УДК 681.03

ИНТЕРВАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТИПОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Назиров Ш. А.*, *Муминов Б.Б.

В данной статье разработано интервальное расширение структуры решения основных типов краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка принятия основных операций составляющих интервальную арифметику. Для дифференциального уравнения (1) типа, при построении интервального расширения структуры формулы использованы структурные формулы построения с методом R-функций и изучено 4 задачи - задача Дирихле, задача Неймана, задача третьего типа, задача смешанные краевые условия. Для задачи Дирихле получено решение интервального расширения структуры в виде (5), где $P = \{\omega\underline{\Phi}, \omega\overline{\Phi}, \overline{\omega}\underline{\Phi}, \overline{\omega}\overline{\Phi}\}$ и $[\underline{\Phi}, \overline{\Phi}]$ - неопределенная интервальная функция. Для задачи Неймана получено решение в интервальном расширении структуры (10), (11), $[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}]$, $[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}]$ - неопределенная интервальная функция и D_1 – дифференциальный оператор вида (9). Для задачи третьего типа получено решение в интервальном расширении структуры (16), (17) $[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}]$, $[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}]$ – неопределенная, интервальная функция, D_1 – дифференциальный оператор вида (9). Для задачи смешанные краевые условия получено решение В интервальном расширении структуры (22), (23), (24) $[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}]$, $[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}]$ - неопределенная интервальная функция и D_1 – дифференциальный оператор вида (9).

Ключевые слова: структуры решения, интервальное расширение, краевые задачи, метод R-функция.

Ушбу мақолада хусусий ҳосилали иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг асосий чегаравий масалаларининг ечим тузилишини интервал арифметиканинг асосой амалларини қўллаган ҳолда интервал кенгайтирилган ечимларининг тузилиши ишлаб чиқилган. Унда R функция усулининг координатали боғлиқлигидан фойдаланиш амалга оширилган. Структурали формулаларнинг интервал кенгайтмаларни яратиш учун (1) дифференциал тенглама олинган ва 4 та масаллар – Дирихле масаласи, Нейман масаласи, учинчи турдаги масала, аралаш чегаравий шартлар масаллари тадқиқ қилинган. Дирихле масаласи учун (5) кўринишидаги интервал кенгайтирилган ечим олинган ва унда $P = \{\omega\underline{\Phi}, \omega\overline{\Phi}, \overline{\omega}\underline{\Phi}, \overline{\omega}\overline{\Phi}\}$ ва $[\underline{\Phi}, \overline{\Phi}]$ – аниқланмаган интервал функция. Нейман масаласи учун (10), (11) кўринишидани интервал кенгайтирилган ечимлар олинган, бунда $\left[\underline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_1\right]$, $\left[\underline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_2\right]$ – аниқланмаган интервал функция ва D_1 – (9) кўринишидаги дифференциал оператор. Учинчи турдаги масала учун (16), (17) - кўринишидани интервал кенгайтирилган ечимлар олинган, бунда $\left[\underline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_1\right]$, $\left[\underline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_2\right]$ – аниқланмаган интервал функция ваD_1 – (9) кўринишидаги дифференциал оператор. Аралаш чегаравий шартлар масаласи учун (22), (23), (24) кўринишидани интервал кенгайтирилган ечимлар олинган, бунда $\left[\underline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_1\right]$, $\left[\underline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_2\right]$ – аниқланмаган интервал функция ваD_1 – (9) кўринишидаги дифференциал оператор.

Таянч иборалар: ечим тузилиш, интервал кенгайтма, чегаравий масала, R-функция усули.

In this article, the interval expansion of the structure of solving basic types of boundary value problems for partial differential equations of the second order of making the basic operations that compose interval arithmetic is developed. For the differential equation (1) of the type, when constructing the interval expansion of the structure of the formula, structural formulas were used to construct with the R-function method and 4 problems were studied — the Dirichlet problem, the Neumann problem, the third type problem, the mixed boundary conditions problem. For the Dirichlet problem, the solution is an interval expansion of the structure in the form (5), where $P = \{\omega\underline{\Phi}, \omega\overline{\Phi}, \overline{\omega}\underline{\Phi}, \overline{\omega}\overline{\Phi}\}$ и $[\underline{\Phi}, \overline{\Phi}]$is an indefinite interval function. For the Neumann problem, a solution is solved in the interval extension of the structure (10), (11), $\left[\underline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_1\right]$, $\left[\underline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_2\right]$ is an indefinite interval function and D_1 is a differential operator of the form (9). For the problem of the third type, the solution is solved in the interval extension of the structure (16), (17), $\left[\underline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_1\right]$, $\left[\underline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_2\right]$ - indefinite, interval function, D_1- differential operator of the form (9). For the problem, mixed boundary conditions are treated. The solution In the interval extension of the structure (22), (23), (24), $\left[\underline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_1\right]$, $\left[\underline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_2\right]$ is an indefinite interval function and $D_1$is a differential operator of the form (9).

