УДК 577.3.01 + 577.38

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КРОСС-ДИФФУЗИЕЙ И КОНВЕКТИВНЫМ ПЕРЕНОСОМ

Мухамедиева Д.К.
старший научный сотрудник-исследователь Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел: (+99893) 534-60-30, e-mail: matematichka@inbox.ru

Исследованы качественные свойства и численное моделирование автомодельных решений системы квазилинейных уравнений реакции-диффузии задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера. Найдены оценки решений и возникающей при этом свободной границы, что позволяет выбрать подходящие начальные приближения для каждого значения числовых параметров. Автомодельная система уравнений построена методом нелинейного расщепления. Исследованы асимптотические поведения решения задачи для квазилинейного уравнения многокомпонентных конкурирующих систем биологической популяции с двойной нелинейностью. Численно исследованы нелинейные процессы многокомпонентных конкурирующих систем биологической популяции, проведен анализ результатов на основе полученных оценок решений.

Ключевые слова: система параболических уравнений, кросс-диффузия, конвективный перенос, биологическая популяция, автомодельное решение.

PROPERTIES OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS WITH CROSS DIFFUSION AND CONVECTIVE TRANSFER

Mukhamediyeva D.K.

We have investigated the qualitative properties and numerical modeling of self-similar solutions of the system of quasi-linear equations of reaction-diffusion problems of biological populations of the Kolmogorov-Fisher. Found assessment solutions and emerging with a free boundary, which makes it possible to select appropriate initial approach for each value of numerical parameters. Self-built system of equations by nonlinear splitting. The asymptotic behavior of the solution for the quasi-linear equation of multicomponent biological population competing systems with double nonlinearity. Numerically investigated nonlinear processes of multicomponent systems competing biological populations, the analysis results on the basis of the estimates of solutions.

Keywords: a system of parabolic equations, cross diffusion, convective transfer, biological population, similar solution.

КОНВЕКТИВ КЎЧИШЛИ ВА КРОСС-ДИФФУЗИЯЛИ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИМИ ХОССАЛАРИ

Мухамедиева Д.К.

Мазкур ишда Колмогоров-Фишер типидаги биологик популяция масаласи реакция-диффузия квазичизиқли тенгламалар системасининг автомодел ечимларини чизиқли моделлаштириш ва сифатли хоссалари тадқиқ қилинган. Ечимларнинг баҳоси ва бунда ҳосил бўладиган эркин чегаралар топилган, бу ҳар бир сонли параметр учун мос бошланғич яқинлашишларни танлаш имконини беради. Тенгламаларнинг автомодел системаси ночизиқли бўлиниш усули ёрдамида қурилган. Икки карра ночизиқли биологик популяциянинг кўп компонентли рақобатдош систмаларининг квазичизиқли тенгламаси учун масала ечимининг асимптотик кўринишлари тадқиқ қилинган. Биологик популяциянинг кўп компонентли рақобатдош системаларининг ночизиқли жараёнлари сонли тадқиқ қилинган, олинган ечимларнинг баҳолари асосида натижаларнинг таҳлили ўтказилган.

Таянч иборалар: параболик тенгламалар системаси, кросс-диффузия, конвектив кщчиш, биологик популяция, автомодел ечим.

1. Введение

В настоящее время изучению различных свойств решений нелинейных задач посвящено большое количество работ и выявляются все новые и новые свойства их решений. Решение нелинейных краевых задач всегда сопровождается значительными трудностями, потому что решить их в аналитической форме удается лишь в исключительных случаях, а для установления новых свойств решений требуются кропотливые исследования. Стандартные методы исследования нелинейных задач в зависимости от типа нелинейностей пока отсутствуют. Поэтому в каждом конкретном случае для исследования свойств решений прибегают к различным точным и приближенным методам в ведущих университетах и научных центрах США, Японии, Испании, Германии, Великобритании Израиле, Франции, России, Грузии, Казахстане, Украине.

В работах А.А. Самарского, В.А. Галактионова, А.С. Калашникова, Л.К. Мартинсона, Р. Кершнера, Г.И. Баренблатта, B.F.Knerr, Chen Xinfu, Qi Y.W., Jong-Sheng Guo, Kombe Ismail, Kusano Takasi, Tomoyuki Tanigava, С.Н.Димовой, М.Арипова показано, что весьма важную роль играют автомодельные решения, соответствующие определенным значениям параметров [1-4]. Поэтому большое значение придается исследованию нелинейных краевых задач параболического типа, описывающих различные процессы на основе автомодельного и приближенно-автомодельного подхода [4-7].

