УДК 621.396.41

Х.Н. Зайнидинов, И.Юсупов

ОКТАВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Аннотация: В работе рассмотрены вопросы теории, а также примеры расчетов, основанные на современных базисных функциях с компактными носителями для решения задач формирования дискретных выборок непрерывных сигналов с конечной энергией. Метод основан на законе асимптотического затухания до нуля значений модулей вейвлет коэффициентов при n→∞, причем скорость их движения к нулю зависит от выбора вейвлета. Этот метод можно определить как суммирование октавных составляющих энергии коэффициентов быстрых вейвлет-преобразований при двоичном законе уменьшения шагов выборки.

Ключевые слова: базисная функция, компактный носитель, выборка, вейвлет, вейвлет преобразования, быстрый алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Вейвлет-базисы получили широкое распространение в задачах сжатия информации, при отделении сигнала от шума и в других применениях. Подобно тому, как теоремы отсчетов положены в основу процессов восстановления сигналов *f(t)* как функций времени с ограниченным спектром по дискретному набору f(ih) отсчетов, возникает аналогичный вопрос и относительно вейвлетов. Возможна постановка в более широком плане: достаточно ли полученного дискретного множества значений для восстановления *f* как объекта без предположения о финитности спектра сигнала.

Значительный прогресс в использовании вейвлетов в различных приложениях связан, в первую очередь, с наличием быстрых алгоритмов спектральных дискретных преобразований, класс которых значительно шире множества быстрых преобразований в базисе комплексных экспоненциальных функций [1,2,3,5]. Для получения дискретных выборок необходимой длины, обеспечивающей заданную точность восстановления непрерывного сигнала, применяются собственные спектры вейвлет-коэффициентов в различных базисах, а не спектральные коэффициенты Фурье.

1.ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСОВ

Построение вейвлетов для конкретных задач обычно оптимизируют в смысле получения коэффициентов, которые близки к нулю. Это зависит, в основном, от гладкости функции f, числа нулевых моментов вейвлета ψ и от размера его носителя.

Известно, что ψ имеет p нулевых моментов, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k y\,(x) dx = 0, \quad 0 \le k < p. \qquad (1)$$

Это означает, что ψ ортогонален любому многочлену степени p-1. Условие ортогональности вейвлетов полиномам определяет их гладкость и знак переменность.

Вейвлет-базис задается с помощью итерационного алгоритма с изменением масштаба и сдвигом единственной функции. Это приводит к процедуре кратно масштабного анализа (КМА), которая представляет собой описание пространства L^2® через иерархически вложенные пространства V_s, которые не пересекаются и обладают следующим свойством: для любой функции f(x)∈V_s ее сжатая модификация принадлежит V_{s-1}. Кроме последовательности этих пространств, образуют систему попарно ортогональных подпространств $W_s \subset L^2$, которая получается следующим образом: Ws есть пространство, добавленное при переходе от V_s к следующему большему пространству V_{s-1} в последовательности

$$V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \ldots \subset V_s \subset V_{s-1} \subset \ldots \subset L^2.$$

Равенство вида

$$j\,(x) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k j\,(2x-k) \qquad (2)$$

с вектором коэффициентов $\{c_k\} \in l^2(Z)$ называется уравнением масштабирования и является основой всего процесса КМА.

В начале масштабирования выбирается шаг растяжения σ>1 оператора D_σ и используются только целочисленные значения оператора, обычно σ=2. Первичный вейвлет ψ должен удовлетворять равенству:

$$D_2 y\,(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-k), \qquad (3)$$

где c_k – коэффициенты, вычисляемые в виде скалярных произведений типа $(f,\psi_{n,k})$ и $(f,\psi_{n+1,k})$.

Если предположить, что

то семейство вейвлет-функций вида$\{\psi_{s,k}\}$ становится ортонормированным базисом.