Keywords: structure solutions, interval arithmetic, boundary value problems, R-function method.

I. ВВЕДЕНИЕ

Большое внимание привлекают вопросы создания интервального расширения структуры решения основных типов и корректности краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа. Интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, в прогнозировании уровня грунтовых вод, в математической биологии и других областях. Поэтому разработка методов интервального расширения структурных решений краевых задач для уравнений смешанного типа является одной из важных проблем создания библиотечного инструмента на основе современной технологии программирования. Библиотечный инструмент дает возможности численного решения дифференциальных уравнений и построение графиков решений.

Метод R-функций позволяет построить координатные последовательности, удовлетворяющие краевым условиям точно, без каких-либо аппроксимаций[1]. Однако, при решении систем дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений в частных производных высокого порядка из-за плохой обусловленности матрицы (полная матрица больших порядков, составленная в результате дискретизации по пространственным переменным с применением метод R-функций) теряется точность приближенного решения. Кроме того, подобные потери точности возникают в случаях, когда исходные данные задачи не точные, приближенно вычисляются значения интегралов и погрешности методов решения разрешающих уравнений и т.д. Эти недостатки можно устранить при помощи интервального метода [2, 5, 6]. Отсюда следует необходимость разработки алгоритма сочетания метода R-функций и интервального метода для решения практических задач, которое будем называть интервально-значной R-функцией.

Алгоритм применения интервально-значной R-функции решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных различных порядков состоит из следующих шагов:

1. Построить интервальные расширения систем R-функций.
2. Построить интервальные расширения для формул дифференциальных кортежей.
3. Построить интервальные расширения структурных формул.
4. Построить интервальные расширения кубатурных формул.
5. Построить интервальные расширения решения разрешающих уравнений (в случае статической постановки – система алгебраических уравнений, а в случае динамики – система обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях).

Интервальные расширения систем R-функций и интервальные расширения для формул многомерных дифференциальных кортежей даны в работах[7-10]. Здесь рассматриваются только интервальные расширения структурных формул для основных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

II. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

Построение интервальных расширений структуры формулы

При построении интервального расширения структуры формулы использованы структурные формулы построения с методом R-функций, приведенные в работах [1,4, 10].

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{i,j}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i x_j} + F\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (1)$$

где A = {$\mathbf{a}_{i,j}$} - симметричная матрица, **u** функция. Как известно, характеристические числа матрицы A вещественны [5]. Уравнение (1) называется эллиптическим в области Ω, если во всех точках Ω характеристические числа матрицы A имеют один и тот же знак.

Основными типами краевых условий для уравнения (1) являются следующие задачи:

1. Задача Дирихле. Краевое условие на Г имеет вид

$$u|_{\Gamma} = \varphi_0 \qquad (2)$$

где φ_0 : Г → R (или R^n, если u вектор - функция). Функция φ_0 может быть задана лишь на границе Г и иметь на различных участках $\Gamma_i \subset \Gamma$ различные аналитические выражения φ_i:

$$u = \begin{cases} \varphi_1, & x \in \Gamma_1 \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_m, & x \in \Gamma_m \end{cases} \qquad (3)$$

Будем предполагать, что $\varphi_i \in \mathfrak{M}(H)$ - некоторые H - реализуемые функции. На практике чаще всего H = H_ε, т. е. ($\mathfrak{M}(H)$ - множество элементарных функций.

Эти граничные значения можно продолжить внутрь области и склеить с помощью оператора EC. $EC\varphi_0 = \varphi$ - оператор склеивания граничных значений. Для этого оператора можно дать различные варианты формул и здесь $\varphi_0 = \frac{\varphi_1\tau_1 + \varphi_2\tau_2 + \dots + \varphi_m\tau_m}{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m}$, $\tau_i = \frac{1}{\omega_i}$. Пусть $EC\varphi_0 = \varphi$ тогда, структуры решения краевой задачи (1), (2) построение вида полинома метода R-функций В. Л. Рвачева имеет вид [1]:

$$u = \varphi + \omega\Phi \qquad (4)$$

где Φ – неопределенная функция и ω – уравнение границы области, со следующей вида,

$$\omega = \begin{cases} > 0, & (x,y) \in \Omega \\ = 0, & (x,y) \in \Gamma \\ < 0 & (x,y) \notin \Gamma \cup \Omega \end{cases}$$

Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решения (4):

$$[\underline{u}, \overline{u}] = [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] + [\underline{\omega}, \overline{\omega}][\underline{\Phi}, \overline{\Phi}] = [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] + [\min\{P\}, \max\{P\}] =$$

$$= \left[\underline{\varphi} + \min\{P\}, \bar{\varphi} + \max\{P\} \right].$$

И получаем интервальное расширение структуры в виде:

$$[\underline{u}, \bar{u}] = \left[\underline{\varphi} + \min\{P\}, \bar{\varphi} + \max\{P\} \right] \qquad (5)$$

где $P = \{\underline{\omega}\underline{\Phi}, \underline{\omega}\bar{\Phi}, \bar{\omega}\underline{\Phi}, \bar{\omega}\bar{\Phi}\}$ и $[\underline{\Phi}, \bar{\Phi}]$ - неопределенная интервальная функция.

2. Задача Неймана. Краевое условие для этой задачи имеет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi_0 \qquad (6)$$

Здесь n - норма к Г. Случай, когда Г имеет точки, в которых направление φ_0 не определено, требует специального рассмотрения. Пусть, как и в предыдущем пункте, $EC\varphi_0 = \varphi$. Это позволяет условие (6) переписать в виде

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi \qquad (7)$$

Структуры решения краевой задачи (1), (7) является построение полинома метода R-функции В. Л. Рвачева, имеет вид [1]:

$$u = \Phi_1 + \omega(\omega\Phi_2 - D_1\Phi_1 + \varphi) \qquad (8)$$

где Φ_1, Φ_2 - неопределенной функции и D_1 – дифференциальный оператор, со следующим видом

$$D_1 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (9)$$

Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решения (8):

$$[\underline{u}, \bar{u}] = [\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] + [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\left([\underline{\omega}, \bar{\omega}][\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}] - D_1[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] + [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]\right) =$$
$$= [\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] + [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\left([\min\{Q\}, \max\{Q\}] - [D_1\underline{\Phi_1}, D_1\overline{\Phi_1}] + [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]\right) =$$
$$= [\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] + [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\left([\min\{Q\}, \max\{Q\}] - [D_1\underline{\Phi_1} + \underline{\varphi}, D_1\overline{\Phi_1} + \bar{\varphi}]\right) =$$
$$= [\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] + [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\left([\min\{Q\} - D_1\overline{\Phi_1} + \bar{\varphi}, \max\{Q\} - D_1\underline{\Phi_1} + \underline{\varphi}]\right) =$$
$$= [\underline{\Phi_1} + \min(Q_1), \overline{\Phi_1} + \max(Q_1)]$$

где

$$Q = \{\underline{\omega}\underline{\Phi_2}, \underline{\omega}\overline{\Phi_2}, \bar{\omega}\underline{\Phi_2}, \bar{\omega}\overline{\Phi_2}\},$$

$$Q_1 = \{\underline{\omega}(\min\{Q\} - D_1\overline{\Phi_1} + \bar{\varphi}), \underline{\omega}(\max\{Q\} - D_1\underline{\Phi_1} + \underline{\varphi}), \bar{\omega}(\min\{Q\} - -D_1\overline{\Phi_1} + \bar{\varphi}), \bar{\omega}(\max\{Q\} - D_1\underline{\Phi_1} + \underline{\varphi})\} = \{\underline{\omega}\min\{Q\} - \underline{\omega} D_1\overline{\Phi_1} + \underline{\omega}\bar{\varphi}), \underline{\omega}\max\{Q\} - \underline{\omega}D_1\underline{\Phi_1} + \underline{\omega}\underline{\varphi}), \bar{\omega}\min\{Q\} - -\bar{\omega}D_1\overline{\Phi_1} + \overline{\bar{\omega}\varphi}), \bar{\omega}\max\{Q\} - \bar{\omega}D_1\underline{\Phi_1} + \bar{\omega}\underline{\varphi})\}$$

и получаем интервальное расширение структуры в виде:

$$[\underline{u}, \bar{u}] = [\underline{\Phi_1} + \min(Q_1), \overline{\Phi_1} + \max(Q_1)] \qquad (10)$$

или можно построить интервальное расширение структуры решения (8) в другом варианте:

$$[\underline{u},\bar{u}] = \left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] - [\underline{\omega},\bar{\omega}]D_1\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] + [\underline{\omega},\bar{\omega}]^2\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right] + +[\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[\underline{\varphi},\bar{\varphi}\right] =$$
$$= \left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] - [\underline{\omega},\bar{\omega}]\, D_1\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] + +[\min\{F\},\max\{F\}] + [\min\{L\},\max\{L\}] =$$
$$= \left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] - [\min\{K\},\max\{K\}] + [\min\{F\}+\min\{L\},\max\{F\}+\max\{L\}] =$$
$$= \left[\underline{\Phi_1} - \max\{K\} + \min\{F\} + \min\{L\}, \overline{\Phi_1} - \min\{K\} + \max\{F\} + \max\{L\}\right]$$

