УДК 51-7:519.63:519.614

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ВЕКТОРА ДЛЯ МЕТОДА ПРЯМЫХ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

Хужаев И.К.
д.т.н., ведущий научный сотрудник-исследователь
Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий

Хужаев Ж.И.
старший научный сотрудник-исследователь
Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий,
тел.: +(99890) 922-26-84, e-mail: jamolhoja@mail.ru

Равшанов З.Н.
научный сотрудник
Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий,
тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Представлены алгоритмы основной части подготовительного этапа решения уравнений параболического типа на одно-, прямоугольных двух- и трехмерных областях в декартовых координатах методом прямых. Для определения значений собственных чисел образованных при аппроксимации лапласиана для различных сочетаний граничных условий трехдиагональных матриц составлены тригонометрические уравнения. В простых случаях получены их аналитические решения. Для остальных случаев предложен двухэтапный численный метод их решения. Для нахождения составляющих собственных векторов предложен точный аналитический метод, основанный на особенностях структуры исходных матриц и на некоторые теоремы матричного исчисления. Предложен численный метод обращения матриц, основанный на методе Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Ключевые слова: метод прямых, трехдиагональная и диагональная матрицы, диагонализация матриц, определитель, алгебраическое дополнение, нормализация вектора.

NUMERICAL–ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING PROBLEMS ON EIGENVALUES AND EIGENVECTORS FOR THE LINEAR METHOD IN RECTANGULAR AREAS

Khujaev I.Q. Hujaev J.I, RavshanovZ.N.

The algorithms of the main part of the preparatory phase of solving the equations of parabolic type in the one-, two- and three-dimensional rectangular areas in Cartesian coordinates by the linear method are presented. Trigonometric equations are composed for determining the eigenvalues of the Laplace approximation formed for various combinations of boundary conditions of matrices with three diagonals. Their analytical solutions are obtained for simple cases. For other cases, a two-step numerical method for solution is proposed. To find the components of the eigenvectors we offer an accurate analytical method based on the features of the original matrix structure and some theorems of matrix calculus. A numerical matrix inversion method based on the method of Gauss with pivoting on a column is offered.

Keywords: linear method, matrix with one and three diagonals, diagonalizing matrices, determinant, algebraic complement, vector normalization.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР УСУЛИНИ ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ СОҲАЛАРГА ҚЎЛЛАШДА ХОС СОНЛАР ВА ХОС ВЕКТОРЛАР МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШ УЧУН СОНЛИ-АНАЛИТИК УСУЛЛАР

Хўжаев И.Қ., Хўжаев Ж.И., Равшанов З.Н.

Параболик типдаги тенгламаларни декарт координаталаридаги бир, тўғри бурчакли икки ва уч ўлчовли соҳаларда тўғри чизиқлар усулида ечишнинг тайёрлов босқичининг асосий қисмлари учун алгоритмлар келтирилган. Лаплас операторини турли чегаравий шартларда аппроксимация қилганда ҳосил бўладиган уч диагоналли матрицаларнинг хос сонларига нисбатан тригонометрик тенгламалар келтириб чиқарилган. Оддий ҳолларда бу тенгламаларнинг аналитик ечимлари олинган. Бошқа ҳолларда бу тенгламаларни ечиш учун икки

босқичли сонли усул таклиф этилган. Хос векторларнинг ташкил этувчиларини топиш учун берилган матрицанинг хос хусусиятлари ва чизиқли алгебранинг айрим теоремаларига асосланган аниқ аналитик усул ишлаб чиқилган. Тескари матрицани топиш учун Гаусснинг устун бош элементини танлаш усулига асосланган сонли усул таклиф этилган.

Таянч иборалар: Тўғри чизиқлар усули, уч ва бир диагоналли матрицалар, бир диагоналли матрицага келтириш, детерминант, алгебраик тўлдирувчи, векторни нормаллаш.

