

УДК 532.536

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

**Нармурадов Ч.Б.**

д.ф.-м.н., заведующий кафедрой Термезского государственного университета,  
тел.: (+99891) 577-93-16, e-mail: normchnor2016@umail.uz

**Холияров Э.Ч.**

к.ф.-м.н., преподаватель кафедры Термезского государственного университета,  
тел.: (+99890) 743-05-47, e-mail: e.kholiyarov@mail.ru

**Гулумкодиров К.А.**

старший преподаватель кафедры Термезского государственного университета,  
тел.: (+99891) 900-18-25, e-mail: kommiljon@mail.ru

Численно решена коэффициентная обратная задача фильтрации релаксационной жидкости в пористой среде. Задача заключается в нахождении времени релаксации градиента давления по дополнительной информации о решении прямой задачи. Для решения задачи применены методы идентификации первого и второго порядка, метод Ньютона и метод секущих. Наиболее устойчивым к возмущениям исходных данных среди рассмотренных методов является модифицированный метод идентификации (метод идентификации второго порядка). Поэтому для решения этой обратной задачи целесообразно применять модифицированный метод второго порядка.

**Ключевые слова:** обратная задача, регуляризация, релаксационная фильтрация, устойчивость решения, метод идентификации, метод Ньютона, метод секущих.

## NUMERICAL MODELLING OF INVERSE PROBLEM RELAXATION FILTRATION OF THE HOMOGENEOUS LIQUID IN POROUS MEDIA

Narmuradov Ch.B., Holiyarov E.Ch., Gulomkodiroy K.A.

In this paper numerical solved coefficient inverse problem at the relaxation liquid in porous media. The problem consists in identification coefficient of relaxation time of the gradient pressure by the additional information about solution of the direct problem. Various identification methods are applied to solve the problem. To solve the problem identification techniques applied first and second order, Newton's method and the secant method. The most resistant to perturbations of the initial data among the methods considered, is a modified method of identification (identification of a second-order method). Therefore, to solve the inverse problem, it is advisable to apply the modified method of the second order.

**Keywords:** inverse problem, regularization, relaxation filtration of the liquid, stability of the solution, method of identification, Newton's method, the secant method.

## G'OVAK MUHITDA BIRJINSLI SUYUQLIK SIZISHINING TESKARI MASALASINI SONLI MODELLASHTIRISH

Narmuradov Ch.B., Holiyarov E. Ch., Gulomkodiroy K.A.

Maqolada g'ovak muhitda relaksasion sizishning koeffitsiyentli teskari masalasi sonli yechilgan. Masala to'g'ri masala yechimi haqidagi qo'shimcha axborotlardan foydalanib bosim gradiyenti relaksasiya vaqtini aniqlashdan iborat. Masala yechimini topish uchun birinchi va ikkinchi tartibli identifikatsiya usullari, Nyuton va kesuvchilar usullari qo'llangan. Qo'zg'atilgan berilgan ma'lumotlarga nisbatan qaralgan usullar orasida eng turg'uni modifikatsiyalangan identifikatsiya usuli (ikkinchi tartibli identifikatsiya usuli) sanaladi. Shu sababli bu teskari masalanin yechish uchun ikkinchi tartibli modifikatsiyalangan ikkinchi tartibli identifikatsiya usulini qo'llash maqsadga muvofiq.

**Kalit so'zlar:** teskari masala, regularlashtirish, suyuqliklarning relaksasion sizishi, yechim turg'unligi, identifikatsiya usuli, Nyuton usuli, kesuvchilar usuli.