и получаем

$$[\underline{u},\bar{u}] = \left[\underline{\Phi_1} - \max\{K\} + \min\{F\} + \min\{L\}, \overline{\Phi_1} - \min\{K\} + \right.$$
$$\left. + \max\{F\} + \max\{L\}\right] \qquad (11)$$

где $F = \left\{\underline{\omega}^2\,\underline{\Phi_2}, \bar{\omega}^2\,\underline{\Phi_2}, \underline{\omega}^2\overline{\Phi_2}, \bar{\omega}^2\,\overline{\Phi_2}\right\}$, $L = \left\{\underline{\omega}\,\underline{\varphi}, \bar{\omega}\,\underline{\varphi}, \underline{\omega}\bar{\varphi}, \bar{\omega}\bar{\varphi}\right\}$,

$K = \left\{\underline{\omega}\,D_1\underline{\Phi_1}, \bar{\omega}\,D_1\underline{\Phi_1}, \underline{\omega}\,D_1\,\overline{\Phi_1}, \bar{\omega}\,D_1\,\overline{\Phi_1}\right\}$

В интервальном расширении структуры (10), (11), $\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]$, $\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]$ - неопределенная интервальная функция и D_1 – дифференциальный оператор вида (9).

3. Задача третьего типа. Краевое условие этой задачи имеет вид

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_0(x)u\right)\right|_{\Gamma} = \varphi_0 \qquad (12)$$

Здесь h_0 и φ_0 - функции из $\mathfrak{M}(H)$, заданные, вообще, лишь на границе. Пусть ECh_0 = h_1, ECφ_0 = φ. Тогда условие (11) можно заменить условием

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_1(x)u\right)\right|_{\Gamma} = \varphi(x) \qquad (13)$$

Структуры решения краевой задачи (1), (12) построение вида полинома метода R-функций имеет вид[1]:

$$u = \Phi_1 - \omega D_1\Phi_1 - h_1\Phi_1\omega + \varphi\omega + \omega^2\Phi_2 \qquad (14)$$

где Φ_1, Φ_2- неопределенной функции и D_1 – дифференциальный оператор вида (9). Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решения (14):

$$[\underline{u},\bar{u}] = \left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] - [\underline{\omega},\bar{\omega}]D_1\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] - \left[\underline{h_1},\overline{h_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right][\underline{\omega},\bar{\omega}] +$$
$$+ \left[\underline{\varphi},\bar{\varphi}\right][\underline{\omega},\bar{\omega}] + [\underline{\omega},\bar{\omega}]^2\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right] \qquad (15)$$

принимая во внимание, что

$$[\underline{\omega},\bar{\omega}]D_1\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right] = [\underline{\omega},\bar{\omega}]\left[D_1\,\underline{\Phi_1}, D_1\overline{\Phi_1}\right] = \left[\underline{K_1},\overline{K_1}\right];$$

где $\underline{K_1} = min\{K_1\}$, $\overline{K_1} = max\{K_1\}$, $K_1 = \left\{\underline{\omega}D_1\,\underline{\Phi_1}, \underline{\omega}\,D_1\overline{\Phi_1}, \bar{\omega}D_1\,\underline{\Phi_1}, \bar{\omega}D_1\overline{\Phi_1}\right\}$,

$$\left[\underline{h_1},\overline{h_1}\right]\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right][\underline{\omega},\bar{\omega}] = \left[\underline{h_1},\overline{h_1}\right]\left[\underline{K_2},\overline{K_2}\right] = \left[\underline{K_3},\overline{K_3}\right]$$

где $\underline{K_2} = min\{K_2\}$, $\overline{K_2} = max\{K_2\}$, $K_2 = \left\{\underline{\omega}\,\underline{\Phi_1}, \underline{\omega}\,\overline{\Phi_1}, \bar{\omega}\,\underline{\Phi_1}, \bar{\omega}\overline{\Phi_1}\right\}$,

$$\underline{K_3} = min\{K_3\},\ \overline{K_3} = max\{K_3\},\ K_3 = \left\{\underline{h_1}\,\underline{K_2}, \underline{h_1}\,\overline{K_2}, \overline{h_1}\,\underline{K_2}, \overline{h_1}\overline{K_2}\right\},$$

$$\left[\underline{\varphi},\bar{\varphi}\right][\underline{\omega},\bar{\omega}] = \left[\underline{K_4},\overline{K_4}\right],$$