1. Введение

Для численного решения конечноразностных уравнений широко применяются левая, правая, встречная, поточная, матричная и другие виды прогонки [1-3]. Для решения задач с дополнительным неизвестным (например, в виде неизвестного градиента давления) разработан метод Симуни, который успешно реализуется при решении задач пограничного слоя [3]. Разработан метод решения уравнения Гельмгольца, когда в отдельном уравнении участвуют пять неизвестных, представляющие неизвестной функции в пяти точках креста [4]. В литературе описываются различные способы приведения многомерных задач к одномерной: метод предиктор-корректор, метод переменных направлений, расщепления уравнений по математическим и физическим параметрам и другие [1-4]. В целом, разработаны различные способы численного решения нелинейных одно- и многомерных уравнений математической физики.

Истоки развития метода конечных разностей тесно связано методом прямых. Метод прямых – дифференциально-разностный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных привлекает специалистов тем, что однажды подготовив необходимые вспомогательные матрицы, расчет ведется маршевым по времени методом при наименьшей трате машинного времени. Метод хорош тем, что вместо прогонки предлагается использовать возможности диагонализации трехдиагональной матрицы. Последние разнообразны и зависят от реализуемых граничных условий, что выражается в первой и последней строках матрицы.

В рамках работы эти матрицы представлены на основе материалов С.Каримбердиевой [5], которые относятся к одинаковым граничным условиям I и III родов. Здесь класс решаемых задач расширяется за счет смешанных граничных условий. В целом, рассматриваются всех вариантов граничных условий, кроме одинаковых граничных условий II рода, и некоторые из них повторяют известных из литературы результатов.

2. Постановка задачи

В работе В. Н. Фаддеевой [6] матрица перехода из второй производной по отдельной координате к конечно-разностному оператору при первом роде граничных условий имеет вид

$$A=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}_n .$$

В ней определены значения собственных чисел $\lambda_i=-2\left(1+\cos\dfrac{\pi i}{n+1}\right)$ для диагональной матрицы $\Lambda=diag\{\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_n\}$ и элементы собственных векторов $\nu_{i,j}=(-1)^{i+j}\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}\sin\dfrac{\pi ij}{n+1}$ для фундаментальной матрицы $V=\left\|\nu_{i,j}\right\|$.

Эти матрицы составлены для случая, когда отрезок $[0;\ l]$ разделен на $n+1$ равные части и узлы пронумерованы как $0,\ 1,\ 2,...,\ n,\ n+1$. Соответственно, количество строк и столбцов матриц A,Λ и V составляет n. В цитируемой работе доказано, что матрица V симметрична и равна своей обратной матрице.

Применение интегро-интерполяционного метода к граничным условиям I, II и III родов [5] при равномерной сетке с шагом h приводит к матрице

$$A=\begin{Vmatrix} a' & b' & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & c' & d' \end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты a' и b' образовались при реализации условий на начало отрезка. При условии I рода отсчет строк начинается от 1 и $a'=-2,\ b'=1$. При условиях II и III родов граничных условий на начало отрезка отсчет строк начинается от 0. При граничных условиях II рода имеем $a'=-2,\ b'=2$; а при граничных условиях III рода: $a'=-2-2\sigma_0 h,\ b'=2$.

Коэффициенты c' и d' отражают граничных условий в конце отрезка. Для I рода граничных условий они находятся в n-й строке (т.е. при одинаковых условиях I рода отсчет строк идет от 1 до n) и составляют $c'=1,\ d'=-2$. В двух остальных случаях они находятся в $n+2$-й строке (как уже отметили, при II и III рода граничных условиях на начало отрезка нумерация строк и столбцов идет от 0) и имеют значения: $c'=2,\ d'=-2$ при II роде и $c'=2,\ d'=-2-2\sigma_l h$ при III роде граничных условий в конце отрезка.

Таким образом, выясняется, что при обычных или смешенных граничных условиях II и III рода матрицы имеют размер $n+2$. Если в одной из границ реализовано условие I рода, то размер матриц составляет $n+1$, а если оба граничные условия имеют I род, то размер матриц составляет n.

Необходимо разработать алгоритмы, реализующие положений работы В. Н. Фаддеевой для произвольного сочетания граничных условий I, II и III родов. Т.е. для представленной матрицы A необходимо составить диагональную матрицу Λ, элементы которой суть собственные числа матрицы A, и фундаментальную матрицу V, столбцы которой составляют собственных векторов заданной матрицы. Эти матрицы необходимы для приведения матричного уравнения к диагональному.