2. Параболическая система двух квазилинейных уравнений с нелинейной диффузией

В области Q = {(t,x): 0< t < ∞, x∈R} рассмотрена параболическая система двух квазилинейных уравнений с нелинейной диффузией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_1^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \\ \qquad + l(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + k_1(t)u_1\left(1-u_2^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_2^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \\ \qquad + l(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + k_2(t)u_2\left(1-u_1^{\beta_2}\right), \end{cases} \tag{1}$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_{10}(x),$$

$$u_2\big|_{t=0} = u_{20}(x),$$

которая описывает процесс биологической популяции в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициент диффузии которой равен $D_1 u_1^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}$, $D_2 u_2^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$ и конвективному переносу со скоростью $l(t)$, где $m_1, m_2, p, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t,x) \ge 0$, $u_2 = u_2(t,x) \ge 0$ - искомые решения.

Волновое решение системы (1) имеет вид

$$w_i(\tau(t),\eta) = f_i(\xi),$$

$$\xi = c\tau \pm \eta, \; i = 1,2,$$

где c – скорость волны, и учитывая, что уравнение для $w_i(\tau, x)$ без младших членов всегда имеет автомодельное решение в случае $1-[\gamma_1(m_1+p-3) \ne 0,$ получена система

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \\ +\mu_1(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f_2^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right) + \\ +c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\mu_i = \frac{1}{1-[\gamma_i(m_i+p-3)]}.$$

Если

$$\beta_1 = 1/n_2,\; p + m_i - 3 > 0,\; i = 1,2,$$

$$\beta_2 = 1/n_1,$$

то система (2) имеет точное решение

$$\bar{f_1} = A(a-\xi)^{n_1},\; \bar{f_2} = B(a-\xi)^{n_2},$$

$$n_1 = (p-1)/(p+m_1-3),$$

$$n_2 = (p-1)/(p+m_2-3),$$

когда постоянные A и B являются корнями нелинейной алгебраической системы

$$(n_1)^{m_1+p-3}A^{m_1+p-3} + (1+B^{\beta_1}) = c,$$

$$(n_2)^{m_2+p-3}B^{m_2+p-3} + (1+A^{\beta_2}) = c.$$

Таким образом, найденное решение системы (2) обладает свойством локализации решения, если

$$p + m_i - 3 > 0,\; i = 1,2,\; \int_0^\infty c_1(t)dt < \infty.$$

Тогда с учетом выражений

$$u_1(t,x) = e^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta} v_1(\tau(t),\eta),$$

$$u_2(t,x) = e^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta} v_2(\tau(t),\eta)$$

получено

$$u_1(t,x) = Ae^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta}(c\tau(t)-\xi)_+^{n_1},$$

$$u_2(t,x) = Be^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta}(c\tau(t)-\xi)_+^{n_2},\; c > 0.$$

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\; p_i + m_i > 3$ **(медленная диффузия).** Применяя метод нелинейного расщепления для решения уравнения (2) получены следующие функции:

$\bar\theta_1(\xi) = (a-\xi\ )_+^{n_1}$, $\bar\theta_2(\xi) = (a-\xi\ )_+^{n_2}$, где $a > 0$, $(y)_+ = \max(y,0)$, $\xi < a$.

Известно, что для глобального существования решения задачи (2) функции $f_i(\xi)$ должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \psi_1(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) \le 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f_2^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_2}{d\xi} + \psi_2(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) \le 0, \end{cases}$$

а $\beta_1 = 1/n_2$, $\beta_2 = 1/n_1$.

Показано, что функции $\bar{\theta}_1(\xi), \bar{\theta}_2(\xi)$ будут асимптотикой финитных решений (25).

ТЕОРЕМА 1. Финитное решение задачи (2) при $\xi \to a_-$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \bar{\theta}_i(\xi)$.