где $\underline{K_4} = min\{K_4\}$, $\overline{K_4} = max\{K_4\}$, $K_4 = \left\{\underline{\omega}\,\underline{\varphi}, \underline{\omega}\,\bar{\varphi}, \bar{\omega}\,\underline{\varphi}, \bar{\omega}\bar{\varphi}\right\}$,

$$\left[\underline{\omega}, \overline{\omega}\right]^2 \left[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}\right] = \left[\underline{K_5}, \overline{K_5}\right],$$

где $\underline{K_5} = min\{K_5\}$, $\overline{K_5} = max\{K_5\}$, $K_5 = \left\{\underline{\omega}^2\ \underline{\varphi}, \underline{\omega}^2\ \overline{\varphi}, \overline{\omega}^2\ \underline{\varphi}, \overline{\omega}^2 \overline{\varphi}\right\}$,

тогда интервальное расширение (15) имеет вид:

$$\left[\underline{u}, \overline{u}\right] = \left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] - \left[\underline{K_1}, \overline{K_1}\right] - \left[\underline{K_3}, \overline{K_3}\right] + \left[\underline{K_4}, \overline{K_4}\right] + \left[\underline{K_5}, \overline{K_5}\right] \qquad (16)$$

или

$$\left[\underline{u}, \overline{u}\right] = \left[\underline{\Phi_1} - \overline{K_1} - \overline{K_3} + \underline{K_4} + \underline{K_5}, \overline{\Phi_1} - \underline{K_1} - \underline{K_3} + \overline{K_4} + \overline{K_5}\right] \qquad (17)$$

В интервальном расширении структуры (16), (17) $\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]$, $\left[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}\right]$ – неопределенная, интервальная функция, D_1 – дифференциальный оператор вида (9).

4. Смешанные краевые условия. Краевые условия этой задачи имеют вид

$$u\Big|_{\Gamma_1} = \varphi_0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_0(x)u\right)\Big|_{\Gamma_2} = \psi_0 \qquad (18)$$

Функции φ_0, $h_0(x)$ и ψ_0 предполагаются, как и ранее, заданными на Г (возможно, различными формулами из $\mathfrak{M}(\mathrm{H})$, на разных участках границы). Их продолжения в области Г обозначим EC$h_0 = h_1(x)$, EC$\varphi_0 = \varphi(x)$, EC$\psi_0 = \psi(x)$. Тогда вместо (23) получим

$$u\Big|_{\Gamma_1} = \varphi, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_1(x)u\right)\Big|_{\Gamma_2} = \psi \qquad (19)$$

Структуры решения краевой задачи (1), (19) построение вида полинома метода R-функций имеет вид [1]:

$$u = \omega_1\Phi_1 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\left(\psi + \omega_2\Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) - D_1^{(2)}\varphi - h_1\omega_1\Phi_1 - h_1\varphi\right) +$$
$$+\varphi. \qquad (20)$$

где Φ_1, Φ_2 - неопределенной функции и D_1 –дифференциальный оператор вида (9), $D_1{}^{(2)} = (\nabla\omega_2, \nabla)$; ω_1, ω_2 – уравнение границы области. Применяя операции интервальной арифметики, построим интервальное расширение структуры решения (20):

$$\left[\underline{u}, \overline{u}\right] = \left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] + \frac{\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]}{\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right] + \left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right]}\left(\left[\underline{\psi}, \overline{\psi}\right] + \left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right] \times\right.$$
$$\times\left[\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}\right] - D_1^{(2)}\left(\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right]\right) - D_1^{(2)}\left[\underline{\varphi}, \overline{\varphi}\right] - \left[\underline{h_1}, \overline{h_1}\right]\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right] \times$$
$$\left.\times\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] - \left[\underline{h_1}, \overline{h_1}\right]\left[\underline{\varphi}, \overline{\varphi}\right]\right) + \left[\underline{\varphi}, \overline{\varphi}\right] \qquad (21)$$

принимая во внимание, что

$$\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]\left[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}\right] = \left[\underline{Q_1}, \overline{Q_1}\right],$$

где $\underline{Q_1} = min\{Q_1\}$, $\overline{Q_1} = max\{Q_1\}$, $Q_1 = \left\{\underline{\omega_1}\ \underline{\Phi_1}, \underline{\omega_1}\ \overline{\Phi_1}, \overline{\omega_1}\ \underline{\Phi_1}, \overline{\omega_1}\overline{\Phi_1}\right\}$,

$$\left[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}\right]\left[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}\right] = \left[\underline{q_1}, \overline{q_1}\right],$$

