УДК 519.633

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Расулов А.С.
профессор Университета мировой экономики и дипломатии,
tel.: +(99898) 367-15-01, e-mail: asrasulov@gmail.com

Раимова Г.М.
доцент Института математики АН РУз,
tel.: +(99891) 190-37-69, e-mail: raimova27@gmail.com

В настоящей работе для модельного нелинейного уравнения рассматривается начально-краевая задача с граничными условиями Дирихле. При предположении существования решения строится несмещенная оценка на траекториях ветвящегося процесса. Получено вероятностное представление решения задачи в виде математического ожидания некоторой случайной величины. В соответствии с вероятностным представлением построен ветвящийся процесс и на его траекториях строится несмещенная оценка решения задачи. Полученная несмещенная оценка решения имеет ограниченную дисперсию, строится на траекториях ветвящегося процесса с ограниченным средним числом ветвлений и легко моделируется. Проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: метод статистического моделирования, несмещенная оценка, ветвящийся случайный процесс, марковская цепь.

THE METHOD OF STATISTICAL MODELLING FOR SOLUTION OF ONE NONLINEAR PROBLEM

Rasulov A.S., Raimova G.M.

In the present work for nonlinear model equation is considered the initial-boundary value problem with boundary conditions of Dirichlet. Assuming the existence of a solution is based on an unbiased estimate of the trajectories of a branching process. Obtained a probabilistic representation of the solution of the problem as a mathematical expectation of some random variable. In accordance with a probabilistic representation of the constructed branching process and the trajectories of the constructed unbiased estimator of the solution. Obtained an unbiased estimate of the solution has limited dispersion, based on the trajectories of a branching process with a limited average number of branchings and easily modeled. Numerical experiments are performed.

Keywords: a statistical simulation method, an unbiased estimate, a branching random process, Markov chain.

БИР ЧИЗИҚСИЗ МАСАЛАНИ ЕЧИШ УЧУН СТАТИСТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ УСУЛИ

Расулов А.С., Раимова Г.М.

Мақолада чизиқсиз тенгламага қўйилган Дирихле масаласи қўрилган. Масала ечими мавжудлиги шартлари ўринли бўлган ҳолда ечимга тармоқланувчи тасодифий жараён траекторияларида силжимас баҳо қурилган. Масаланинг ечими учун тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ифодасидаги махсус эҳтимолий кўриниш ҳосил қилинган. Махсус эҳтимолий кўриниш асосида тармоқланувчи тасодифий жараен аниқланган ва унинг траекторияларида ечим учун силжимас баҳо аниқланган. Силжимас баҳо чегараланган дисперсияга эга бўлиб, осон моделлаштирилади. Статистик моделлаштириш усули асосида ҳисоблаш тажрибалари амалга оширилган.

Таянч иборалар: статистик моделлаштириш усули, силжимас баҳо, тармоқланувчи тасодифий жараён, марков занжири.

1. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в линейном случае

Несмещенные и смещенные оценки решения краевых задач для линейного уравнения Гельмгольца $\Delta u - cu = -g(x)$ были рассмотрены для $c(x) = const$ Г.А.Михайловым и Б.С.Елеповым, для переменного случая $c(x)$ для задачи Дирихле, Н.А.Симоновым для смешанной задачи и задачи Неймана, А.С.Сипиным для задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = -g.$$

В работах Г.А.Михайлова и Р.Н.Макарова оценки решения краевых задач для линейного уравнения Гельмгольца строятся на основе специального интегрально-разностного уравнения, используя процесс «блуждания по сферам» с отражением от границы.

В этом разделе приведем некоторые известные из [2]. Рассмотрим трехмерную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца $\Delta u - c\,u = -g$, где $c > 0$.

Функция $g(x, y, z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в области D , ограниченной регулярной границей Γ, на котором задано граничное условие $u|_\Gamma = \psi(x, y, z)$. Введем обозначения: $\bar{D}$ - замыкание области D ; функция $d(P) = \min\limits_{Q\in\Gamma} |P - Q|$ расстояние от точки P до границы Γ ; $\Gamma_\varepsilon = \{P \in \bar{D} : d(P) < \varepsilon\}$ ε - окрестность границы Γ; сфера $S(P)$ - максимальная из сфер с центром в точке P, целиком лежащих в $\bar{D}$, т.е. $S(P) = \{Q \in \bar{D} : |Q - P| = d(P)\}$. Пусть необходимо оценить решение $u(P_0)$ поставленной задачи в заданной точке $P_0 \in D$. Из теории фундаментальных решений известно [9], что $u(P_0)$ можно представить в виде

$$u(P_0) = \frac{d_0\sqrt{c}}{4\pi d_0^2\,\mathrm{sh}(d_0\sqrt{c})} \int\limits_{S(P_0)} u(s)ds + \int\limits_{|\mathbf{r}-P_0|<d_0} \frac{\mathrm{sh}[(d_0 - |\mathbf{r} - P_0|)\sqrt{c}]}{4\pi|\mathbf{r} - P_0|\,\mathrm{sh}(d_0\sqrt{c})} g(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $d_0 = d(P_0)$. Соотношение (1) необходимо дополнить следующим равенством, учитывающим граничное условие задачи:

$$u(P_0) = \psi(P_0), \quad P_0 \in \Gamma. \quad (2)$$

Нетрудно понять, что стандартные алгоритмы метода Монте-Карло (см., например [1]) распространяются на такие интегральные уравнения, если особенность ядра включить в плотность перехода моделируемой цепи Маркова, т.е. из точки P_0 следует переходить на поверхность $S(P_0)$ (т.е. использовать моделирование «блужданий по сферам»). После выхода на границу цепь следует оборвать, прибавив к оценке величину $\psi(P)$ с соответствующим весом.