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ p_i + m_i < 3$ **(быстрая диффузия).** Для (2) имеется

$$\chi_1(\xi) = (a + \xi\ )^{n_1},\ \chi_2(\xi) = (a + \xi\ )^{n_2},$$

где $a > 0$.

ТЕОРЕМА 2. При $\xi \to +\infty$ исчезающее на бесконечности решение задачи (2) имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \chi_i(\xi)$.

3. Параболическая система двух квазилинейных уравнений кросс-диффузии задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера

В области Q={(t,x): 0< t < ∞, x∈R} рассмотрена параболическая система двух квазилинейных уравнений кросс-диффузии задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_2^{m_1-1} \left| \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \\ +l(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + k_1(t) u_1 \left(1 - u_2^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_1^{m_2-1} \left| \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \\ +l(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + k_2(t) u_2 \left(1 - u_1^{\beta_2}\right), \end{cases} \quad (3)$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_{10}(x),$$
$$u_2\big|_{t=0} = u_{20}(x),$$

которая описывает процесс биологической популяции в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициент диффузии которой равен $D_1 u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}$, $D_2 u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$ и конвективному переносу со скоростью $l(t)$, где $m_1, m_2, p, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t,x) \ge 0$, $u_2 = u_2(t,x) \ge 0$ - искомые решения.

Качественные свойства рассматриваемой задачи исследуются путем построения автомодельной системы уравнений для (3).

Автомодельная система уравнений построена методом нелинейного расщепления.

Если $1 - [\gamma_1(p-2) + \gamma_2(m_1 - 1) = 0$, волновое решение системы (3) имеет вид

$$w_i(\tau(t), \eta) = f_i(\xi),$$
$$\xi = c\tau \pm \eta,\ i = 1,2,$$

где c – скорость волны, и учитывая, что уравнение для $w_i(\tau, x)$ без младших членов всегда имеет автомодельное решение в случае $1 - [\gamma_1(p-2) + \gamma_2(m_1 - 1) \ne 0,$ получена система

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}) + \\ +c\dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}) + \\ +c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu_i = \frac{1}{(1 - [\gamma_i(p-2) + \gamma_{3-i}(m_i - 1)])},\ i = 1,2,$$

которая имеет локализованное решение

$$\bar{f}_1 = A(a-\xi)^{n_1},\ \bar{f}_2 = B(a-\xi)^{n_2},$$
$$n_1 = \frac{(p-1)(p-(m_1+1))}{n},$$
$$n_2 = \frac{(p-1)(p-(m_2+1))}{n},$$
$$n = (p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1),$$

если

$$p > 2 + [(m_1-1)(m_2-1)]^{1/2},$$
$$p - (m_i + 1) > 0,\ i = 1,2,$$
$$\beta_1 = 1/n2,\ \beta_2 = 1/n_1.$$

А коэффициенты *A* и *B* определяются из решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$(n_1)^{p-1} A^{p-1} B^{m_1-1} = c,$$
$$(n_2)^{p-1} A^{m_2-1} B^{p-1} = c.$$

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ n > 0$ **(медленная диффузия).** Применяя метод нелинейного расщепления для решения уравнения (4), получаем следующие функции:

$\theta_1(\xi) = (a-\xi)_+{}^{n_1}$, $\theta_2(\xi) = (a-\xi\ )_+{}^{n_2}$, где $a > 0$, $(y)_+ = \max(y, 0)$, $\xi < a$.

Известно, что для глобального существования решения задачи (4) функции $f_i(\xi)$ должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}) + \\ +c\dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) \le 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}) + \\ +c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) \le 0, \end{cases}$$

а $\beta_1 = 1/n_2$, $\beta_2 = 1/n_1$.

Показано, что функции $\bar{\theta}_1(\xi), \bar{\theta}_2(\xi)$ будут асимптотикой финитных решений (4).

ТЕОРЕМА 3. Финитное решение задачи (4) при $\xi \to a_-$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \bar{\theta}_i(\xi)$.

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ n < 0$ **(быстрая диффузия).** Для (4) имеется

$$\chi_1(\xi) = (a+\xi\ )^{n_1},\ \chi_2(\xi) = (a+\xi\ )^{n_2},$$

где $a > 0$.

ТЕОРЕМА 4. При $\xi \to +\infty$ исчезающее на бесконечности решение задачи (4) имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \chi_i(\xi)$.