где $\underline{q_1} = min\{q_1\}$, $\overline{q_1} = max\{q_1\}$, $q_1 = \left\{\underline{\omega_1}\ \underline{\omega_2}, \underline{\omega_1}\overline{\omega_2}, \overline{\omega_1}\ \underline{\omega_2}, \overline{\omega_1}\overline{\omega_2}\right\}$,

$$\frac{[\underline{q_1}, \overline{q_1}]}{[\underline{\omega_1} + \underline{\omega_2}, \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}]} = [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}],$$

где $\underline{Q_2} = min\{Q_2\}$, $\overline{Q_2} = max\{Q_2\}$, $Q_2 = \left\{\underline{q_1}\frac{1}{\underline{\omega_1} + \underline{\omega_2}}, \underline{q_1}\frac{1}{\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}}, \overline{q_1}\frac{1}{\underline{\omega_1} + \underline{\omega_2}}, \overline{q_1}\frac{1}{\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}}\right\}$,

$$[\underline{\omega_2}, \overline{\omega_2}][\underline{\Phi_2}, \overline{\Phi_2}] = [\underline{Q_3}, \overline{Q_3}],$$

где $\underline{Q_3} = min\{Q_3\}$, $\overline{Q_3} = max\{Q_3\}$, $Q_3 = \{\underline{\omega_2}\ \underline{\Phi_2}, \underline{\omega_2}\ \overline{\Phi_2}, \overline{\omega_2}\ \underline{\Phi_2}, \overline{\omega_2}\overline{\Phi_2}\}$,

$$D_1^{(2)}\left([\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}][\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}]\right) = [\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}]D_1^{(2)}[\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] + [\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}]D_1^{(2)}[\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}] =$$

$$[\underline{Q_4}, \overline{Q_4}] + [\underline{Q_5}, \overline{Q_5}] = [\underline{Q_6}, \overline{Q_6}],$$

Где $[\underline{Q_6}, \overline{Q_6}] = [\underline{Q_4}, \overline{Q_4}] + [\underline{Q_5}, \overline{Q_5}] = [\underline{Q_4} + \underline{Q_5}, \overline{Q_4} + \overline{Q_5}]$, $\underline{Q_4} = min\{Q_4\}$,

$\overline{Q_4} = max\{Q_4\}$, $Q_4 = \{\underline{\omega_1}D_1^{(2)}\ \underline{\Phi_1}, \underline{\omega_1}\ D_1^{(2)}\overline{\Phi_1}, \overline{\omega_1}D_1^{(2)}\ \underline{\Phi_1}, \overline{\omega_1}D_1^{(2)}\overline{\Phi_1}\}$, $\underline{Q_5} =$

$= min\{Q_5\}, \overline{Q_5} = max\{Q_5\}$, $Q_5 = \{\underline{\Phi_1}D_1^{(2)}\ \underline{\omega_1}, \underline{\Phi_1}\ D_1^{(2)}\overline{\omega_1}, \overline{\Phi_1}D_1^{(2)}\ \underline{\omega_1}, \overline{\Phi_1}D_1^{(2)}\overline{\omega_1}\}$,

$$[\underline{h_1}, \overline{h_1}][\underline{\omega_1}, \overline{\omega_1}][\underline{\Phi_1}, \overline{\Phi_1}] = [\underline{Q_7}, \overline{Q_7}],$$

где $\underline{Q_7} = min\{Q_7\}$, $\overline{Q_7} = max\{Q_7\}, Q_7 = \{\underline{h_1}\ \underline{Q_1}, \underline{h_1}\ \overline{Q_1}, \overline{h_1}\ \underline{Q_1}, \overline{h_1}\overline{Q_1}\}$,

$$[\underline{h_1}, \overline{h_1}][\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] = [\underline{Q_8}, \overline{Q_8}],$$

где $\underline{Q_8} = min\{Q_8\}$, $\overline{Q_8} = max\{Q_8\}, Q_8 = \{\underline{h_1}\ \underline{\varphi}, \underline{h_1}\ \overline{\varphi}, \overline{h_1}\ \underline{\varphi}, \overline{h_1}\overline{\varphi}\}$.