Для функции $u(\mathbf{r})$ можно записать следующее интегральное уравнение:

$$u(\mathbf{r}) = \int\limits_D k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')u(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \varphi(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \dfrac{d\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(d\sqrt{c})}\delta_\mathbf{r}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r} \notin \Gamma_\varepsilon, \\ 0, & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon, \end{cases}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|<d} \frac{\mathrm{sh}[(d - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)\sqrt{c}]}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|\,\mathrm{sh}(d\sqrt{c})} g(\mathbf{r}')d(\mathbf{r}'), & \mathbf{r} \notin \Gamma_\varepsilon, \\ u(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $d = d(\mathbf{r})$, $\delta_\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ - обобщенная плотность, соответствующая равномерному распределению вероятностей на сфере $S(\mathbf{r})$. Вероятностный подход к решению задачи связан с цепью Маркова, которая называется *блужданием по сферам* или *сферическим процессом*.

Определение процесса блуждание по сферам и некоторые его свойства. Зададим цепь Маркова P_n следующими характеристиками: $r(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - P_0)$ - плотность начального распределения (т.е. цепь выходит из точки P_0); $r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ - плотность перехода из $\mathbf{r}$ в $\mathbf{r}'$, представляющая собой обобщенную трехмерную плотность равномерного распределения вероятностей на сфере $S(\mathbf{r})$; $p(\mathbf{r})$ - вероятность обрыва цепи, определяемая выражением

$$p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \notin \Gamma_\varepsilon; \\ 1, & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Цепь, определенная таким образом называется *блужданием по сферам*. Ее можно записать следующим образом:

$$P_n = P_{n-1} + \omega_n\, d(P_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где ω_n - последовательность независимых изотропных векторов единичной длины. В процессе блуждания по сферам очередная точка P_{n+1} выбирается равномерно по поверхности сферы $S(P_n)$; процесс обрывается, если точка попадает в Γ_ε.

Обозначим через $S(P, \varepsilon)$ поверхность той части сферы $S(P)$, которая принадлежит множеству Γ_ε . Имеет место следующая оценка снизу для вероятности попадания очередной точки в Γ_ε [2; с.223]:

$$\frac{S(P, \varepsilon)}{4\pi d^2(P)} \ge \frac{\varepsilon^2}{4d^{*2}} = \nu(\varepsilon), \quad (4)$$

где d^{*2} - точная верхняя граница радиусов сфер, целиком лежащих в D . Вероятность $p_1(\mathbf{r})$ обрыва цепи после очередного перехода равна вероятности непосредственного попадания из точки $\mathbf{r}$ в Γ_ε и удовлетворяет неравенству $p_1(\mathbf{r}) \ge \nu(\varepsilon)$. Следовательно, среднее число $EN = q(P_0, \varepsilon)$ переходов в цепи блуждания по сферам не превосходит величины $\nu^{-1}(\varepsilon)$. Для широкого класса границ Γ получена логарифмическая оценка [2]

$$q(P_0, \varepsilon) \le C|\ln(\varepsilon)|,$$

которая заведомо выполняется для выпуклых областей. Траектории блуждания по сферам с вероятностью 1 сходиться к границе области (см., например, [1;2;3]).

Так как (3) имеет вид сопряженного уравнения интегрального уравнения, для оценки $u(P_0)$ можно применить соотношение

$$u(P_0) = \mathbf{E}\xi, \quad \xi = \varphi(P_0) + \sum_{n=1}^{N} Q_n\varphi(P_n). \quad (5)$$

Для сферического процесса веса определяются формулами

$$Q_0 = 1, \quad Q_n = Q_{n-1}\frac{d_{n-1}\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(d_{n-1}\sqrt{c})},$$

$$d_n = d(P_n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Вместо точных значений $u(\mathbf{r})$ в Γ_ε можно использовать приближенные значения, например, беря их с ближайших точек границы, т.е. полагать

$$u(\mathbf{r}) \approx \psi(\mathbf{r}^*), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon, \quad \mathbf{r}^* \in \Gamma, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}^*| = d(\mathbf{r}).$$

В результате получаем смещенную оценку ξ_ε, среднее значение которой отличается от $u(P_0)$ на величину порядка ε.

2. Метод статистического моделирования решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в полулинейном случае

2.1. Постановка задачи

В этом параграфе рассматривается задача Дирихле для следующего нелинейного уравнения: $\Delta u - c\,u = -f(x,u)$ с полиномиальной нелинейностью в правой части относительно неизвестной функции $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) u^n(x)$. Ранее изучены возможности применения вероятностных методов при решении задач для следующих нелинейных уравнений: уравнение $-\Delta v + 2cv = c^2 + v^2$ изучалось в работе [8], уравнение $-\Delta u + u^n = 0$ в работе [6] и $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u^{2i}(x) + a_0(x)$ в работе [7].