4. Свойства решений систем параболических уравнений с кросс-диффузией

Рассмотрим свойства решений систем параболических уравнений с кросс-диффузией.

В области Q={(t,x): 0< t < ∞, x∈R} рассмотрена параболическая система двух квазилинейных уравнений с нелинейной кросс-диффузией:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \\ +l(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + k_1(t)u_1\left(1-u_2^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \\ +l(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + k_2(t)u_2\left(1-u_1^{\beta_2}\right), \end{cases} \quad (5)$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_{10}(x),\ u_2\big|_{t=0} = u_{20}(x),$$

которая описывает процесс биологической популяции в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициент диффузии которой равен $D_1 u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$, $D_2 u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}$ и конвективному переносу со скоростью $l(t)$, где $m_1, m_2, p, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t,x) \ge 0$, $u_2 = u_2(t,x) \ge 0$ - искомые решения.

Качественные свойства рассматриваемой задачи исследуются путем построения автомодельной системы уравнений для (5).

Автомодельная система уравнений построена методом нелинейного расщепления.

Волновое решение системы (5) имеет вид

$$w_i(\tau(t),\eta) = f_i(\xi),\ \xi = c\tau \pm \eta,\ i = 1,2,$$

где c – скорость волны, и учитывая, что уравнение для $w_i(\tau, x)$ без младших членов всегда имеет автомодельное решение в случае $1-[\gamma_2(m_1+p-3) \ne 0,$ получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}) + c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mu_i = \frac{1}{1-[\gamma_{3-i}(m_i+p-3)]}.$$

Система (6) имеет приближенное решение вида

$$\bar{f}_1 = A(a-\xi)^{n_1},\ \bar{f}_2 = B(a-\xi)^{n_2},$$

где A и B находятся из системы алгебраических уравнений:

$$(n_2)^{p-1}A^{-1}B^{m_1+p-2} = c,\ (\mathrm{n}_1)^{p-1}A^{m_2+p-2}B^{-1} = c,$$

а

$$n_1 = \frac{(p-1)(1-(m_1+p))}{1-(2-(m_1+p))(2-(m_2+p))},$$

$$n_2 = \frac{(p-1)(1-(m_2+p))}{1-(2-(m_1+p))(2-(m_2+p))},$$

$$n = 1-(2-(m_1+p))(2-(m_2+p)).$$

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ n > 0$ **(медленная диффузия).** Применяя метод нелинейного расщепления для решения уравнения (6), получаем следующие функции:

$$\theta_1(\xi) = (a-\xi)_+^{n_1},$$

$$\theta_2(\xi) = (a-\xi\ )_+^{n_2},$$

где $a > 0$, $(y)_+ = \max(y, 0)$, $\xi < a$.

Известно, что для глобального существования решения задачи (5) функции $f_i(\xi)$ должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \\ +\mu_1(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) \le 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}) + \\ +c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) \le 0. \end{cases}$$

а

$$\beta_1 = 1/n_2,\ \beta_2 = 1/n_1.$$

Показано, что функции $\bar{\theta}_1(\xi), \bar{\theta}_2(\xi)$ будут асимптотикой финитных решений (6).

ТЕОРЕМА 5. Финитное решение задачи (6) при $\xi \to a\_$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \vartheta_i(\xi)$.

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ n < 0$ **(быстрая диффузия).** Для (6) имеется

$$\chi_1(\xi) = (a+\xi)^{n_1},\ \chi_2(\xi) = (a+\xi)^{n_2},$$

где $a > 0$.

ТЕОРЕМА 6. При $\xi \to +\infty$ исчезающие на бесконечности решения задачи (6) имеют асимптотику $f_i(\xi) \sim \chi_i(\xi)$.