**1. Введение**

Обычно при описании релаксационной фильтрации используются различные феноменологические модели, учитывающие запаздывания в соотношениях между скоростью фильтрации и градиентом давления. В отдельных случаях приходится учитывать запаздывание и в уравнениях состояния. Одной из первых работ в этом направлении является [1], в которой рассмотрены некоторые нестационарные одномерные задачи фильтрации при упругом режиме в предположении отставания градиента давления от скорости фильтрации. В работе [2] рассматриваются некоторые нестационарные одномерные задачи фильтрации при упругом режиме в предположении отставания градиента давления от скорости фильтрации. В [3] предлагается обобщенное уравнение фильтрации на случай релаксации градиента давления и скорости фильтрации. Дальнейшее развитие теории релаксационной фильтрации излагается в [4]. В данной работе рассматривается задача определения времени релаксации градиента давления для модели [2]. Этот коэффициент определяется из решения обратной задачи. Для решения обратной задачи применяем метод идентификации [5]. Теория и методы решения обратных задач математической физики отражены в [6-11].

**2. Постановка обратной задачи**

Уравнение фильтрации жидкости в пористой среде с учетом времени релаксации давления имеет вид [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (1)$$

где  $p$  – давление,  $x$  – координата,  $t$  – время,  $\chi$  – коэффициент пьезопроводности,  $\lambda_p$  – время релаксации градиента давления.

Будем искать  $\lambda_p$  из условия минимума функционала

$$J(\lambda_p) = \int_0^T [p(0,t) - z(t)]^2 dt, \quad (2)$$

где  $z(t)$  – наблюдаемые значения давления,  $p(0,t)$  – вычисленные значения давления.

Условие стационарности функционала (2) имеет вид

$$\frac{dJ(\lambda_p)}{d\lambda_p} = 2 \int_0^T [p(0,t) - z(t)] w(0,t) dt = 0, \quad (3)$$

где  $w = dp/d\lambda_p$ .

Разложим в ряд функцию  $p$  в окрестности  $\lambda_p^s$  с точностью до членов второго порядка:

$$p^{s+1}(x,t) \approx p^s(x,t) + \left( \lambda_p^{s+1} - \lambda_p^s \right) w^s(x,t). \quad (4)$$

Для сокращения записи здесь и далее считается, что верхний индекс  $s$  над обозначениями функций означает, что они вычисляются при значении

$$\lambda_p = \lambda_p^s.$$

Подставляя в (3) разложение (4), получаем линеаризованное соотношение относительно коэффициента  $\lambda_p^{s+1}$ :

$$2 \int_0^T \left[ p^s(0,t) + \left( \lambda_p^{s+1} - \lambda_p^s \right) w^s(0,t) - z(t) \right] w^s(0,t) dt = 0,$$

откуда легко можно вычислить приближение  $\lambda_p^{s+1}$ ,

если функции  $p^s(x,t)$  и  $w^s(x,t)$  известны:

$$\lambda_p^{s+1} = \left\{ \int_0^T \left[ \lambda_p^s w^s(0,t) - p^s(0,t) + z(t) \right] w^s(0,t) dt \right\} \times \left\{ \int_0^T w^{s2}(0,t) dt \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Продифференцируем уравнение (1) по  $\lambda_p$  и получим уравнение относительно  $w(x,t)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \chi \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t}. \quad (6)$$

В уравнениях (1), (6) при  $\lambda_p = \lambda_p^s$  получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial p^s}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 p^s}{\partial x^2} + \lambda_p^s \frac{\partial^3 p^s}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial w^s}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} + \lambda_p^s \frac{\partial^3 w^s}{\partial x^2 \partial t} \right) + \chi \frac{\partial^3 p^s}{\partial x^2 \partial t}.$$

Численную реализацию изложенного метода рассмотрим на примере определения параметра  $\lambda_p$  в уравнении (1) в конечном пласте  $[0, L]$  с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} p(x,0) &= p_0, \\ v(0,t) &= v_0 = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right) \Bigg|_{x=0}, \\ p(L,t) &= p_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $p_0 = \text{const}$ ,  $v_0 = \text{const}$ ,  $v$  – скорость фильтрации,  $k$  – проницаемость пласта,  $\mu$  – вязкость жидкости.