Пусть D ограниченная область в R^3 с регулярной границей Γ, $f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) u^n(x),$ причем коэффициенты ряда удовлетворяют условию $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\overline{a}_n} = 0$, где $\sup_{x\in D} |a_n(x)| \le \overline{a}_n$. Рассмотрим следующею задачу Дирихле:

$$-\Delta u(x) + cu(x) = f(x,u), \quad x \in D, \quad u|_\Gamma = \varphi. \tag{6}$$

Предполагается, что функции $\varphi(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $a_n(x) \in C(\overline{D})$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ и коэффициент $c > 0$ таковы, что существует [4;с.367] единственное непрерывное решение полулинейной задачи. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n n < \infty. \tag{7}$$

При вышеуказанных предположениях, строится несмещенная оценка решения задачи с ограниченной дисперсией в некоторой произвольной точке $x \in D$.

2.2. Вероятностное представление решения задачи

Применяя соотношение (1) к уравнению $-\Delta u(x) + cu(x) = f(x,u)$ получим следующее интегральное представление:

$$u(x) = \frac{R\sqrt{c}}{4\pi R^2 \operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \int_{S_R} u(y)dy + \int_{K_R} \frac{\operatorname{sh}[(R - |x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|\operatorname{sh}(R\sqrt{c})} f(y,u(y))dy. \tag{8}$$

Здесь $R(x) = \min_{y\in\Gamma} |x-y|$ - расстояние от точки x до границы, K_R - шар радиуса R с центром в точке x, S_R - соответствующая сфера.

Первый интеграл в (8) есть интеграл по поверхности сферы S_R. Так как площадь поверхности сферы S_R равна $4\pi R^2$, то после введения этого выражения под знак первого интеграла, он будет представлять равномерное распределение на сфере:

$$u(x) = \frac{R\sqrt{c}}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \int_{S_R} u(x + R\omega)d\omega + \frac{\operatorname{sh}(R\sqrt{c}) - R\sqrt{c}}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \times \int_{K_R} \frac{\operatorname{sh}[(R - |x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|(\operatorname{sh}(R\sqrt{c}) - R\sqrt{c})} \frac{f(y,u(y))}{c} dy.$$

Перепишем данное выражение следующим образом

$$u(x) = q \int_{S_R} u(y)d\omega + (1-q) \int_{K_R} p(x,y) \frac{f(y,u(y))}{c} dy, \tag{9}$$

здесь были использованы следующие обозначения: $q = \frac{R\sqrt{c}}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})}$, ω- равномерное распределение на S_R,

$$p(x,y) = \frac{\operatorname{sh}[(R - |x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|(\operatorname{sh}(R\sqrt{c}) - R\sqrt{c})}$$

плотность перехода из x в y $(x, y \in K_R)$.

Прежде чем перейти к описанию случайного ветвящегося процесса, согласованного с вероятностным представлением (9) дадим общее определение процесса блуждания по сферам с ветвлением и некоторые его свойства из [3;12].

Процесс блуждания по сферам с ветвлением определяется следующим образом: в ограниченной области $D \subset R^3$ с границей Γ блуждают частицы n типов T_1, T_2, ... , T_n. Частица типа T_i, находящаяся в точке x, за единицу времени с вероятностью $q_i(x)$ переходит в точку y, распределенную с плотностью $p_i(x,y)$, и порождает там α_1 частиц типа T_1, α_2 частиц типа T_2, ... , α_n - типа T_n. С вероятностью $1 - q_i(x)$ превращения не происходит, а частица переходит в точку y, распределенную равномерно на сфере $S_R(x)$, $R(x)$ - расстояние от точки x до границы Γ

$$1 - q_i(x) = R(x)\sqrt{c_i} / \operatorname{sh}(R(x)\sqrt{c_i}), \quad r = |x-y|,$$

$$p_i(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r} \cdot \dfrac{c_i \operatorname{sh}(\sqrt{c_i}(R-r))}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c_i}) q_i(x)}, & y \in K_R(x); \\ 0, & y \notin K_R(x). \end{cases}$$

Новые частицы движутся аналогично рассмотренной, независимо друг от друга.

Если число ветвлений N описанной ветвящейся марковской цепи конечно, то, начиная с некоторого (случайного) момента времени, цепь представляет собой N независимых процессов блуждания по сферам и, следовательно имеет предел, принадлежащий Γ. Число N, естественно тоже случайно. Приведем теорему, дающую необходимые и достаточные условия для того, чтобы среднее число ветвлений процесса блуждания по сферам с ветвлением было конечно.

Пусть b_j^i - среднее число частиц типа T_j, получающихся из частицы типа T_i за одно превращение, $I=\left\|\delta_j^i\right\|$ - единичная матрица порядка n.

Определение 1. Квадратная матрица $\left\|a_j^i\right\|$ с вещественными элементами называется *квазинеотрицательной*, если все её недиагональные элементы неотрицательны.

Определение 2. Квадратная матрица $\left\|a_j^i\right\|$ называется *неразложимой,* если множество индексов $1,2,...,n$ нельзя разбить на два таких непустых непересекающихся множества S_1 и S_2, что $a_j^i=0$ для всех $i\in S_1$ и $j\in S_2$.