Численные расчеты показывают, что и в случае произвольных значений $\sigma > 0, \beta > 0$ качественные свойства решений не изменяются. Далее приводим результаты численных экспериментов для различных значений параметров (рис.1, 2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(u^{m_1-1}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) -$$
$$-div(c(t)u) + k_1 u(1+v^{\beta_1}),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = div\left(v^{m_2-1}\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right) -$$
$$-div(c(t)v) + k_1(1+u^{\beta_2}).$$

1. Быстрая диффузия. В качестве начального приближения используются равенства:

$$u_0(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1}(a+\xi^{\gamma})^{q_1},$$

$$v_0(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2}(a+\xi^{\gamma})^{q_2}, \ \xi = \left(\int_0^t c(y)dy - x\right) / \tau^{\frac{1}{p}};$$

$$\gamma = \frac{p}{p-1},$$

$$c(t) = 1/(T+t)^n, \ n \ge 1, \ n < 1,$$

$$\int c(y)dy = (T+t)^{1-n} / (1-n),$$

$$\alpha_i = \frac{\beta_i + 1}{\beta_1\beta_2 - 1}, \ i = 1,2, \ \beta_1\beta_2 > 1,$$

$$q_i = \frac{(p-1)}{p+m_i-3}, \ p+m_i-3 < 0, \ i = 1,2.$$

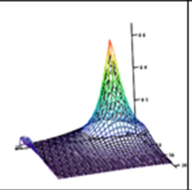
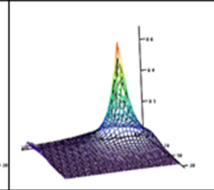
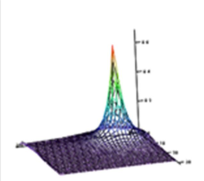
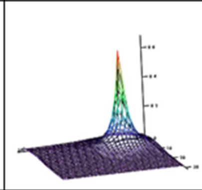
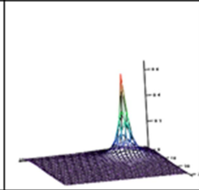
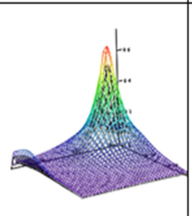
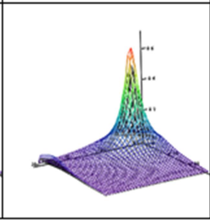
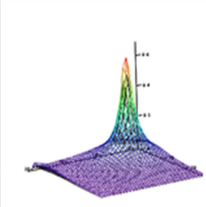
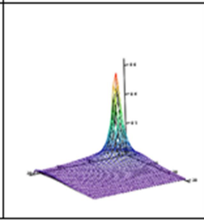
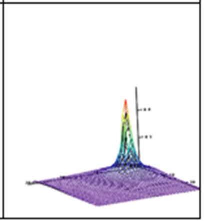
Значения параметров	$x1=1;\ x2=1;$ $\lvert x\rvert=\sqrt{2}$	$x1=10;\ x2=10;$ $\lvert x\rvert=10\sqrt{2}$	$x1=20;\ x2=20;$ $\lvert x\rvert=20\sqrt{2}$	$x1=30;\ x2=30;$ $\lvert x\rvert=30\sqrt{2}$	$x1=30;\ x2=40;$ $\lvert x\rvert=50$
$m_1=0.8,\ m_2=0.7,\ p=2.1$ $eps=10^{-3}$ $\beta_1=2\ \ \beta_2=5$ $m_i+p-3<0$ $n=3$					
$m_1=0.4,\ m_2=0.5,\ p=2.2$ $eps=10^{-3}$ $\beta_1=2\ \ \beta_2=2$ $m_i+p-3<0$ $n=5$					