3. Формирование задачи о собственных числах и векторах трехдиагональной матрицы

Результаты решения задач на собственные числа и вектора для случая I рода граничных условий приведены в части постановки задачи. Из остальных случаев более сложной является случай III рода условий на границах, когда матрица $n+2$-го размера имеет вид

$$A=\begin{vmatrix} -2-2\sigma_0 h & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2-2\sigma_l h \end{vmatrix}_{n+2}.$$

Для этого случая демонстрируем решение задачи на собственные числа.

Положим, что

$$A=V\Lambda V^{-1}.$$

Умножив обеих сторон данного равенства на V^{-1} слева, получим

$$V^{-1}A=diag\{\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1}\}V^{-1}.$$

Полагая $V^{-1}=\left\|v^{-}_{s,p}\right\|$, раскрываем последнее равенство относительно s-й строки при $s=0,1,\dots,n,n+1$:

$$\begin{cases} \left(-2-2\sigma_0 h\right)v_{s,0}+v_{s,1}=v_{s,0}\lambda_s, \\ 2v_{s,0}-2v_{s,1}+v_{s,2}=v_{s,1}\lambda_s, \\ v_{s,k-1}-2v_{s,k}+v_{s,k+1}=v_{s,k}\lambda_s \quad \text{при} \quad k=2..n-1, \\ v_{s,n-1}-2v_{s,n}+2v_{s,n+1}=v_{s,n}\lambda_s, \\ v_{s,n}+\left(-2-2\sigma_l h\right)v_{s,n+1}=v_{s,n+1}\lambda_s. \end{cases}$$

4. Решение задачи о собственных числах для граничных условий III рода

Переведем все члены в левую часть знака равенства и введем обозначение

$$-2-\lambda_s=2\cos\theta_s.$$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \left(2\cos\theta_s-2\sigma_0 h\right)v_{s,0}+v_{s,1}=0, \\ 2v_{s,0}+2\cos\theta_s v_{s,1}+v_{s,2}=0, \\ v_{s,k-1}+2\cos\theta_s v_{s,k}+v_{s,k+1}=0 \quad \text{при} \quad k=2..n-1, \\ v_{s,n-1}+2\cos\theta_s v_{s,n}+2v_{s,n+1}=0, \\ v_{s,n}+\left(2\cos\theta_s-2\sigma_l h\right)v_{s,n+1}=0. \end{cases}$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s-2\sigma_0 h & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta_s-2\sigma_l h \end{vmatrix}_{n+2}$$

имеет нулевое значение, то есть

$$D_{n+2}=0.$$

Разложим определитель по первому столбцу

$$D_{n+2}=(-1)^{0+0}\left(2\cos\theta_s-2\sigma_0 h\right)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta_s-2\sigma_l h \end{vmatrix}_{n+1}+$$

$$+\left(-1\right)^{1+0}2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2\cos\theta_s & 2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2\cos\theta_s - 2\sigma_l h \end{vmatrix}_{n+1}.$$

Первый определитель разложим по последнему столбцу. Второй определитель сначала разложим по первой строке, а потом – по последнему столбцу. Тогда получим

$$D_{n+2} = \left(2\cos\theta_s - 2\sigma_0 h\right)\Big[\left(-1\right)^{n+1+n+1}\left(2\cos\theta_s - 2\sigma_l h\right)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_n +$$

$$+\left(-1\right)^{n+1+n}2\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_n \Big] -$$

$$-2\Big[\left(-1\right)^{n+n}\left(2\cos\theta_s - 2\sigma_l h\right)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_{n-1} +$$

$$-\left(-1\right)^{n+n-1}2\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \Big].$$