Определение 3. Характеристический корень неразложимой квазинеотрицательной матрицы с максимальной действительной частью называется *перроновым корнем.*

Предположим, что матрица $\left\|c_i(b_j^i-\delta_j^i)\right\|$ - неразложимая, тогда справедлива следующая

Теорема 1. [3; с.142] *Среднее число ветвлений для процесса блуждания по сферам с ветвлением конечно тогда и только тогда, когда перронов корень матрицы* $\left\|c_i(b_j^i-\delta_j^i)\right\|$ *строго меньше первого собственного числа краевой задачи* $\Delta u+\lambda u=0$, $u|_\Gamma=0$.

Следствие 1.[3; с.144] *Если в процессе блуждания участвуют только однотипные частицы, то среднее число ветвлений в блуждании по сферам с ветвлением конечно тогда и только тогда, когда* $c(b-1)<\lambda_1$. *Здесь* b *среднее число частиц, получающихся при делении одной частицы, а* λ_1 - *первое собственное значение краевой задачи* $\Delta u+\lambda u=0$, $u|_\Gamma=0$.

Формулу (9) можно переписать следующим образом:

$$u(x)=q\int\limits_{S_R(x)}u(y)d\omega+ +(1-q)\int\limits_{K_R(x)}p(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(y)}{c}u^n(y)dy. \tag{10}$$

В соответствии с (9) несмещенные оценки для решения задачи (6) естественно строить на траекториях процесса блуждания по сферам с ветвлением, в котором участвуют частицы одного типа.

Отметим, что при фиксированном x следующие интегралы равны единице:

$$\int\limits_{\bar D}\frac{1}{4\pi R^2}I_{S_R(x)}(y)d\mu(y)=1,\quad \int\limits_{\bar D}p(x,y)\,I_{K_R(x)}(y)d\mu(y)=1.$$

Здесь мера μ - определена на σ - алгебре борелевских подмножеств $\bar D$ равенством $\mu(A)=\lambda(A)+S(A\cap\Gamma)$, λ - мера Лебега в R^3, S - площадь поверхности.

2.3. Случайный ветвящийся процесс, согласованный с вероятностным представлением

В соответствии с представлением (10) построим процесс блуждания с ветвлением в фазовом пространстве D, в котором участвуют частицы одного типа. Пусть $M=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\bar a_n$, и α - некоторое число, $0<\alpha<1$. В начальный момент имеется одна частица в точке $x_0=x$. Пусть $n>0$ и x_n известно. За единицу времени частица с вероятностью $q=\dfrac{R\sqrt c}{\operatorname{sh}(R\sqrt c)}$ переходит в точку x_{n+1}, равномерно распределенную на сфере $S_R(x)$ и с вероятностью $1-q$ переходит в точку x_{n+1}, распределенную в шаре $K_R(x)$ с плотностью $p(x,y)$. Во втором случае с вероятностью $\pi_n=\dfrac{\alpha}{M}\bar a_n,\quad (n=1,2,\cdots)$ частица делится на n новых частиц либо с вероятностью $\pi_0=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi_n$ гибнет. Новые частицы ведут себя независимо друг от друга аналогично рассмотренной частице. Процесс обрывается, если все частицы в $\bar D$ погибают, либо, если все частицы попадают в Γ. Параметр α позволяет регулировать число ветвлений.

Далее дадим способ моделирования перехода $x_n\to x_{n+1}$. Если точка x_{n+1} равномерно распределена на сфере $S_R(x_n)$, то $x_{n+1}=x_n+R\omega_n$, где ω_n изотропный вектор. Если плотность распределения точки x_{n+1} равна $p(x_n,y)$ при фиксированном x_n, то для моделирования целесообразно использовать метод исключения [2]:

I) моделируются α_n^0, α_n^1, α_n^2 - равномерно распределенные на отрезке $(0;1)$ случайные величины; определяется значение $\xi=-\ln\left(\alpha_n^1\alpha_n^2\right)/\sqrt c$; если $\xi>R$, то повторяется то же самое и т.д., иначе выбирается значение $\zeta=\alpha_n^0\,\xi\exp(-\sqrt c\xi)$;

II) если $\zeta\ge\xi\dfrac{\operatorname{sh}\left[(R-\xi)\sqrt c\right]}{\operatorname{sh}\left(R\sqrt c\right)}$, то выполняется I) и т.д., иначе $x_{n+1}=\xi.$

Пусть $Z_0=(x,1),Z_1,Z_2,\ldots,Z_n,\ldots$ траектория ветвящегося процесса, где $Z_i=(x_i^1,n_i^1;\;\; x_i^2,n_i^2;\;\; \ldots;\; x_i^{l_i},n_i^{l_i})$ - точечное распределение в момент времени i. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Случайный ветвящийся процесс* $\{Z_n\}$ *с вероятностью единица либо вырождается в* *области* D *, либо сходится к точечному распределению* $Z=(x^1,n^1;\ \ x^2,n^2;\ \ \dots;\ \ x^k,n^k)$ *, где* $x^i \in \Gamma$, $i=1,2,\dots k$.