Рис.1. Результаты эксперимента при быстрой диффузии

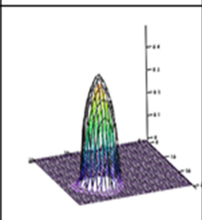
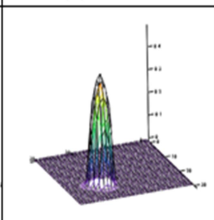
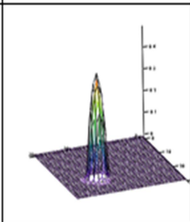
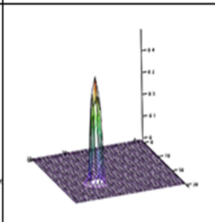
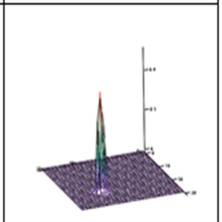
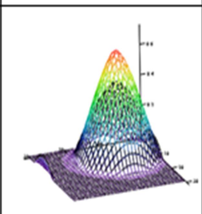
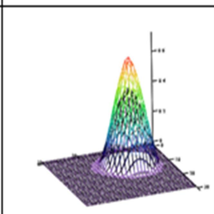
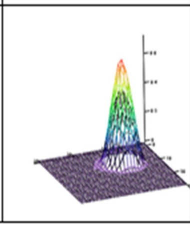
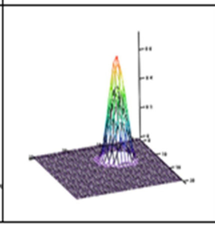
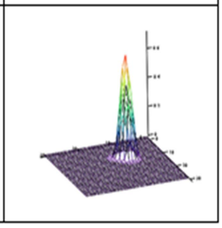
Значения параметров	$x1=1;\ x2=1;$ $\lvert x\rvert=\sqrt{2}$	$x1=10;\ x2=10;$ $\lvert x\rvert=10\sqrt{2}$	$x1=20;\ x2=20;$ $\lvert x\rvert=20\sqrt{2}$	$x1=30;\ x2=30;$ $\lvert x\rvert=30\sqrt{2}$	$x1=30;\ x2=40;$ $\lvert x\rvert=50$
$m_1=1.9,\ m_2=5,\ p=2.5$ $eps=10^{-3}$ $\beta_1=1.5\ \ \beta_2=2$ $m_i+p-3>0$ $n=3$					
$m_1=1.5,\ m_2=2,\ p=2.5$ $eps=10^{-3}$ $\beta_1=1.5\ \ \beta_2=2$ $m_i+p-3>0$ $n=5$					

Рис.2. Результаты эксперимента при медленной диффузии

2. Медленная диффузия. В качестве начального приближения используются равенства:

$$u_0(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1}(a-\xi^{\gamma})_+^{q_1},$$

$$v_0(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2}(a-\xi^{\gamma})_+^{q_2},$$

$$\xi = \left(\int_0^t c(y)dy - x\right) / \tau^{\frac{1}{p}};$$

$$c(t) = 1/(T+t)^n, \ n \ge 1, \ n < 1$$

$$\int c(y)dy = (T+t)^{1-n} / (1-n);$$

$$\alpha_i = \frac{\beta_i + 1}{\beta_1\beta_2 - 1},\ i = 1,2,$$

$$q_i = \frac{(p-1)}{p + m_i - 3},\ p + m_i - 3 > 0,\ i = 1,2,$$

$$u(x,t) = v(x,t) \equiv 0,$$

когда

$$|x| \ge \int_0^t c(y)dy - a^{(p-1)/p}\tau^{\frac{1}{p}},\ \tau(t) =$$

$$= (T+t)^{1-\alpha_i(m_i+p-3)} / [1 - \alpha_i(m_i + p - 3)],$$

$$\alpha_i = \frac{\beta_i + 1}{\beta_1\beta_2 - 1},\ i = 1,2,\ \beta_1\beta_2 > 1.$$

5. Заключение

Таким образом, обоснован алгоритм нелинейного расщепления для решения уравнений многокомпонентных конкурирующих систем биологической популяции с двойной нелинейностью.

Литература

[1] *Мари Дж.* Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. – М.: Мир,1983. – 397 с.

[2] *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. – 1937. – Т. 1. – С.1-25.

[3] *Арипов М.* Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. – Ташкент: Фан, 1988. – 137 с.

[4] *Арипов М.М., Мухамедиева Д.К.* Численное моделирование одной задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера с конвективным переносом // Естественные и технические науки. – Москва, 2013. – № 3. – С. 299-302.

[5] *Mukhamedieva D.K.* Population Models of Kolmogorov-Fisher Type with Double Nonlinearity and Nonlinear Cross Diffusion // International Journal of Mathematics and Computer Applications Research. – 2014. – Vol. 4. – Issue 3. – Pp. 59-72.

[6] *Mukhamedieva D.K.* Qualitative properties of solution of cross-diffusion model of Kolmogorov-Fisher type biological population task // International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences. – 2014. – Vol. 3. – Issue 6. – Pp. 39-44.

[7] Свид. DGU 02892. Программа решения задач биологической популяции конвективного переноса на основе алгоритма нелинейного расщепления / *Арипов М.М., Мухамедиева Д.К.* (Узбекистан). – Опубл. 06.11.2014 г.