1968.—172 с.
[11] Калекин О. Ю. Об удовлетворении граничных условий для перфорированной цилиндрической оболочки.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1971, № 4, с. 365—368.
[12] Харрик И. Ю. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида.— Сиб. мат. журн., 1963, 4, № 2, с. 408—425.
[13] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.—511 с.
[14] Рвачев В. Л., Курпа Л. В., Склепус Н. Г., Учишвили Л. А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы.— Киев : Наук, думка. 1973.— 124 с.
[15] Schultz M. H. Rayleigh — Ritz — Galerkin methods for multidimensional problems.—SIAM J. Numer. Anal., 1969, 6, N 4, p. 523—538.