Литература

1. D.W. Brenner, O.A. Shenderova, J.A. Harrison, S.J. Stuart, B. Ni, S.B. Sinnot, J. Phys: Condens. Matter. № 14. C. 783-802; 2002
2. C. Zhang, X. Xu, H. Wu, and Q. Zhang, Chem. Phys. Lett. 364, 213; 2002.
3. D. P. Kosimov, A. A. Dzhurakhalov and F. M. Peeters Phys. Rev. B 81, 195414; 2010

УДК 532.031

КРИТЕРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ПОТОКОВ

Яхшибоев Д.С.

В статье рассматривается динамическая устойчивость стратификационных течений методом взаимопроникающих жидкостей. Достоверность результатов проверяется уточнением с данными других авторов, полученных для однофазной двухслойной жидкости. Зная естественную температуру сбрасываемой воды, пользуясь полученными зависимостями, можно определить стадию перемешивания и приближенно толщину переходного слоя в случае его образования, а также эпюру плотности при изменении температурный скорости движения верхнего слоя.

Ключевые слова: *стратифицированные потоки, слоистые потоки, динамическая устойчивость, модель многофазных взаимопроникающийся жидкостей, воздействия импульса давлений, интеграл Коши-Лагранжа, потенциальные волны, дисперсная смесь.*

Мақолада қатламлашган оқимларнинг ҳаракати давомидаги динамик турғунлиги суюқликларни кўп фазали ўзаро киришувчанлиги ва таъсирланувчанлиги усули ва эришилган натижаларнинг ишончлилиги бошқа авторларнинг бир фазали суюқликлар қатлами учун олинган маълумотлар билан солиштирилиши билан текширилади. Табиий ҳароратда чиқувчи сувларни билган холда аниқланган боғланишлар орқали силжиш холатларини ва юзага келган холатларда ўтиш қатламларининг яқинлашган қалинлигини, шунингдек юқори қатлам ҳаракатида ҳарорат тезлигини ўзгаришида зичлик эпюрасини аниқлаш мумкин.

Таянч иборалар*: қатламлашган оқим, қатламли оқим, динамик турғунлиги, кўп фазали ўзаро киришувчан ва таъсирланувчан суюқликлар усули, босим импульси таъсири, интеграл - Коши – Лагранжа, тўлқин таъсири, қовушма ўзгариши.*

The dynamic stability of stratification flows is considered in the article by the method of interpenetrating liquids, and the reliability of the results. Theoretical research of dynamic stability is usually based on methods of perturbation theory. With respect to the study of the dynamic stability of stratified flows, these methods are reduced to two basic methods: the method of small oscillations and the energy method. In this paper, we study the dynamic stability of stratified flows in a model of multiphase interpenetrating liquids. Knowing the natural temperature of the discharged water, using the obtained dependences, it is possible to determine the mixing stage and approximately the thickness of the transition layer in the case of its formation, as well as the density plot when the temperature velocity of the upper layer changes.

Keywords*: Stratified flows, layered flows, dynamic stability, the model of multiphase interpenetrating liquids, the effects of the pressure pulse, the integral-Cocks-Lagrange, potential waves, dispersed mixture.*

Введение

Изучению динамической устойчивости стратифицированных потоков посвящены работы Тейлора, Гольдштейна, Келлегана, Харлемана, Ун, Лофквиста, Макагно и Рауза, Нетюхайло и других.

Теоретическое исследование динамической устойчивости обычно основывается на методах теории возмущений. Применительно к изучению динамической устойчивости стратифицированных потоков эти методы сводятся к двум основным: методу малых колебаний и энергетическому методу.

В данной работе проводится изучение динамической устойчивости стратифицированных потоков в модели многофазных взаимопроникающих жидкостей.