Введем обозначение

$$D_n^{(0)} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_n.$$

Тогда вычисляемый определитель, с учетом разложения по последним строкам второго и четвертого определителей, приобретает вид

$$D_{n+2} = (2\cos\theta_s - 2\sigma_0 h)\times$$
$$\times\left[\left(2\cos\theta_s - 2\sigma_l h\right)D_n^{(0)} - 2D_{n-1}^{(0)}\right] -$$
$$-2\left[\left(2\cos\theta_s - 2\sigma_l h\right)D_{n-1}^{(0)} - 2D_{n-2}^{(0)}\right] =$$
$$= \left(2\cos\theta_s - 2\sigma_0 h\right)\left(2\cos\theta_s - 2\sigma_l h\right)D_n^{(0)} -$$
$$-\left(8\cos\theta_s - 4\sigma_0 h - 4\sigma_l h\right)D_{n-1}^{(0)} + 4D_{n-2}^{(0)}.$$

Не трудно доказать [6], что

$$D_n^{(0)} = \frac{\sin(n+1)\theta_s}{\sin\theta_s}.$$

В связи с этим уравнение $D_{n+2} = 0$ принимает вид

$$\left(\cos\theta_s - \sigma_0 h\right)\left(\cos\theta_s - \sigma_l h\right)\sin(n+1)\theta_s -$$
$$-\left(2\cos\theta_s - \sigma_0 h - \sigma_l h\right)\sin n\theta_s + \sin(n-1)\theta_s = 0.$$

Полагая, что $\sin\theta_s \neq 0$ и $\cos\theta_s \neq \sigma_l h$, из данного уравнения численным способом находим $n+2$ первые положительные решения θ_s, которые позволяют нам вычислить значения собственных чисел:

$$\lambda_s = -2 - 2\cos\theta_s$$

при $s = 0, 1, ..., n, n+1$.

Аналогичные уравнения составлены нами и для других вариантов сочетания граничных условий. Представим их.

Для задач I-II (первая и вторая цифры указывают на род реализуемых граничных условий соответственно на начало и в конец отрезка) и II-I получены уравнения $\cos(n+1)\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Первые n корня находим из первого уравнения, а последний корень – из второго уравнения.

Для задачи I-III n +1 корня находим из векового уравнения

$$\cos(n+1)\theta\sin\theta - \sigma_l h\sin(n+1)\theta = 0.$$

Для задачи II-II необходимые значения θ точно определяется из уравнений $\sin(n+1)\theta = 0$ и $\cos\theta = \pm 1$.

Для задачи II-III значения θ находим из уравнения

$$\cos\theta\left(\cos\theta - \sigma_l h\right)\sin(n+1)\theta -$$
$$-\left(2\cos\theta - \sigma_l h\right)\sin n\theta + \sin(n-1)\theta = 0.$$

Для задачи III-I n+1 положительные корни находим из уравнения

$$\cos(n+1)\theta\sin\theta - \sigma_0 h\sin(n+1)\theta = 0$$

Для задачи III-II уравнение имеет вид

$$\left(\cos\theta - \sigma_0 h\right)\cos\theta\sin(n+1)\theta -$$
$$-\left(2\cos\theta - \sigma_0 h\right)\sin n\theta + \sin(n-1)\theta = 0.$$

Как видно из представленного материала, для задач I-I, I-II, II-I и II-II значения θ, соответственно и значения собственных чисел λ, определены точно. В случаях, когда тригонометрическое уравнение имеет сложный вид, то его можно решить численно в два этапа. В первом этапе, например, с шагом 0.001 можно выделить промежутки, в которых находится θ_s. Во втором этапе можно использовать метод дихатомии [7], 30 шагов которого, с учетом шага 0.001 выделения корней, обеспечить точность 10^{-12}.

Для каждого из собственных значений λ_s матрицы A необходимо найти соответствующие собственные векторы. Предлагается следующий вариант решения этой задачи.

5. Аналитическое решение задачи о собственных векторах

Сначала докажем, что для матрицы A имеет место равенство [6]

$$a_{0,s}A_{0,k} + a_{1,s}A_{1,k} + ... + a_{n,s}A_{n,k} + a_{n+1,s}A_{n+1,k} = 0,$$

где $a_{p,s}$ – элемент матрицы A; $A_{j,s}$ – алгебраическое дополнение j-й строки s-го столбца матрицы A.