Граничные и начальные условия для функции  $w(x, t)$  получаем из соответствующих условий для функции  $p(x, t)$  путем дифференцирования их по параметру  $\lambda_p$  соответственно:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \\ -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right) \Bigg|_{x=0} &= 0, \\ w(L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. Численные методы решения обратной задачи

Сначала численно решим уравнение (1) с условиями (8) при известных значениях  $\lambda_p = 1000$  с,  $p_0 = 10$  МПа,  $v_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  м/с,  $k = 1 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>,  $\chi = 5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с,  $\mu = 1 \cdot 10^{-7}$  МПа·с,  $L = 100$  м и определим решение в точке  $x = 0$ . Затем используем в качестве «данных измерений»  $z(t_j) = p(0, t_j)$ , которое определено из решения  $p(x, t)$ , где  $t_j$  – дискретное время. График  $z(t)$  представлен на рис.1. Время  $t_j$  выбирается из временного слоя сетки, используемого в дальнейшем для разностного решения задачи. Величины  $z(t_j)$  вычисляются в точке  $x = 0$  для различных  $t_j$ .

Система уравнений (7) решается с условиями (8) - (9).

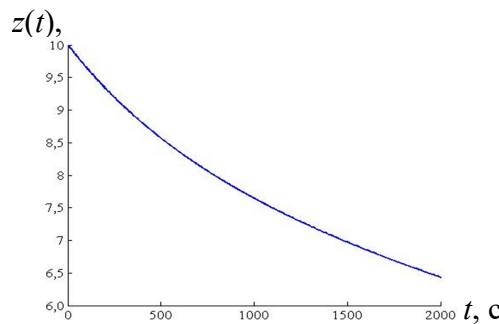


Рис. 1. График функции  $z(t)$

Из условия стационарности функционала  $dJ/d\lambda_p = 0$  получаем следующее соотношение:

$$\int_0^T [p(0, t) - z(t)] w(0, t) dt \equiv F(\lambda_p) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) рассматриваем как нелинейное уравнение относительно  $\lambda_p$ , которое можно решить итерационным методом Ньютона. Пусть  $\lambda_p^s$  – некоторое приближенное значение этого коэффициента для  $s$ -й итерации. Тогда следующее приближение  $\lambda_p^{s+1}$  определяется из

Численный алгоритм нахождения  $\lambda_p$  строится так: а) задаем некоторое начальное приближение  $\lambda_p^0$  (полагаем  $s = 0$ ); б) решаем систему (7) с условиями (8) - (9) и определяем функции  $p^s, w^s$ ; в) вычисляем (2) и (5); г) полагаем  $\lambda_p = \lambda_p^{s+1}$ ; д) повторяем этапы б), в), г) до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность.

В качестве критерия окончания итерационного процесса используем одно из следующих неравенств:

$$\left| p^{s+1} - p^s \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \lambda_p^{s+1} - \lambda_p^s \right| < \varepsilon_2, \quad \left| J(\lambda_p^{s+1}) - J(\lambda_p^s) \right| < \varepsilon_3$$

или их совокупность,

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – заданные малые величины.

Систему уравнений (7) решаем разностным методом [12].

Теперь для решения задачи используем метод второго порядка. Идея метода заключается в использовании непосредственного разложения исходного функционала на каждой итерации в окрестности  $\lambda_p^s$  до членов третьего порядка, т.е. [5]:

$$\begin{aligned} J(\lambda_p^{s+1}) &= J(\lambda_p^s) + \frac{dJ(\lambda_p^s)}{d\lambda_p} (\lambda_p^{s+1} - \lambda_p^s) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2 J(\lambda_p^s)}{d\lambda_p^2} (\lambda_p^{s+1} - \lambda_p^s)^2. \end{aligned}$$

$$F(\lambda_p^s) + \frac{dF(\lambda_p^s)}{d\lambda_p} (\lambda_p^{s+1} - \lambda_p^s) = 0,$$

т.е.

$$\lambda_p^{s+1} = \lambda_p^s - F(\lambda_p^s) \left( \frac{dF(\lambda_p^s)}{d\lambda_p} \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\lambda_p} &= \int_0^T \{ [p(0, t) - z(t)] u(0, t) + \\ &+ w^2(0, t) \} dt, \end{aligned}$$

где, как и ранее,  $w(x,t) = dp/d\lambda_p$  и введено новое обозначение  $u(x,t) = d^2 p/d\lambda_p^2$ . Таким образом, для того чтобы вычислить  $\lambda_p^{s+1}$ , необходимо определить функции  $w(x,t)$  и  $u(x,t)$  в точке  $x = 0$  при  $\lambda = \lambda_p^s$ .