Основная часть

Воздействие двух слоев стратификационных течений напишем в форме уравнения движения n - ой фазы смеси

$$\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t} = \vec{F}_n - \frac{1}{\rho_{ni}} gradP + K(\vec{V}_p - \vec{V}_n)_{(p \neq n)} \tag{1}$$

Умножив уравнение (1) на dt и интегрируя в интервале времени $(0,\tau)$ где $\tau \prec\prec 1$ имеем:

$$\int_0^\tau \frac{d\vec{V}_n}{dt}dt = \int_0^\tau d\vec{V}_n = \int_0^\tau \vec{F}_n dt - \int_0^\tau \frac{1}{\rho_{ni}} gradPd\tau + \int_0^\tau K(\vec{V}_p - \vec{V}_n)dt \tag{2}$$

В этом равенстве найдем предел при $\tau \to 0$, так как обычные массовые силы и силы взаимодействия конечные, то предел этих слагаемых в равенстве (2) обратятся в нуль [3,5]. Тогда из равенства (2) получим

$$\vec{V}_n' - \vec{V}_n(0) = -\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{1}{\rho_{ni}} grad\, P' dt \tag{3}$$

Если жидкости сжимаемы и имеет место баротропический процесс, то равенство будет иметь вид:

$$\vec{V}_n' - \vec{V}_n(0) = -\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau gradPdt \tag{4}$$

где P_n – функция давлений определяется равенством

$$dP_n = \frac{dp}{\rho_{mi}}$$

$\vec{V}_n(0), \vec{V}_n(\tau)$ скорости частиц n-ой фазы до и после действия импульса давлений соответственно. В пределе получаем

$$V_n'(\tau) - \vec{V}_H(0) = gradP_n = grad\varphi_n$$

За весьма малое время действия импульса действия координата точек частиц фаз во время удара координаты не меняются. Откуда получим

$$P_t = -\rho_n \varphi_n$$

или

$$\vec{V}_n = grad\varphi_n \tag{5}$$

Поскольку объемные концентрации смеси каждой фазы смеси постоянные, то из уравнения неразрывности и равенства (5) имеем, что искомая функция потенциала скорости φ_n определяются импульсом давления [5,6]. Если дисперсная смесь в начальное время была в состоянии покоя, то, вследствие ударного воздействия давления на дисперсную смесь, возникают потенциальное течение дисперсной смеси, распределения скоростей фаз определяются равенством (5).

С учетом этого фактора течение в двухслойном потоке, возникшее за счет мгновенного воздействия, импульс давлений будет потенциальным, и с учетом этого в работе [4,6] рассмотрены стоячие волны на свободной поверхности и поверхности слоисто-неоднородной смеси жидкостей. Где предполагается верхней слой G_1 с соответствующими параметрами потока $\rho_{nc}^{(I)}, f_n^{(I)}, \vec{V}_n^{(I)}$. На основе малости возмущений приняты соответствующие условия на границах раздела, свободной поверхности на данной поверхности потока. Введя потенциал скорости для обоих слоев, напишем их в виде $\varphi_n^{(m)}(x,y,t)$. Здесь m - номер слоя, n - номер фазы смеси в соответствующем слое. Вследствие потенциальности течения, несжимаемости фаз и постоянства концентрации (где $\rho_{1i} \prec \rho_{2i}$), из уравнения не разрывности (2) получим, что введенные потенциалы скоростей удовлетворяет уравнения Лапласа (5) .

$$\nabla^2 \varphi_n^{(m)} = 0 \tag{6}$$

Тогда решением уравнения (6) будет [1], [3]:

$$\varphi_n^m(x,y,t) = \left[A_n^m e^{ky} + B_n^m e^{-ky}\right]\cos kx \cos \delta t \tag{7}$$

Коэффициенты $A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ – определяются из граничных условий. Для этого использован интеграл Лагранжа-Коши полученный в работе [1]. В работе [3,6] получены уравнения для этих коэффициентов, которые являются линейно-однородным алгебраическим уравнением. Из условия существования решение получен уравнения для зависимости между волновым числом k и частотой δ стоячей волны, далее определены длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{K}, \tau = \frac{2\pi}{\delta}$$

где τ -период стоячей волны.