Вектор коэффициентов c_0 первичного вейвлета однозначно определяет масштабирующую функцию φ для каждого типа вейвлета. При проведении вычислений отсутствует необходимость постоянно обращаться к масштабирующей функции и к первичному вейвлету для вычисления коэффициентов новых порядков. Этим свойством кратно масштабный анализ отличается от анализа Фурье, где необходимо при преобразованиях многократно вычислять значения базисной функции exp(-jω).

$$\psi_{s,k}(x) = 2^{-s/2}\psi\left(\frac{x-k2^s}{2^s}\right) = 2^{-s/2}\psi\left(\frac{x}{2^s}-k\right), \quad (4)$$

Преобразуем непрерывный сигнал f к дискретному виду, т.е. представим его как вектор-строку, содержащий n действительных чисел f_i $(i=0,1,\ldots, n-1)$. Для $f\in L^2$ частичная сумма с вейвлет-коэффициентами c_k интерпретируется как разность между двумя текущими приближениями f (с разрешениями 2^{-s+1} и 2^{-s}), и в кратно масштабном анализе фигурируют соответствующие наборы точек отсчетов. Приближение с разрешением 2^{-s} содержит всю необходимую информацию для вычисления вектора коэффициентов с более грубым разрешением 2^{-s-1}.

Базис Хаара получается из кратно масштабных кусочно-постоянных функций [1,4,7]. Масштабирующая функция имеет вид 1[0,1]. Соответствующий фильтр имеет два ненулевых коэффициента, равных $2^{-1/2}$ при n=0 и n=1. В [1] получено выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi(x-1)-\varphi(x)\right), \quad (5)$$

откуда

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0\le x<1, \\ -1, & \text{если } 1/2\le x<1, \\ 0 & \text{в других точках.} \end{cases} \quad (6)$$

Вейвлет Хаара является простейшим представителем семейства вейвлетов Добеши. Их классификация проводится по показателю числа нулевых моментов. Данный вейвлет имеет только один нулевой момент и получил в литературе обозначение Db1. Он характеризуется наименьшим носителем среди всех ортогональных вейвлетов, симметричен и алгоритм вычисления коэффициентов не содержит операций умножения. Но его масштабирующая функция и первичный вейвлет разрывны и поэтому плохо приспособлены для аппроксимации гладких функций. Процесс сходимости алгоритма обратного вейвлет-преобразования Хаара к функции f при увеличении числа итераций является очень медленным, что объясняется слабым затуханием частотной характеристики, огибающая которой асимптотически стремится к нулю по закону $|\omega^{-1}|$.

2.ОКТАВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ СИГНАЛА

Для оценки сходимости к полной энергии сигнала его спектральной энергии по вектору квадратов коэффициентов необходимо вычислять октавный спектр энергии [1,6,9]. Его достоинством является свойство инвариантности по отношению к сдвигам сигналов во времени, если они стационарны. Это уникальное свойство, которым обладают также спектры в базисе комплексных экспоненциальных функций Фурье.

Для получения интегрального значения спектра энергии необходимо вычислить совокупности сумм квадратов ортонормированных вейвлет-коэффициентов Хаара с учетом двоичных весов октав [1,8]:

$$E_e = \left(\left(c_0^2+c_1^2\right)+2\left(c_2^2+c_3^2\right)+2^2\sum_{k=2^2}^{2^3-1}c_k^2+2^3\sum_{k=2^3}^{2^4-1}c_k^2+\ldots+2^q\sum_{k=2^{q-1}}^{2^q-1}c_k^2\right)n. \quad (7)$$

(7)

где q – наибольший порядок итераций, применяемых при реализации быстрого алгоритма, а двоичные множители необходимы для учета весов октавных ортогональных составляющих в итоговой сумме.

Таким образом, может быть построена схема алгоритма последовательных приближений, позволяющего обосновать минимальную длину L выборки дискретных отсчетов непрерывного сигнала *f(x)*, обеспечивающую заданную величину ошибки ε аппроксимации энергии сигнала на основе алгоритмов быстрых вейвлет-преобразований (БВП). Обозначим величину спектральной энергии, полученную на итерации с номером s, как E_s, а на последующей итерации с номером s+1 – как E_{s+1}. Тогда признаком достижения заданной точности при повторении итераций становится момент выполнения неравенства:

$$\left|E_{e,s+1}-E_{e,s}\right|\le\varepsilon, \quad s=1,2,\ldots \quad (8)$$

Здесь можно следует обратиться к известной теореме Планшереля:

Теорема 1 Для каждой квадратично суммируемой функции $f(x) \in L^2(-\infty,\infty)$ интеграл

$$F_k(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)\,dx \quad (9)$$

сходится в L^2 к некоторой функции $F(\omega)$ при $k\to\infty$, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)-F_k(\omega)\right|^2 d\omega = 0. \quad (10)$$