При $k \neq s$ выражение, находящееся в левой части равенства, представляет разложения определителя по s-му столбцу, но по k-му алгебраическому дополнению матрицы. В этом случае в k-м алгебраическом дополнении находится столбец, элементы которого повторяют элементов столбца разложения. Иначе говоря, данное разложение есть значение определителя с одинаковыми столбцами. Соответственно, нулевой результат выражения равен значению правой части равенства.

При $s = k$ данная сумма представляет разложения определителя D_{n+2} по s-му столбцу. А определитель D_{n+2}, согласно нашим суждениям, имеет нулевое значение. И поэтому элемент $\nu_{p,s}$ s-го собственного вектора матрицы A имеет значение

$$\nu_{p,s} = c_s A_{p,s},$$

где c_s – нормирующий множитель s-го собственного вектора матрицы A.

Приступим к вычислению алгебраических дополнений матрицы A и осуществляли это для общего случая, когда порядок матрицы равен конкретному число 8:

$$A_8 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

В этом случае придется вычислить значений 64-х определителей размера 7×7. При этом опираемся на следующие положения решаемой задачи и высшей алгебры [5, 6, 8-10].

П1. Обозначение $D_n^{(0)}$ используется для значения определителя, диагональные элементы которой равны $2\cos\theta_s$, соседние элементы – 1, а остальные элементы определителя – нули. При $n>1$ пользуемся формулой $D_n^{(0)} = \dfrac{\sin(n+1)\theta_s}{\sin\theta_s}$. Дополним данный список новыми элементами $D_0^{(0)}=1,\ D_1^{(0)} = 2\cos\theta_s$.

П2. Значение определителя треугольных матриц или части треугольного определителя вычисляется как произведение диагональных элементов.

П3. Пользуемся значением определителя

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_n =$$

$$= aD_{n-1}^{(0)} - bD_{n-2}^{(0)}.$$

П4. Пользуемся значением определителя

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & d \end{vmatrix}_n =$$

$$= dD_{n-1}^{(0)} - cD_{n-2}^{(0)}.$$

Результаты этих вычислений представим для случая определителя с размером $(n+2)\times(n+2)$.

Представим значения алгебраических дополнений первого столбца:

$$A_{0,0} = (-1)^{0+0}\left(dD_{n-1}^{(0)} - cD_{n-2}^{(0)}\right),$$

$$A_{1,0} = (-1)^{1+0}\, b\left(dD_{n-2}^{(0)} - cD_{n-3}^{(0)}\right),$$

$$A_{2,0} = (-1)^{2+0}\, b\left(dD_{n-3}^{(0)} - cD_{n-4}^{(0)}\right), \dots,$$

$$A_{i,0} = (-1)^{i+0}\, b\left(dD_{n-i-1}^{(0)} - cD_{n-i-2}^{(0)}\right), \dots$$

$$A_{n-1,0} = (-1)^{n-1+0}\, b\left(dD_1^{(0)} - cD_0^{(0)}\right),$$

$$A_{n,0} = (-1)^{n+0}\, bd,$$

$$A_{0,0} = (-1)^{n+1+0}\, b.$$

Переходим к значениям алгебраических дополнений второго столбца:

$$A_{0,1} = (-1)^{0+1}\left(dD_{n-2}^{(0)} - cD_{n-3}^{(0)}\right),$$

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}\, a\left(dD_{n-2}^{(0)} - cD_{n-3}^{(0)}\right),$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1}\, a\left(dD_{n-3}^{(0)} - cD_{n-4}^{(0)}\right), \dots,$$

$$A_{i,1} = (-1)^{i+1}\, a\left(dD_{n-i-1}^{(0)} - cD_{n-i-2}^{(0)}\right), \dots,$$

$$A_{n-2,1} = (-1)^{n-2+1}\, a\left(dD_2^{(0)} - cD_1^{(0)}\right),$$

$$A_{n-1,1} = (-1)^{n-1+1}\, a\left(dD_1^{(0)} - cD_0^{(0)}\right),$$

$$A_{n,1} = (-1)^{n+1}\, ad,$$

$$A_{n+1,1} = (-1)^{n+1+1}\, a.$$

Если в алгебраических дополнениях первого столбца не участвовал a, то в алгебраических дополнениях второго столбца не участвует b. А в последних элементах этих столбцов не участвуют a и b. В алгебраических дополнениях последующих столбцов ожидается участие обеих элементов.