Отмечено, что с увеличением длины волны также увеличится её период. В работе [5,3] введены вектор скорости, плотность смеси который имеет вид:

$$\vec{V}^{m}_{см} = \frac{\rho_1^{(m)} \vec{V}_1^{(m)}}{\rho^{(m)}} + \frac{\rho_2^{(m)} \vec{V}_2^{(m)}}{\rho^{(m)}}, \qquad (8)$$

где $\rho^{(m)} = \rho_1^{(m)} + \rho_2^{(m)}$,

здесь

$$\rho_n^{(m)} = \rho_{ni}^{(m)} \cdot f_n^{(m)}, \; f_1^{(m)} + f_2^{(m)} = 1.$$

В случае, когда нижний слой дисперсной смеси бесконечно глубокий, тогда $H \to \infty$ и уравнение для волнового числа и частоты волны будет иметь решение в виде

$$\delta_1^2 = gk, \delta_2^2 = gk \frac{tnkh}{\hat{\rho} + tnkh}.$$

Коэффициенты определены в виде [3,4,6]:

$$A^{II} = \left[1 + \frac{\delta^2 - gk}{\delta^2 + gk} e^{2kh}\right] \frac{A^I}{1 - e^{-2kH}},$$

$$B^{II} = \left[1 + \frac{\delta^2 - gk}{\delta^2 + gk} e^{2kh}\right] \frac{A^I - e^{-2kH}}{1 - e^{-2kH}}, \qquad (9)$$

$$B^I = \frac{\delta^2 - gk}{\delta^2 + gk} e^{2kh} A^I.$$

Определим функции $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$ - вертикальные отклонения точек свободных поверхности и поверхности раздела слоев, а также их уравнения для случая, когда нижний слой бесконечно глубокая (при $H \Rightarrow \infty$). Тогда для параметров волны и частоты колебания будем иметь уравнения

$$\hat{\rho}(\delta^4 - g^2 k^2) + (\delta^2 gk)^2 (1 + tnkh)\hat{\rho} - (\delta^4 - g^2 k^2) tnkh = 0.$$

Расщепляя это уравнение на два уравнение определим частоту колебания в виде (5). В первом случае получим, когда частота колебания определяется равенством (7). Тогда из равенства (10) определим коэффициенты

$$A^{II} = A^I, B^I = 0, B^{II} = 0.$$

Тогда потенциалы скоростей определяются равенствами

$$\varphi^{I} = A^{I} e^{ky} \cos kx \cos \delta t,$$

$$\varphi^{II} = A^{I} e^{ky} \cos kx \cos \delta t. \qquad (10)$$

При первом случае амплитуда колебаний равно единице, т.е. на свободной поверхности и на границе раздела колебания будут идентичными, а амплитуда колебаний отличаются на e^{kh} раз.

Тогда распределения скоростей в обоих слоях будет одинаковыми.

$$U^I_{см} = U^{II}_{см} = \frac{\partial \varphi^I}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial x} = -kA^I e^{ky} \sin kx \cos \delta t,$$

$$V^I_{см} = V^{II}_{см} = \frac{\partial \varphi^I}{\partial y} = \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial y} = kA^I e^{ky} \cos kx \cos \delta t.$$

Модуль скорости обеих слоев будет иметь вид

$$V^I_{см} = V^{II}_{см} = kA^I e^{ky} \cos \delta t.$$

Уровень свободной поверхности и границы раздела двух фаз от соответствующих состояний этих границ до возмущения определяются равенствами:

$$\eta_1 = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi^I}{\partial t}\bigg|_{y=h} = 0,$$

$$\eta_2 = \frac{\delta}{g} A^I \cos kx \sin \delta t. \qquad (11)$$

Форма свободной поверхности

$y = \eta_1(x, y, t)$,

$$y = h - \frac{\delta}{g} A^I \cos kx \sin \delta t. \qquad (12)$$

Отклонение границы раздела:

$$\eta_2 = \frac{1}{g(\hat{\rho} - 1)} \left[\hat{\rho} \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^I}{\partial t}\right]\bigg|_{y=0}$$

$$\eta_2 = -\frac{A_1^I \delta}{g} e^{kh} \cos kx \sin \delta t$$

Форма свободной поверхности

$y = \eta_1(x, y, t)$,

$$y = h - \frac{\delta}{g} A^I \cos kx \sin \delta t. \qquad (13)$$

Отклонение границы раздела:

$$\eta_2 = \frac{1}{g(\hat{\rho} - 1)} \left[\hat{\rho} \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^I}{\partial t} \right] \Bigg|_{y=0},$$

$$\eta_2 = -\frac{A_1^I \delta}{g} e^{kh} \cos kx \sin \delta t.$$

Уравнением границы раздела обоих слоев будет

$$y(x,t) = -\frac{A_1^I \delta}{g} e^{kh} \cos kx \sin \delta t \qquad (14)$$

Из равенств (10) и (12) получаем, что с увеличением толщины верхнего слоя растет амплитуда колебания, как свободной поверхности, так и границы раздела обоих потоков. Из равенств (12) и (13) устанавливается, что амплитуда колебания нижнего слоя больше, чем верхнего слоя в e^{kh} раз.