Уравнение для определения  $u(x,t)$  может быть получено путем двукратного дифференцирования уравнения (6) по  $\lambda_p$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_p^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) + 2 \chi^s \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}, \quad (11)$$

где  $u(x,t) = \partial^2 p / \partial \lambda_p^2$ .

Чтобы получить начальные и граничные условия для уравнения (11) двукратно дифференцируем по  $\lambda_p$  условия (8):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \\ -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=0} &= 0, \\ u(L,t) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Системы (7) и (11) при  $\lambda_p = \lambda_p^s$  решаются численно с помощью неявной разностной схемы [12].

В области  $D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  вводим сетку  $\omega_{h\tau} = \{(t_j, x_i); t_j = j\tau, x_i = ih, \tau = T/K, h = L/N, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, K}\}$ , уравнения (7) на сетке  $\omega_{h\tau}$  аппроксимируем неявной конечно-разностной схемой с точностью  $O(\tau + h^2)$  (без обозначения номера итерацией над  $p, w$ ):

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} &= \chi \left[ \frac{p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j}{h^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_p^s}{\tau} \left( \frac{p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}}{h^2} - \frac{p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j}{h^2} \right) \right], \\ \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\tau} &= \chi \left[ \frac{w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j}{h^2} + \right. \\ &+ \frac{\lambda_p^s}{\tau} \left( \frac{w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}}{h^2} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j}{h^2} \right) \right] + \\ &+ \chi \left( \frac{p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}}{h^2} - \right. \\ &\left. - \frac{p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j}{h^2} \right) \end{aligned}$$

или

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Cp_i^{j+1} + Bp_{i+1}^{j+1} = -P_i, \quad (13)$$

$$Aw_{i-1}^{j+1} - Cw_i^{j+1} + Bw_{i+1}^{j+1} = -W_i, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A = B = \frac{\chi \lambda_p^s}{h^2}, \quad C = 1 + 2A, \quad P_i = p_i^j + \\ + \chi \left( \tau - \lambda_p^s \right) \frac{p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j}{h^2}. \end{aligned}$$

Аппроксимируем начальные и граничные условия (8), (9):

$$\begin{aligned} p_i^0 &= p_0, \\ v_0 &= -\frac{k}{\mu} \times \\ &\times \left[ \frac{p_0^j - p_1^j}{h} + \frac{\lambda_p^s}{\tau} \left( \frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} - \frac{p_0^j - p_1^j}{h} \right) \right], \quad (15) \\ p_N^{j+1} &= p_0, \\ w_i^0 &= 0, \\ -\frac{k}{\mu} \left[ \frac{w_0^j - w_1^j}{h} + \frac{\lambda_p^s}{\tau} \left( \frac{w_0^{j+1} - w_1^{j+1}}{h} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{w_0^j - w_1^j}{h} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\tau} \left( \frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} - \frac{p_0^j - p_1^j}{h} \right) = 0, \\ w_N^{j+1} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для решения (13), (14) с условиями (15), (16) используется метод прогонки:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B}{C - \alpha_i A}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + P_i}{C - \alpha_i A}, \\ i &= \overline{1, N-1}, \\ p_i^{j+1} &= \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \\ i &= \overline{N-1, 0}, \\ p_0^{j+1} &= \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1 = p_1^{j+1} - \\ &- (v_0 \mu h \tau) / \left( k \lambda_p^s \right) - \\ &- \left( \tau - \lambda_p^s \right) \left( p_0^j - p_1^j \right) / \lambda_p^s, \\ \alpha_1 &= 1, \\ \beta_1 &= - (v_0 \mu h \tau) / \left( k \lambda_p^s \right) - \\ &- \left( \tau - \lambda_p^s \right) \left( p_0^j - p_1^j \right) / \lambda_p^s, \\ \alpha_{i+1}^{(1)} &= \frac{B}{C - \alpha_i^{(1)} A}, \quad \beta_{i+1}^{(1)} = \frac{A\beta_i^{(1)} + W_i}{C - \alpha_i^{(1)} A}, \\ i &= \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_i^{j+1} &= \alpha_{i+1}^{(1)} w_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{(1)}, \\
 i &= \overline{N-1, 0}, \\
 w_0^{j+1} &= \alpha_1^{(1)} w_1^{j+1} + \beta_1^{(1)} = w_1^{j+1} - \\
 &\quad - \left( \tau - \overset{s}{\lambda}_p \right) (w_0^j - w_1^j) / \overset{s}{\lambda}_p - \\
 &\quad - \left[ (p_0^{j+1} - p_1^{j+1}) - (p_0^j - p_1^j) \right] / \overset{s}{\lambda}_p, \\
 \alpha_1^{(1)} &= 1, \\
 \beta_1^{(1)} &= - \left( \tau - \overset{s}{\lambda}_p \right) (w_0^j - w_1^j) / \overset{s}{\lambda}_p - \\
 &\quad - \left[ (p_0^{j+1} - p_1^{j+1}) - (p_0^j - p_1^j) \right] / \overset{s}{\lambda}_p.
 \end{aligned}$$