и получаем интервальное расширение структуры (21) в виде

$$[\underline{u}, \overline{u}] = [\underline{Q_1}, \overline{Q_1}] + [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}]\left([\underline{\psi}, \overline{\psi}] + [\underline{Q_3}, \overline{Q_3}] - [\underline{Q_6}, \overline{Q_6}] - \right.$$

$$\left. - [D_1^{(2)}\ \underline{\varphi}, D_1^{(2)}\overline{\varphi}] - [\underline{Q_7}, \overline{Q_7}] - [\underline{Q_8}, \overline{Q_8}]\right) + [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] \qquad (22)$$

или

$$[\underline{u}, \overline{u}] = [\underline{Q_1}, \overline{Q_1}] + \left([\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{\psi}, \overline{\psi}] + [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_3}, \overline{Q_3}] - [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_6}, \overline{Q_6}] - \right.$$

$$\left. - [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][D_1^{(2)}\ \underline{\varphi}, D_1^{(2)}\overline{\varphi}] - [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_7}, \overline{Q_7}] - [\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_8}, \overline{Q_8}]\right) + [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] \qquad (23)$$

принимая во внимание, что

$$[\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{\psi}, \overline{\psi}] = [\underline{L_1}, \overline{L_1}],$$

где $\underline{L_1} = min\{L_1\}$, $\overline{L_1} = max\{L_1\}, L_1 = \{\underline{Q_2}\ \underline{\psi}, \underline{Q_2}\overline{\psi}, \overline{Q_2}\ \underline{\psi}, \overline{Q_2}\overline{\psi}\}$,

$$[\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_3}, \overline{Q_3}] = [\underline{L_2}, \overline{L_2}],$$

где $\underline{L_2} = min\{L_2\}$, $\overline{L_2} = max\{L_2\}, L_2 = \{\underline{Q_2}\ \underline{Q_3}, \underline{Q_2}\overline{Q_3}, \overline{Q_2}\ \underline{Q_3}, \overline{Q_2 Q_3}\}$,

$$[\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_6}, \overline{Q_6}] = [\underline{L_3}, \overline{L_3}],$$

где $\underline{L_3} = min\{L_3\}$, $\overline{L_3} = max\{L_3\}, L_3 = \{\underline{Q_2}\ \underline{Q_6}, \underline{Q_2}\overline{Q_6}, \overline{Q_2}\ \underline{Q_6}, \overline{Q_2 Q_6}\}$,

$$[\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][D_1^{(2)}\ \underline{\varphi}, D_1^{(2)}\overline{\varphi}] = [\underline{L_4}, \overline{L_4}],$$

где $\underline{L_4} = min\{L_4\}$, $\overline{L_4} = max\{L_4\}$,

$$L_4 = \{\underline{Q_2}\ D_1^{(2)}\ \underline{\varphi}, \underline{Q_2}D_1^{(2)}\overline{\varphi}, \overline{Q_2}\ D_1^{(2)}\ \underline{\varphi}, \overline{Q_2}D_1^{(2)}\overline{\varphi}\},$$

$$[\underline{Q_2}, \overline{Q_2}][\underline{Q_7}, \overline{Q_7}] = [\underline{L_5}, \overline{L_5}]$$

где $\underline{L_5} = min\{L_5\}$, $\overline{L_5} = max\{L_5\}, L_5 = \{\underline{Q_2}\ \underline{Q_7}, \underline{Q_2}\overline{Q_7}, \overline{Q_2}\ \underline{Q_7}, \overline{Q_2 Q_7}\}$,

$$\left[\underline{Q_2},\overline{Q_2}\right]\left[\underline{Q_8},\overline{Q_8}\right]=\left[\underline{L_6},\overline{L_6}\right]$$

где $\underline{L_6}=min\{L_6\}$, $\overline{L_6}=max\{L_6\}, L_6=\left\{\underline{Q_2}\ \underline{Q_8}, \underline{Q_2}\,\overline{Q_8}, \overline{Q_2}\ \underline{Q_8}, \overline{Q_2}\,\overline{Q_8}\right\}$,

и получаем интервальное расширение структуры (22) в виде

$$\left[\underline{u},\overline{u}\right]=\left[\underline{Q_1},\overline{Q_1}\right]+\left[\underline{L_1},\overline{L_1}\right]+\left[\underline{L_2},\overline{L_2}\right]-\left[\underline{L_3},\overline{L_3}\right]-\left[\underline{L_4},\overline{L_4}\right]-$$
$$-\left[\underline{L_5},\overline{L_5}\right]-\left[\underline{L_6},\overline{L_6}\right]+\left[\underline{\varphi},\overline{\varphi}\right] \quad (24)$$

или

$$\begin{aligned}\underline{u}&=\left(\underline{Q_1}+\underline{L_1}+\underline{L_2}+\overline{L_3}-\overline{L_4}-\overline{L_5}-\overline{L_6}+\underline{\varphi}\right)\\ \overline{u}&=\left(\overline{Q_1}+\overline{L_1}+\overline{L_2}-\underline{L_3}-\underline{L_4}-\underline{L_5}-\underline{L_6}+\overline{\varphi}\right).\end{aligned} \quad (25)$$

В интервальном расширении структуры (22), (23), (24) $\left[\underline{\Phi_1},\overline{\Phi_1}\right]$, $\left[\underline{\Phi_2},\overline{\Phi_2}\right]$ - неопределенная интервальная функция и D_1 – дифференциальный оператор вида (9).