При вычислении алгебраических дополнений 3-го столбца левая верхняя часть определителя представлялась множителями 1, a и n раз $D_1^{(0)} - bD_0^{(0)}$ и правая нижняя часть представлена для первых трех алгебраических дополнений в виде $dD_{n-2}^{(0)} - cD_{n-3}^{(0)}$, а дальше по убывающим индексам $dD_{n-3}^{(0)} - cD_{n-4}^{(0)}, \dots, dD_1^{(0)} - cD_0^{(0)}$, d и 1.

И т.д. Для j-го столбца первые три алгебраические дополнения имели значения:

$$A_{0,j} = (-1)^{0+j}\left(dD_{n-j}^{(0)} - cD_{n-j-1}^{(0)}\right),$$

$$A_{1,j} = (-1)^{1+j}\, a\left(dD_{n-j}^{(0)} - cD_{n-j-1}^{(0)}\right),$$

$$A_{2,j} = (-1)^{2+j}\left(aD_1^{(0)} - bD_0^{(0)}\right)\left(dD_{n-j}^{(0)} - cD_{n-j-1}^{(0)}\right).$$

Как видно, левая верхняя часть здесь представлена с возрастающим индексом, а правая нижняя часть представлена постоянной с значением

$dD_{n-j}^{(0)} - cD_{n-j-1}^{(0)}$. Так продолжается до алгебраического дополнения j-й строки:

$$A_{j,j} = (-1)^{j+j}\left(aD_{j-1}^{(0)} - bD_{j-2}^{(0)}\right)\left(dD_{n-j}^{(0)} - cD_{n-j-1}^{(0)}\right).$$

Дальше левая часть определителя алгебраического дополнения представляется одинаково $aD_{j-1}^{(0)} - bD_{j-2}^{(0)}$, а правая нижняя часть определителя выражается понижающимся индексам: $dD_{n-j-1}^{(0)} - cD_{n-j-2}^{(0)}$, $dD_{n-j-2}^{(0)} - cD_{n-j-3}^{(0)}, \ldots$, $dD_1^{(0)} - cD_0^{(0)}$, d и 1.

Такая закономерность сохраняется до n-го столбца включительно.

В алгебраических дополнениях последних $n+1$-й и $n+2$-й столбцов правая нижняя часть определителя участвовала с множителями d и c соответственно, но в последних строках они заменены единицей. Левая верхняя часть определителя задавалась множителями 1, a, $aD_1^{(0)} - bD_0^{(0)}$, $aD_2^{(0)} - bD_1^{(0)}, \ldots$, $aD_{n-1}^{(0)} - bD_{n-2}^{(0)}$, а в предпоследнем собственном векторе эта часть задавалась множителем $aD_{n-1}^{(0)} - bD_{n-2}^{(0)}$ (уже ниже диагонали), а в последнем столбце – в виде множителя $aD_n^{(0)} - bD_{n-1}^{(0)}$.

Т. о., в соответствии почти симметричной формы матрицы A получили аналогичную структуру значений алгебраических дополнений, если не считать элементов a, b и c, d крайних строк. Как приняли, составлявшие отдельного s-го собственного вектора пропорциональны алгебраическим дополнениям матрицы. Осталось найти значения коэффициентов нормирующего множителя c_s собственного вектора для собственного числа λ_3:

$$c_s^2 \sum_{i=0}^{n+1} A_{i,s}^2 = 1 .$$

Эту задачу также можно поручить ЭВМ, как одного из последних подготовительных этапов вычислительного процесса, заключающийся в нахождении элементов обратной *V* матрицы V^{-1}. Для этой цели обратимся к методу Гаусса для составления обратной матрицы [10]. Особенность данного метода заключается в том, что в ходе приведения основной матрицы к единичной матрице параллельно составляются векторы-составляющие обратной матрицы.