Проблема повышения скорости сходимости вейвлет-приближений к функции и, следовательно, минимизации числа коэффициентов имеет большое значение. Она может быть решена за счет применения базисных функций Добеши более высоких порядков. Полный набор функций $\varphi_{s,k}$ и $\psi_{s,k}$ при всех s образуют ортонормированный базис L^2®. При выполнении КМА они играют роль низкочастотных и высокочастотных фильтров, которые дополняют друг друга [1]. Эти фильтры имеют 2p нулевых коэффициентов. Носитель соответствующей масштабирующей функции есть отрезок $[0,2p-1]$.

Вейвлеты Добеши высоких порядков являются более гладкими, чем вейвлеты Хаара и, кроме того, их коэффициенты по модулю убывают намного быстрее. Поэтому, скорость восстановления сигналов при обратном преобразовании и сходимость спектральной энергии к функции при добавлении коэффициентов новых октав становятся более высокими. Естественным образом ставится вопрос отыскания формы вейвлета, которому соответствует наивысшая скорость сходимости и, в итоге, наименьшее число итераций.

Выберем из семейства ортонормированных вейвлетов с конечным носителем в качестве примера вейвлет Db2 с двумя нулевыми моментами. Набор дискретных элеменов фильтров первичного вейвлета в этом случае содержит 4 элемента. Быстрое вейвлет-преобразование может быть реализовано в виде каскадного соединения низкочастотных и высокочастотных фильтров.

Энергия сумм квадратов взвешенных коэффициентов – результатов ортонормированного преобразования может быть определена по формуле, аналогичной (7) с учетом числа элементов первичного вейвлета:

$$E_e = \left(\sum_{k=0}^{3} c_k^2 + 2 \sum_{k=2^2}^{2^3-1} c_k^2 + 2^2 \sum_{k=2^3}^{2^4-1} c_k^2 + \ldots + 2^p \sum_{k=2^{q-1}}^{2^q-1} c_k^2 \right) n. \tag{11}$$

При увеличении порядка непрерывных вейвлетов Добеши скорость убывания модулей коэффициентов повышается. Задача выборки необходимого вектора коэффициентов, обеспечивающих необходимое значение ε, сводится к поиску конкретного типа вейвлета, минимизирующего число итераций алгоритма БВП.

3.ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

В мировой практике широким фронтом идет развитие методов обработки и интерпретации цифрового материала, полученного в результате измерений интенсивностей полей различной физической природы. Возьмем в качестве непрерывного сигнала экспериментально полученную функцию f(x), график которой на замкнутом отрезке [a,b] изображен на рис. 1. Он содержит 128 отсчетов, что составляет почти половину длины выборки функции профиля двумерного поля.