При построении интервального расширения структуры формулы использованы структурные формулы построения с методом R-функций и изучено 4 задачи - задача Дирихле, задача Неймана, задача третьего типа, задача смешанные краевые условия и создана программная библиотека «Sol2Interval» на языке C++. Эта билблиотека дает возможность построить интервальный 3Д график для интервального расширения структур (рис-1).

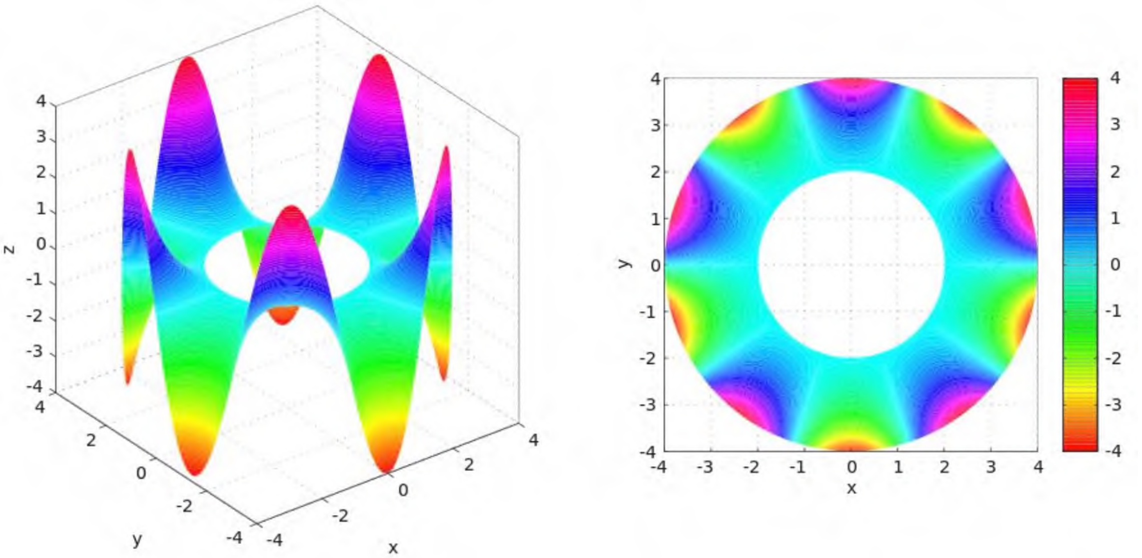

Рис.1. Графическое решение для интервального расширения структур.

Имеются три основных сферы успешного применения интервального анализа и интервальных методов на основе программной библиотеки «Sol2Interval»:

- Решение практических задач, имеющих интервальную или, более общо, ограниченную неопределённость в данных.
- Строгий учёт ошибок округления при вычислениях с числами с плавающей точкой на цифровых ЭВМ.

• Новые подходы к решению традиционных математических задач (таких, к примеру, как задача глобальной оптимизации, глобальное доказательное решение систем нелинейных уравнений и т.п.)

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено интервальное расширение структуры решения основных типов краевых задач - задача Дирихле, задача Неймана, задача третьего типа, смешанные краевые условия для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Полученные результаты можно использовать для построения интервально - значений структуры решения для других краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных различного порядка. Полученные интервально - значения структуры решения легко реализуются на компьютерах.

Эта статья посвящается памяти профессора Шодмонкула Арзикуловича Назирова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения /. – Киев г Наук. думка, 1982. -552 с.

[2] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Издательство «XYZ» Института вычислительных технологий, 2009. – 580 с.

[3] Добронец Б.С. Интервальная математика. – Красноярск: Издательство КГУ, 2004.

[4] Калмыков С.А., Шокин Ю.А., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. -223 с.

[5] Назиров Ш.А. Метод интервально-значных R-функций в задачах математического моделирования // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Ал-Хоразмий 2012», Том № 2, 19-22 декабрь, 2012 г. Ташкент. С. 65-70.

[6] Назиров Ш.А. Интервально-значные двух- аргументные R-функции. Республиканская научно-методическая конференция «Современные информационные технологии в телекоммуникации и связи». Ташкент. 2011. С.15-20.

[7] Назиров Ш.А. Вычисления значений n-мерных дифференциальных кортежей многомерной интервально-значной функции. Вычислительные технологии. Новосибирск. 2014. Вып. 2.

[8] Назиров Ш.А. Многомерная интервально - значная R-функция. // Вопросы вычислительной и прикладной математики. –Тошкент, 2011. -№ 126. –С. 23-59.