Доказательство. Процесс можно рассматривать как ветвящийся процесс для частиц, диффундирующих в ограниченной области $\bar{D}$ с поглощающими границами. Если среднее число частиц K , получающихся при делении одной частицы $K=K(x,1)\le 1$, то построенный процесс обрывается с вероятностью 1 , а условие $K<1$ является необходимым и достаточным для ограниченности среднего числа ветвлений процесса [104]. Покажем что, $K<1$. В силу наших предположений ряд $M=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\bar{a}_n n$ сходится. Фиксируем $0<\alpha<1$. Учитывая, что $\pi_n=\dfrac{\alpha}{M}\bar{a}_n$, находим:

$$K=q(x)\int\limits_{\bar{D}}d\omega+(1-q(x))\int\limits_{\bar{D}}p(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}(n\pi_n)dy=$$

$$=q(x)+(1-q(x))\frac{\alpha}{M}\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{a_n}<1.$$

Следовательно, данный процесс вырождается и общее число частиц, участвовавших в процессе конечно [10; с.101]. Если процесс не обрывается внутри области D, то начиная с некоторого момента все частицы выходят на границу Γ, т.е., существует $n=n_0$, начиная с которого Z_n имеет вид $(x_n^1,1;x_n^2,1;\dots;x_n^k,1)$, где k не зависит от n . В дальнейшем все k частиц совершают независимые блуждания по сферам. Из результатов [3] следует, что $x_n^i\to x^i\in\Gamma$ при $n\to\infty$ п.н. Лемма доказана.

Отметим, что для процесса блуждания по сферам с ветвлением в силу следствия к теореме 1 среднее число ветвлений будет конечно и в случае, когда K - среднее число частиц, получающихся при делении одной частицы равно 1 (т.е. $b=1$). Следовательно, значение параметра $\alpha=1$ при котором $K=1$ является допустимым. Далее, на траектории блуждания по сферам в ветвлением построим несмещенную и ε- смещенную оценки решения.

2.4. Построение несмещенной оценки решения

Для построения оценки метода Монте-Карло для задачи (6) реализуется процесс блуждания по сферам с ветвлением из точки $x_0=x$, т.е. в начале имеется одна частица в точке x. За единицу времени частица с вероятностью $q=\dfrac{R\sqrt{c}}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})}$ переходит в точку $x_1=y_1$, которая выбирается равномерно по сфере $S_R(x)$ и с вероятностью $1-q$ в точку $x_1=y_2$, которая выбирается внутри шара $K_R(x)$ соответственно плотности $p(x,y)$. Во втором случае с вероятностью π_n $(n\ne 0)$ происходит ветвление, т.е. частица делиться на n частиц и вес умножается на величину $\dfrac{Ma_n(x_1)}{c\bar{a}_n\alpha}$. В случае $n=0$ происходит поглощение частицы в точке x_1 и вес домножается на величину $\dfrac{a_0(x_1)}{c\pi_0}$. Из точки x_1 строятся n независимых траекторий блуждания. Новые частицы ведут себя независимо друг от друга аналогично рассмотренной частице. Процесс обрывается, либо, если все частицы в $\bar{D}$ погибают, либо, если все частицы выходят на ε окрестность границы.

Определим оценку рекуррентным способом. Пусть $\zeta_0(x)=u(x)$, $\zeta_k(x)=\Psi(\zeta_{k-1}(x))$, где

$$\Psi(\zeta(x))=\begin{cases}\zeta(y_1), & \text{с вер. } q(x);\\ W_n(y_2)\prod\limits_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}(y_2), & \text{с вер. } (1-q(x))\pi_n, n\ne 0;\\ W_0(y_2), & \text{с вер. } (1-q(x))\pi_0.\end{cases}$$

Здесь $\zeta^{(i)}(y)$ - независимые реализации случайной величины $\zeta(y)$. Так называемые «веса», т.е. множители, на которые при каждом шаге домножается оценка, определим следующим образом:

$$W_n(y)=\frac{M\,a_n(y)}{c\bar{a}_n\alpha},\quad W_0(y)=\frac{a_0(y)}{c\pi_0}.$$

Пусть $\Re_k$ σ -алгебра, порожденная последовательностями $\{\omega_i\}_{i=0}^{k-1}$, $\{\alpha_i^0\}_{i=0}^{k-1}$, $\{\alpha_i^1\}_{i=0}^{k-1}$, $\{\alpha_i^2\}_{i=0}^{k-1}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Последовательность* $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M<c$ *, то* $\zeta_k(x,t)$ *- равномерно интегрируемый мартингал.*

Доказательство. Из определения $\Re_k$ очевидно, что $\zeta_k(x)$ является $\Re_k$ -измеримой. Из свойств условных математических ожиданий следует что:

$$\mathbf{E}(\zeta_{n+1}(x)/\Re_n)=\mathbf{E}\big(\Psi(\zeta_n(x))/\Re_n\big)=q(x)\mathbf{E}\big(\zeta_n(y_1)/\Re_n\big)+$$

$$+(1-q(x))\sum_{i=1}^{\infty}\pi_n\,\mathbf{E}\left(W_i(y_2)\prod_{j=1}^{i}\zeta_n^{(j)}(y_2)/\Re_n\right)+$$

$$+(1-q(x))\pi_0\mathbf{E}\big(W_0(y_2)/\Re_n\big).$$

Ввиду справедливости вероятностного представления (10) получим:

$$\mathbf{E}(\zeta_{n+1}(x)/\Re_n)=q(x)\int\limits_{S_R(x)}\zeta_n(y)d\omega+(1-q(x))\times$$

$$\times\int\limits_{K_R(x)}p(x,y)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\pi_n\frac{M\,a_n(y)}{c\bar{a}_n\alpha}\zeta_n^i(y)+\pi_0\frac{a_0(y)}{c\pi_0}\right]=\zeta_n(x).$$

Таким образом последовательность $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. Чтобы доказать равномерную интегрируемость $\zeta_k(x)$, достаточно показать, что $|\zeta_k(x)|\le C$, $(C=const)$. Пусть параметр α выбирается из условия $\dfrac{M}{c}\le\alpha<1$.