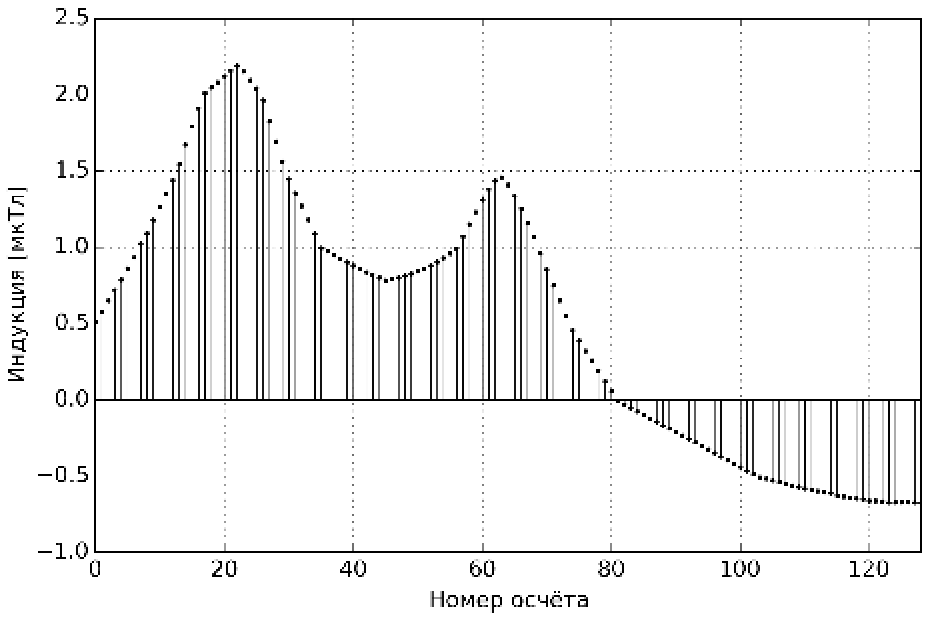

Рис.1. График экспериментально полученного непрерывного сигнала

С целью выполнения примеров оценки энергии высокочастотных вейвлет-коэффициентов для вычисления длины выборки сигнала произведем расчеты для двух случаев:

Шаг выборки h=2 сигнала и число отсчетов в выборке равно 64;

Шаг выборки h=1, т.е. выборка с удвоенной частотой и число отсчетов того же сигнала равно 128. На рис. 2. Приведена гистограмма первой половины коэффициентов Хаара при диадном упорядочении их номеров. Очевидно, что скорость убывания значений модулей коэффициентов при увеличении номера определяется частотной характеристикой вейвлета Хаара, которая изменяется по закону $F_H(\omega)\sim\omega^{-1}$. Для повышения скорости сходимости энергии спектра к полной энергии при $n\rightarrow\infty$ необходимо перейти к использованию вейвлетов более высоких порядков (Db3, Db4 и т.д.)

Применим к функции f(x) алгоритм быстрого преобразования в базисе непрерывных вейвлет-функций Добеши db2 (p=2).

Частотная характеристика Фурье такого вейвлета, изменяется по закону $F_{db2}(\omega)\sim\omega^{-2}$. Гистограмма первой половины вектора из 128 коэффициентов разложения функции f(x) по базисным функциям db2 при диадном способе упорядочения приведена на рис. 3.

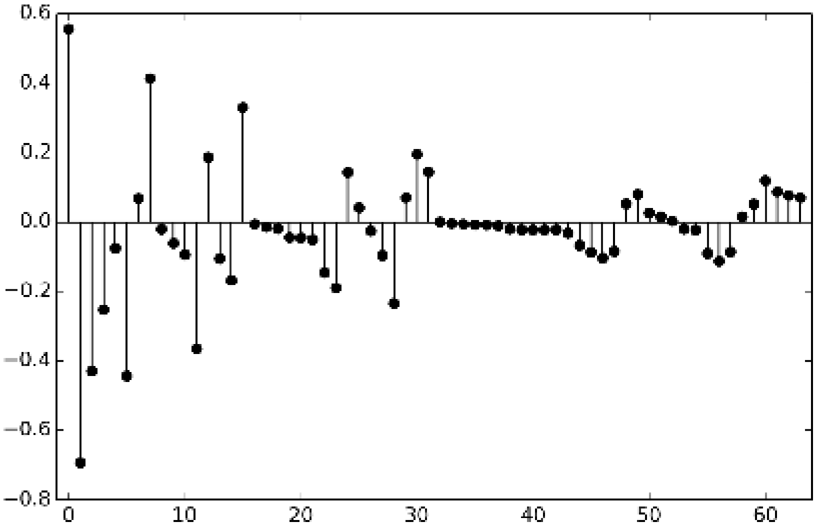

Рис. 2. Гистограмма первой половины коэффициентов Хаара при диадном упорядочении их номеров