Теперь рассмотрим случай второй зависимости частоты колебания от длины волны и распределения скоростей на верхнем слое.

$$\varphi^I(x,y,t) = A^I (e^{ky} + \Lambda_0 e^{2kh} e^{-ky}) \cos \delta t \cos kx,$$

$$U^I(x,y,t) = \frac{\partial \varphi^I}{\partial x} = \left[A^I e^{ky} + \Lambda_0 e^{2kh} e^{-ky} \right] (-k) \sin kx \cos \delta t,$$

$$V^I(x,y,t) = \frac{\partial \varphi^I}{\partial y} = kA^I \left[e^{ky} - \Lambda_0 e^{2kh} e^{-ky} \right] (-k) \cos kx \cos \delta t.$$

$$\eta_1 = -\frac{\delta A^I}{g} = (1 + \Lambda_0 e^{kh}) \sin \delta t \cos kx. \qquad (15)$$

Уравнением свободной поверхности будет:

$$y = h - \frac{\delta A^I}{g} = (1 + \Lambda_0 e^{kh}) \sin \delta t \cos kx \qquad (16)$$

Теперь определим отклонением границы раздела потоков от невозмущенного состояния:

$$\eta_2 = \frac{1}{g(\hat{\rho} - 1)} \left[\hat{\rho} \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^I}{\partial t} \right]_{y=0}$$

$$\eta_2 = -\frac{\delta A^I}{g(\hat{\rho} - 1)} \left[(1 - \Lambda_0 e^{kh}) \hat{\rho} - (1 + \Lambda_0 e^{-2kh}) \right] \cos kx \sin \delta t$$

Уравнением границы между слоями будет:

$$y = \frac{\delta A^I}{g(\hat{\rho} - 1)} \left[1 + \Lambda_0 e^{-2kh} - \hat{\rho} (1 - \Lambda_0 e^{-2kh}) \right] \qquad (17)$$

Распределение скоростей определяется равенствами:

$$\left. \begin{aligned} U^{II} &= -kA^I (1 - \Lambda_0 e^{-2kh}) e^{ky} \cos k\delta \cos kx \\ V^{II} &= kA^I (1 - \Lambda_0 e^{-2kh}) e^{ky} \cos k\delta \cos kx \end{aligned} \right\}, \qquad (18)$$

Учитывая равенства (5), (14) и (15), определим отклонение свободной поверхности верхнего слоя потока.

Таким образом, определены основные параметры волнового движения. В отличие от однофазного потока имеются отклонения, обусловленные взаимодействием фаз.

Напряженное состояние I–слоя выражается из комбинации выше приведенных формул и имеет вид:

$$\tau_{xycv} = \left(\mu_2^{(m)} f_2^{(m)} + \mu_1^{(m)} f_1^{m}\right) - k^2\left[\left(A_1^{(m)} + A_2^{(m)}\right)e^{ky} - \left(B_1^{(m)} - B_2^{(m)}\right)e^{-ky}\right]\sin kx \cos \delta tt$$

Гольдштейн [1] исследовал условия динамической устойчивости стратифицированных потоков в двух случаях, отличающихся один от другого распределением плотности по глубине.

Область устойчивости но Гольдштейну в первом случае определена графиком $n = f(\sigma)$, где $n = \dfrac{\varepsilon g h}{u_1^2}$; $\sigma = 2kh$ о; ε — относительная плотность; $\dfrac{1}{n} = \dfrac{u_1^2}{\varepsilon g h}$ — плотностное число Фруда (Fr'); $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; λ — длина волны па поверхности раздела. Во втором случае получено, что поверхность раздела устойчива для всех длин волн, если $n > \dfrac{1}{4}$.