Так как $u(x) \in C(\bar{D}) \cap C^2(\bar{D})$ и $\bar{D}$ ограниченная область, то $|u(x)| \le const$ для $(x) \in \bar{D}$. Далее, при выполнении условия теоремы $\left|W_n(y)\right| = \left|\frac{M a_n(y)}{c \bar{a}_n \alpha}\right| \le 1$ и следовательно $|\zeta_n(x)| \le C < \infty$, $(C = const)$. Откуда следует, что последовательность $\{\zeta_n(x,t)\}$ является равномерно интегрируемой. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о реализуемости оценки $\zeta_n(x)$, т.е. возможности реализации построенного алгоритма на ЭВМ. С целью экономии времени получения одной реализации оценки решения задачи (6), рассмотрим несколько видоизмененный процесс с меньшим числом ветвлений и оценки на нем со сколь угодно малым смещением.

Возьмем ε - достаточно малым и рассмотрим внутреннюю ε- окрестность границы: Γ_ε. Пусть N_1 момент обрыва процесса внутри области, и N_ε момент первого попадания всех частиц в Γ_ε. $N = \min\{N_1, N_\varepsilon\}$ момент остановки процесса. Тогда вероятность обрыва траектории в точке x_n будет равна:

$$g(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_n \in \Gamma_\varepsilon, \\ (1 - q(x_{n-1}))\pi_0, & \text{если } x_n \in \bar{D} \setminus \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Из леммы 1 и следствия 1 следует, что $N < \infty$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие теоремы 3. Тогда $\zeta_N(x)$ является несмещенной оценкой для $u(x)$ с конечной дисперсией.*

Доказательство. Так как $\zeta_n(x)$ является равномерно интегрируемым мартингалом и N - марковский момент, то согласно теореме Дуба о преобразовании свободного выбора [5;11] для мартингала $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, получим $E\zeta_N(x) = E\zeta_1(x)$. Из определения $\zeta_1(x)$ по формулам (11)-(12) и вероятностного представления (9) следует, что $\mathbf{E}(\zeta_1(x)) = q(x)\mathbf{E}u(y_1) + (1 - q(x))\mathbf{E}f(y_2, u(y_2)) / c = u(x)$.

В силу условий теоремы 3 $\mathbf{E}(\zeta_N(x))^2 < \infty$ и следовательно дисперсия ее конечна. Теорема доказана.

Далее, из $\zeta_N(x)$ строится стандартным способом смещенная, но практически реализуемая оценка $\zeta_N^*(x)$. Пусть x^* - ближайшая к x точка границы Γ. $\zeta_N^*(x)$ получается заменой $u(x_N)$ в $\zeta_N(x)$ на $\varphi(x_N^*)$. Оценим смещение $\zeta_N^*(x)$. Ясно, что $|\mathbf{E}\zeta_N^*(x) - u(x)| \le \mathbf{E}|\zeta_N^*(x) - \zeta_N(x)|$. Если $N = N_1$, то $T_N = \{\theta\}$ и процесс обрывается не попадая Γ_ε.В этом случае $\zeta_N^*(x) = \zeta_N(x)$ и смещение равно нулю. Если $N = N_\varepsilon$, то $Z_N = (x_N^1, n_N^1;\ x_N^2, n_N^2;\ \ldots;\ x_N^k, n_N^k)$, где $x_N^i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и число k не зависит от N. Учитывая, что $|W_n(y)| \le 1$ для произвольных n и $y \in \bar{D}$, имеем

$$\zeta_N^*(x) - \zeta_N(x) \le \left(\prod_{i=1}^{k} \left[\varphi(x_N^i *)\right]^{n_N^i} - \prod_{i=1}^{k} \left[u(x_N^i *)\right]^{n_N^i} \right).$$

Пусть $L(\varepsilon)$ - модуль непрерывности функции $u(x)$, тогда справедливо

$$|\mathbf{E}\zeta_N^*(x) - u(x)| \le L(\varepsilon)\mathbf{E}(n_N^1 + n_N^2 + \cdots + n_N^k).$$

Учитывая, что среднее число частиц в N -ом поколении $\mathbf{E}\left(n_N^1 + n_N^2 + \cdots + n_N^k\right) \le K^N < 1$, находим, что смещение не превосходит $L(\varepsilon)$. Конечность дисперсии $\zeta_N^*(x)$ следует из $|W_n(y)| \le 1$.

2.5. Некоторые частные случаи

Рассмотрим подробно случаи, когда $f(x,u) = g\exp(u)$, $f(x,u) = g\sin(u)$, $f(x,u) = g\cos(u)$, $f(x,u) = g\,\mathrm{sh}(u)$, $f(x,u) = g\,\mathrm{ch}(u)$ $(g - const)$ и для них определим в предложенной модели вероятности размножения.

A. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$-\Delta u(x) + cu(x) = g\exp(u),\ g > 0,\ x \in D,$$
$$u(x) = \varphi(x),\ x \in \partial D.$$

Так как для произвольного u имеет место разложение

$$\exp(u) = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots \frac{u^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!},$$

то $|a_n| = a_n = \dfrac{g}{n!}$ и

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g}{(n-1)!} = g\exp(1).$$

Следовательно условие (7) выполнено. Параметр α выбирается из условия $\dfrac{g\exp(1)}{c} \le \alpha < 1$.

Вероятности ветвлений определяются следующей рекуррентной формулой:

$$\pi_n = \frac{\alpha}{M}|a_n| = \frac{\alpha}{\exp(1)} \frac{1}{n!} = \frac{\pi_{n-1}}{n} (n = 2, 3, \ldots), \quad \pi_1 = \frac{\alpha}{\exp(1)}$$

и вероятность поглощения равна:

$$\pi_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = 1 - \alpha(1 - \exp(1)).$$

B. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$-\Delta u(x) + cu(x) = g\sin(u),\ g > 0,\ x \in D,$$
$$u(x) = \varphi(x),\ x \in \partial D.$$

Так как для произвольного u имеет место разложение $\sin(u) = u - \dfrac{u^3}{3!} + \dfrac{u^5}{5!} - \cdots (-1)^n \dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$

то $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n g}{(2n+1)!}$, $a_{2n} = 0$, $\left|a_{2n+1}\right| = \dfrac{g}{(2n+1)!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)g}{(2n+1)!} = g\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = g\,ch(1).$$

Следовательно, условие (7) выполнено. Параметр α выбирается из условия $\dfrac{g\,ch(1)}{c} \le \alpha < 1.$

Вероятности ветвлений определяются следующей рекуррентной формулой:

$$\pi_{2n+1} = \frac{\alpha}{M}\left|a_{2n+1}\right| = \frac{\alpha}{ch(1)}\frac{1}{(2n+1)!} = \frac{\pi_{2n-1}}{2n(2n+1)},$$

$$\pi_{2n} = 0, (n = 1,2,\ldots).$$

Вероятность поглощения равна:

$$\pi_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = 1 - \frac{\alpha}{ch(1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \alpha\, sh(1)/ch(1).$$

C. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$-\Delta u(x) + cu(x) = g\cos(u),\ g > 0,\ x \in D,$$

$$u(x) = \varphi(x),\ x \in \partial D.$$

Так как для произвольного u имеет место разложение

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots (-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

то $a_{2n} = \frac{(-1)^n g}{(2n)!}$, $a_{2n+1} = 0$, $\left|a_{2n}\right| = \frac{g}{(2n)!}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ и

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n\left|a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)g}{(2n)!} = g\, sh(1).$$

Следовательно, условие (7) выполнено. Параметр α выбирается из условия $\frac{g\, sh(1)}{c} \le \alpha < 1$.

Вероятности ветвлений определяются следующей рекуррентной формулой:

$$\pi_{2n} = \frac{\alpha}{M}\left|a_{2n}\right| = \frac{\alpha}{sh(1)}\frac{1}{(2n)!} = \frac{\pi_{2n-2}}{2n(2n-1)},$$

$$\pi_{2n-1} = 0 \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Вероятность поглощения равна:

$$\pi_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = 1 - \frac{\alpha}{ch(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!} = 1 - \alpha(ch(1) - 1)/sh(1).$$

D. Случаи, когда $f(x,u) = g\,\mathrm{sh}(u)$, $f(x,u) = g\,\mathrm{ch}(u)$.

Для произвольного u имеют место разложения

$$\mathrm{sh}(u) = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots \frac{u^{2n}+1}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$\mathrm{ch}(u) = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots + \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

следовательно, для функции $f(u) = g\,\mathrm{sh}(u)$:

$a_{2n} = 0$, $\left|a_{2n} + 1\right| = a_{2n+1} = \frac{g}{(2n+1)!}$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, и для функции $f(u) = g\,\mathrm{ch}(u)$:

$a_{2n+1} = 0$, $\left|a_{2n}\right| = a_{2n} = \frac{g}{(2n)!}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$.

Как видно, значения $\left|a_n\right|$ совпадают с соответствующими значениями для выше рассмотренных случаев **B** и **D**, т.е. вероятности ветвлений π_n для случаев $f(x,u) = g\,\mathrm{sh}(u)$ и $f(x,u) = g\,\mathrm{ch}(u)$ будут одинаковыми соответственно с вероятностями ветвлений для случаев $f(x,u) = g\sin(u)$ и $f(x,u) = g\cos(u)$.

3.Заключение

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что при помощи построенного алгоритма можно строить оценки, эффективно реализуемые на компьютере. Параметр α используемых при расчетах вероятностей ветвлений, дает возможность контроля за средним количеством ветвлений и средним количеством частиц дерева. Напомним, что параметр выбирался из условия $M/c \le \alpha < 1$. Для численного эксперимента использовано значение $\alpha = 0.9$, количество моделируемых траекторий равно 5000. Из таблицы №1 видно среднее количество частиц дерева $skchd \approx 12$ и максимальное заполнение массива «памяти» $maxind \approx 4$. По ходу вычислений оценивался 99,7% доверительный интервал для обеих оценок, т.е. с вероятностью, приблизительно равной *0.997*, точное значение решения будет в интервале $\left(\bar{\xi} - 3\sigma, \bar{\xi} + 3\sigma\right)$. Так как в выбранных примерах известны точные решения, мы имеем возможность убедиться, что все оценки попадают в доверительный интервал.