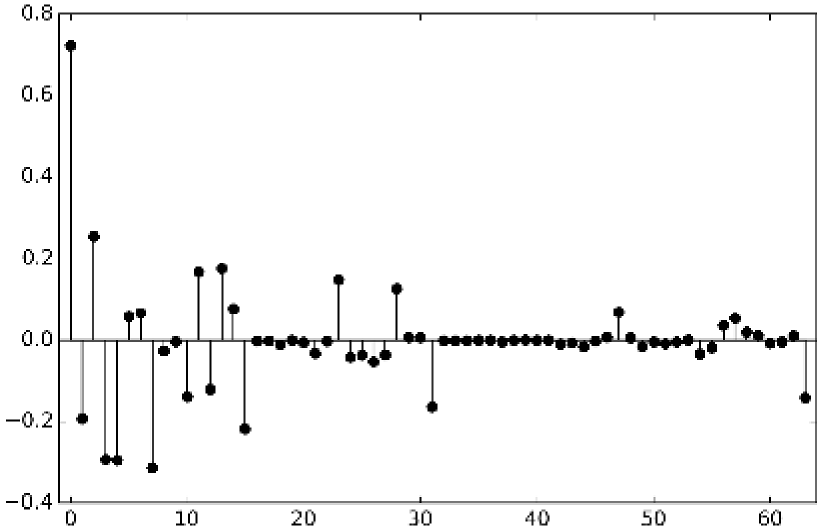

Рис. 3. Гистограмма первой половины вектора из 128 коэффициентов разложения функции *f(x)* по базисным функциям db2 при диадном способе упорядочения

Расчеты спектральной энергии выполнены в соответствии с двумя вариантами:

При шаге h=2 (т.е. 64 отсчета функции и соответственно 64 вейвлет-коэффициента) значение энергии получается равным E_ε=137.158;

При удвоенной частоте выборки (128 отсчетов, шаг h=1, 128 коэффициентов) получаем E_c=137.498. Таким образом, можно говорить о движении спектральной энергии последовательности вейвлет-коэффициентов к некоторому значению полной энергии.

Заключение.

Таким образом, значительный прогресс в использовании вейвлетов в различных приложениях связан, в первую очередь, с наличием алгоритмов быстрых спектральных дискретных преобразований, класс которых значительно шире набора быстрых преобразований в базисе комплексных экспоненциальных функций. Для обоснования необходимых длин дискретных выборок непрерывных сигналов, обеспечивающей заданную точность восстановления, используются собственные спектры вейвлет-коэффициентов Добеши различных порядков, а не спектральные коэффициенты Фурье.

Приведенные примеры конкретных сигналов - функций профилей геомагнитного поля, которые в результате обработки информации об этом поле в виде отсчетов с помощью алгоритмов быстрых вейвлет-преобразований и последующей оценки энергии (мощности) октавного спектра вейвлет-коэффициентов дают возможность судить о степени приближения длин выборок к необходимой и достаточной величине.

Литература

1.Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Техносфера. 2006. 272 с.

2.Ахмед Н, Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. Пер. с англ. М.: Связь. 1980. 248 с.

3.Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук.

Т.171. 2001. № 5. с.465-501.

4.Новиков А.К. Полиспектральный анализ.– СПб.: ЦНИИ Крылова, 2000,-162 с.

5.Свиньин С.Ф. Теория и методы формирования выборок сигналов с инфинитными спектрами.-Спб.: Наука, 2016. –71с.

6.Hakimjon Zayniddinov, Madhusudan Singh, Dhananjay Singh Polynomial Splines for Digital Signal and Systems (Монография на англиском языке). LAMBERT Academic publishing, Germany, 2016 year, 208 p.

7.Зайнидинов Х.Н. Методы и средства обработки сигналов в кусочно-полиномиальных базисах. Монография. Ташкент - «Фан ва технология» - 2014, 190 с.

8.Zaynidinov H.N., Dannanjay Singh, Hoon Jae Lee. Piecewise-quadratic Harmut basis function and their application to problems in digital signal processing. International Journal of Communication Systems, John Wiley & Sons, Ltd. ,DOI: 10.1002/dac.1093, Jan. 2010. London, SCI-E. *www.interscience.wiley.com*

9.С. Малла. «Вейвлеты в обработке сигналов». Москва. «Мир». 2005 г.

Зайнидинов Хакимжон Насиридинович

д.т.н., профессор, зав.кафедрой «Информационные технологии» ТУИТ.

Тел. Раб. 238-65-19, 238-64-37, моб.(98) 307 63 75

Эл. почта: tet2001@rambler.ru

Юсупов Иброхим

ассистент кафедры Информационные технологии» ТУИТ.

Тел. Раб. 238-65-19, 238-64-37, моб.(90) 996 44 96

Эл. почта: ibrohimbek.211_10@mail.ru

Zaynidinov H.N., Yusupov I

Octal Methods for Calculation of Signal Energy on the basis of Wavelet-Transformations

Abstract. In the article, the problems of the theory are considered, as well as examples of calculations based on modern basis functions with compact carriers for solving problems of forming discrete samples of continuous signals with finite energy. The method is based on the law of asymptotic attenuation of the values of the wavelet coefficient moduli to zero as $n \to \infty$, and the rate of their motion to zero depends on the choice of the wavelet. This method can be defined as the summation of the octave energy components of the coefficients of fast wavelet transformations with the binary law of decreasing the sampling steps.