Тейлор [2] рассмотрел динамическую устойчивость потоков с линейным распределением скорости по глубине и двумя случаями распределения плотности по глубине. В первом случае система устойчива, если $\alpha^2 \le -4g\beta$. Имея в виду, что $\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\beta = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ получим, что поверхность раздела устойчива, если $\dfrac{g}{\rho}\dfrac{\dfrac{\partial \rho}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \ge \dfrac{1}{4}$, или $Ri \ge \dfrac{1}{4}$ где Ri – число Ричардсона. Во втором случае Тейлор получил, что поверхность раздела устойчива, если: $\dfrac{1}{Fr'} \ge \dfrac{1}{2}$

Основные идеи энергетического метода изложены в работах Прандтля [5] и Тейлора [2]. Энергетические оценки Ричардсона и Прандтля показали, что турбулентность затухает при $Ri \ge 2$. Тэйлор, уточнив результат для той же схемы распределения плотности и скорости, получил, что динамическая устойчивость сохраняется при $Ri \ge 1$.

Кроме методов теории возмущений существуют другие методы исследования. Так, Харлеман, Уи, Тиссон [3], исследуя движения слоя воды большей плотности под неподвижным легким, из уравнения движения внутренних волн получили, что волны на поверхности раздела устойчивы, если

$$Fr' = \frac{\vec{n} u_2}{\sqrt{\dfrac{g\varepsilon\lambda}{\pi}}} = 1$$

Келлеган [4], используя критерий Джеффриуса для разрушения ветровых волн на свободной поверхности, получил параметр устойчивости θ для случая движения более легкого слоя пресной воды по неподвижному соленому нижнему

$$\theta = \left(\frac{1}{(Fr')^2 \mathrm{Re}_1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

где Fr' и Re — плотностное число Фруда и число Рейнольдса для движущегося слоя.

Нетюхайло [6,7,8], изучая аналогичную схему при движении температурно-стратифицированных потоков, получил методом малых колебаний критерий устойчивости

$$A = \frac{\left(g\dfrac{\Delta\rho}{\rho^2}\dfrac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}}{u_1}$$

Если положить в критерии θ Келлегана

$$Fr' = \frac{u_1}{\sqrt{\dfrac{g\Delta\rho h}{\rho^2}}} = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{Re} = \frac{u_1 h}{v}$$

то получим

$$\theta = \frac{\left(vg\dfrac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}{u_1}$$

Заметим, что критерий A отличается от θ только тем, что учитывает изменение вязкости с температурой.

Выводы

Зная естественную температуру сбрасываемой воды, пользуясь полученными зависимостями, можно определить стадию перемешивания и приближенно толщину переходного слоя в случае его образования, а также эпюру плотности при изменении температурный скорости движения верхнего слоя.

Литература

1. Абрамович Г.Н. Теория турбулетных струй. // М.Физматгиз 1976г.
2. Абромович.Г.Н. Прикладная газовая динамика. // М.Наука 1976г..
3. Снегиров И.А.Гидравлический прыжок в русле с обратным уклоном дна..- «Гидротехническое строительство» 1960, №4..
4. Цивин М.Н. О критерии перехода совершенного гидравлического прыжка в волнистый призматических горизонтальных руслах. «Известия вузов. Строительство и архитектура» Новосибирск.,1974,№2.
5. Справочник по гидравлике, под редакцией проф. Большакова В.А. Киев, «ВИЩА-ШКОЛА»1977
6. Яхшибаев Д.С. Закономерность взаимодействия атмосферы с паровыми выделениями зеркальной части водохранилищ. // Проблемы механики, №1, 2011. стр.76-79//.
7. Хамидов А.А., Махмудова Д.Э., Яхшибаев Д.С. Задача о волнах на поверхности многослойного потока дисперсной смеси жидкости // Вопросы вычисл.прик. математики: -Ташкент, ИИ АН РУз,2008,-вып.119-с.98-104.
8. Хамидов.А.А., Яхшибаев Д.С. Плоская задача о бесконечно малых волнах на поверхности дисперсной смеси // Проблемы механики, №3, 2010. стр.33-36.