Таблица №1. Результаты вычислительного эксперимента.

№МЗ	D	R	x0	Uточ	S	err	3sig	skv	skchd	время	maxind
МЗ№2	shar	0,9	(0,4;0,2;-0,6)	0,00230	0,00282	0,00052	0,00080	1,04	12,30	00:00:00:172	3
МЗ№1	shar	0,9	(-0,4;0,2;-0,6)	0,89022	0,89553	0,00531	0,01781	1,04	12,29	00:00:00:172	3
МЗ№1	shar	0,9	(-0,4;0,2;-0,6)	0,89022	0,89204	0,00182	0,01908	1,05	12,32	00:00:00:171	3
МЗ№3	shar	0,9	(-0,7;0,2;-0,1)	-0,56464	-0,56740	0,00276	0,02328	1,06	12,43	00:00:00:172	3
МЗ№3	kub	1,0	(0,7;0,2;0,1)	0,84147	0,83611	0,00536	0,01916	1,01	11,68	00:00:00:172	2
МЗ№5	kub	1,0	(0,9;0,2;0,1)	0,65244	0,64132	0,01112	0,01901	0,99	10,37	00:00:00:172	2
МЗ№2	shar	1,2	(0,9;0,2;0,1)	0,00032	-0,00049	0,00082	0,00259	1,08	13,18	00:00:00:172	3
МЗ№2	shar	1,2	(0,9;0,2;0,1)	0,00032	0,00198	0,00166	0,00225	1,07	13,22	00:00:00:187	3
МЗ№5	shar	2,0	(0,9;0,2;0,1)	0,65244	0,67290	0,02046	0,11216	0,37	10,56	00:00:00:171	9
МЗ№1	shar	1,0	(0,5;0,5;0,5)	0,08925	0,06402	0,02523	0,01320	1,06	12,36	00:00:00:031	2
МЗ№2	shar	1,0	(0,5;-0,5;0,5)	0,01563	0,01139	0,00424	0,00519	1,05	11,77	00:00:00:031	2
МЗ№4	shar	1,0	(-0,1;-0,5;0,5)	0,97531	1,00188	0,02657	0,06357	1,10	13,19	00:00:00:031	2
МЗ№4	shar	1,0	(-0,1;-0,5;0,5)	0,97531	0,95390	0,02141	0,02919	1,11	13,03	00:00:00:187	3

Пояснения к таблице №1:

№ МЗ - номер задачи; **D** - область, в которой рассматривается задача; **R** - радиус шара, если область D шар, длина грани, если D куб; $\mathbf{x_0}$ - точка, в которой решается задача; $\mathbf{N_t}$ - количество реализаций оценки; $\mathbf{U_{точ}}$ - точное решение $U_{точ} = u(x_0)$; **S –** выборочная оценка $S = \overline{\xi} = \frac{1}{N_t}\left(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{N_t}\right)$, где $\xi = \zeta_{N^*}(x_0)$ и ξ_i - независимые реализации случайной оценки решения ξ; **DS** - выборочная дисперсия $DS = \left(\frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k^2 - S^2\right)$; **err** - разность между точным решением и оценкой $err = |u(x_0) - S|$; **σ** - статистическая оценка величины $\sqrt{D\xi / N_t}$, где $D\xi$ - дисперсия оценки решения задачи; **3sig** - выборочный доверительный интервал для оценки; **skchd** - среднее количество частиц дерева; **skv** - среднее количество ветвлений; **время** - время, затраченное на вычисление оценки; **maxind** – максимальное заполнение массива, отведенного под «память», т.е. для хранение необработанных данных о частицах.

Литературы:

[1] *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы (издание второе)// Москва: Наука, 1975. - 327с.

[2] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование// Москва: Наука, 1982. - 296 с. 2-е изд.

[3] *Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С.* Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики// Москва: Наука, 1984. - 204с.

[4] *Курант Р.* Уравнения с частными производными// Москва: Мир, 1964. - 789с.

[5] *Мейер П.А.* Вероятность и потенциалы// Москва: Мир, 1973. - 330с.

[6] *Михайлов Г.А.* Решение задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений методом Монте-Карло// Сиб. матем. журн. - Новосибирск, 1994. - Том 35, № 5. - С.1085-1093.

[7] *Расулов А.С.* Метод Монте-Карло для решения нелинейных задач// Ташкент: Фан, 1992. - 104с.

[8] *Расулов А.С., Сипин А.С.* Решение одного нелинейного уравнения методом Монте-Карло// В сб. «Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике». - Новосибирск, 1976. - С.149-155.

[9] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа// Москва: Мир, 1968. - 428с.

[10] *Харрис Т.Е.* Теория ветвящихся процессов// Москва: Мир, 1966. - 355с.

[11] *Ширяев А.Н.* Вероятность// Москва: Наука, 1989. - 640с.

[12] *Ermakov S.M., Nekrutkin V.V., Sipin A.S.* Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics// Kluwer Acad. Publ., 1989. - 282p.