Составим матрицу G размера $(2n+4)\times(n+2)$ для II и III родов граничных условий и их смешанные варианты. Материалы изложим с этой точки зрения, хотя для условий I рода совместно с II или III родов размер матрицы G составляет $(2n+2)\times(n+1)$, а для условий I рода – $2n \times n$:

$$G = \begin{Vmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \ldots & v_{0,n+1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \ldots & v_{1,n+1} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ v_{n,0} & v_{n,1} & \ldots & v_{n,n+1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ v_{n+1,0} & v_{n+1,1} & \ldots & v_{n+1,n+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Процесс начинается с того, что выбирается строка, элемент нулевого столбца которой является наибольший по модули среди элементов нулевого столбца. Пусть эта – j_0-я строка. Тогда, поменяв местами элементов j_0-й и нулевой строк, образуем новую матрицу с элементами $v'_{i,j}$.

Теперь первый элемент нулевого столбца приведем к 1, разделив всех элементов строки на $z_0 = v'_{0,0}$, а остальные элементы столбца приведем к 0, т.е. произведем замену $v_{i,j}^{(1)}$ на разность данного элемента и произведения элемента первой строки на первый элемент данной строки. Эти видоизменения проводится до последнего столбца.

В результате образуется новая матрица размера $(2n+3)\times(n+1)$, в которой не входят нулевой столбец и нулевая строка. Для этой матрицы повторим операцию выделения главного элемента первого столбца (кроме строки 0) по абсолютному значению. Меняем местами элементов первой и j_1-й строк. Приведем к единице элемента, находящегося в диагонали. Остальных элементов столбца (включая нулевой строки) обнуляем.

И так продолжим до n-й строки включительно. Последний раз процедура для $n+1$-й строки выполняется без поиска главного элемента, без замены строк и без обнуливания остальных элементов столбца.

В результате этих вычислений в левой половине матрицы G образуется единичная матрица размера $(n+2)\times(n+2)$. А в правой части матрицы (от $n+2$ до $2n+4$) образуются элементы обратной матрицы.

6. Обсуждение

Подготовительная часть программного обеспечения метода прямых при решении параболических уравнений для прямоугольных областей состоит из описания переменных и задания постоянных скалярных, векторных и матричных величин, нахождения диагональной и фундаментальной матриц, а также подготовки начальных данных. Основная часть программы состоит из подготовки векторов правых частей уравнений, вычисления новых значений преобразованной искомой, обратный переход к исходной искомой и обработки полученного результата.

Аналитическое решение задачи на собственные числа трехдиагональной матрицы обязательно, т.к. образуется система нелинейных однородных уравнений относительно неизвестных. В тоже время задачу на собственные вектора матриц аппроксимации можно было налагать на компьютер.

Но аналитический способ решения этой задачи обеспечивает точных значений элементов собственных векторов задачи, которые могут быть реализованы в процессе решения эллиптических и гиперболических одно- и многомерных задач.

Проблема выбора шагов численного интегрирования этих уравнений решена относительно аппроксимации лапласиана на уровне абсолютной устойчивости схемы. Условие по временному шагу можно снять путем применения метода аналитического решения получаемых обыкновенных дифференциальных уравнений. Остаются вопросы устойчивости реализуемых схем относительно начального и граничных условий, а также правой части уравнения. В связи с этим налагаются условия гладкости начальных и граничных значений, а также функции f – правой части уравнения.

7. Выводы

В работе предложены аналитические способы решения задач на собственные числа и вектора матрицы, образующейся при аппроксимации вторых производных искомой по пространственным координатам.

Выявлены особенности элементов собственных векторов при общей и смешанной постановке I, II и III родов граничных условий. В настоящее время ведется работа по реализации этих способов к конкретным классам физических задач, в числа которых входят задачи фильтрации, теплопередачи, сушки и другие.

Благодарности

Работа выполнена в рамках гранта фундаментальных исследований ГАНТ при КМ РУз.

Литература

[1] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

[2] *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

[3] *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

[4] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

[5] *Каримбердиева С.* Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.

[6] *Фаддеева В.Н.* Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).

[7] *Калиткин Н.Н.*Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

[8] *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз,1963.

[9] *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре (изд. 4-е дополн.). – М.: Наука, 1971. – 272 с.

[10] *Копчёнова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 368 с