Key words: basic function, compact vector, sample, wavelet, wavelet transform, fast algorithm.

УДК 004.42

Ш.Н. Саидрасулов, О.Т. Алламов

ТРАНСПОРТ ВОСИТАЛАРИ ҲАРАКАТИНИ ТАРТИБГА СОЛИШДА КАТТА МАСШТАБЛИ ГРАФГА ТАҚСИМЛАНГАН ҲОЛДА ПАРАЛЛЕЛ ИШЛОВ БЕРИШ УСУЛИ

Ҳозирда “Ақлли шаҳар”, “Ҳавфсиз шаҳар” ва “Ҳавфсиз туризм” лойиҳаларини замонавий технология асосида қуришга катта эътибор қаратилмоқда. Фойдаланувчилар учун бир жойдан бошқа жойга боришларида энг мақбул маршрутларни аниқлаб бериш, самарали саёҳат вақтини режалаштириш ва муҳим объектлар ҳақида маълумот олиш каби масалаларни ечиш муҳим вазифалардан ҳисобланади. Ушбу ҳолатларни инобатга олиб мақолада транспорт воситаларини ҳаракатини тартибга солишда катта масштабли графга тақсимланган ҳолда параллел ишлов бериш усули яратилган. Натижада, катта масштабли граф маълумотларга параллел ва тақсимланган ҳолда қайта ишлаш учун алгоритми ишлаб чиқилган ва катта ҳажмдаги маълумотлар учун тажриба синовларидан ўтказилди. Алгоритмни тестлаш учун катта масштабли граф асосида самарадорлилиги кўрсатилган.

Калит сўзлар:энг мақбул маршрутни танлаш, катта масштабли гарф, тақсимланган граф, параллел ҳисоблаш, транспорт воситаларини тартибга солиш.

Кириш. Республикамизда “Ақлли шаҳар”, “Ҳавфсиз шаҳар”, “Ҳавфсиз туризм” лойиҳаларини ҳаётга тадбиқ этишда транспорт воситалари ҳаракатини тартибга солиш ва шаҳарларда тирбандликларни камайтириш учун дастурий воситалар мажмуасини ишлаб чиқишнинг самарали усул ва алгоритмларини яратиш масаласи долзарб ҳисобланади[1, 2].

Тадқиқот давомида ўрганишлар шуни кўрсатдики, транспорт воситаларини бошқарувчи ҳайдовчилар томонидан бир жойдан бошқа жойга боришда катта йўллардан юришлари оқибатида катта йўлларда тирбандликлар ортиб маршрут вақтини узайиб кетишига ва сарф ҳаражатларни ортишига сабаб бўлмоқда. Аслида бир жойдан бошқа жойга ўтиш учун захира йўллар имкониятлари катта бўлиб, ҳайдовчилар қайси йўллар мақбуллигини билмаганлиги туфайли юқорида келтирилган ҳолатлар содир бўлмоқда.

Муаммонинг қўйилиши.Шаҳарда транспорт воситаларини ҳаракатини тартибга солишда дастурий воситалар мажмуасини ишлаб чиқишга имкон берувчи катта масштабли графга тақсимланган ва параллел ишлов бериш усули кўриб чиқилган.

Транспорт воситаларини тартибга солиш дастурий воситаси графлар назариясига асосланган бўлиб, энг мақбул маршрутларни танлашда катта маштабли маълумотларни қайта ишлашга тўғри келади. Натижада, ҳисоблаш жараёнлари мураккаб бўлиб кетишига олиб келади. Шуни этиборга олиб, масалани хусусиятидан келиб чиққан ҳолда граф маълумотларни тақсимланган ҳолда ишлов бериш усули қўлланилди. Ҳудудларни граф маълумотларини алоҳида ва улар орасидаги боғланишни алоҳида сақлаш, маршрут топишда ҳисоблаш жараёнларини камайтиради. Маълумотлар тузилмасини бундай шакллантириш ҳисоблаш воситалари ядроларида