Аппроксимируем уравнение (11) и начальные и граничные условия (12):

$$\begin{aligned}
 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} &= \chi \left[ \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + \right. \\
 &\quad + 2 \frac{\chi}{\tau} \left( \frac{w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}}{h^2} - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j}{h^2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

или

$$Au_{i-1}^{j+1} - Cu_i^{j+1} + Bu_{i+1}^{j+1} = -U_i, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
 U_i &= u_i^j + \chi \left( \tau - \overset{s}{\lambda}_p \right) \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + \\
 &\quad + 2 \frac{\chi}{h^2} \left[ (w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j) \right].
 \end{aligned}$$

Аппроксимируем начальные и граничные условия (12):

$$\begin{aligned}
 u_i^0 &= 0, \quad -\frac{k}{\mu} \left[ \frac{u_0^j - u_1^j}{h} + \right. \\
 &\quad + \frac{\overset{s}{\lambda}_p}{\tau} \left( \frac{u_0^{j+1} - u_1^{j+1}}{h} - \frac{u_0^j - u_1^j}{h} \right) + \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\tau} \left( \frac{w_0^{j+1} - w_1^{j+1}}{h} - \frac{w_0^j - w_1^j}{h} \right) \right] = 0, \quad (18) \\
 u_N^{j+1} &= 0.
 \end{aligned}$$

Для решения (17) с условиями (18) используется метод прогонки:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i+1}^{(2)} &= \frac{B}{C - \alpha_i^{(2)} A}, \\
 \beta_{i+1}^{(2)} &= \frac{A\beta_i^{(2)} + U_i}{C - \alpha_i^{(2)} A}, \\
 i &= \overline{1, N-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_i^{j+1} &= \alpha_{i+1}^{(2)} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{(2)}, \\
 i &= \overline{N-1, 0}, \\
 u_0^{j+1} &= \alpha_1^{(2)} u_1^{j+1} + \beta_1^{(2)} = u_1^{j+1} - \\
 &\quad - \left( \tau - \overset{s}{\lambda}_p \right) (u_0^j - u_1^j) / \overset{s}{\lambda}_p - \\
 &\quad - 2 \left[ (w_0^{j+1} - w_1^{j+1}) - (w_0^j - w_1^j) \right] / \overset{s}{\lambda}_p, \\
 \alpha_1^{(2)} &= 1, \\
 \beta_1^{(2)} &= - \left( \tau - \overset{s}{\lambda}_p \right) (u_0^j - u_1^j) / \overset{s}{\lambda}_p - \\
 &\quad - 2 \left[ (w_0^{j+1} - w_1^{j+1}) - (w_0^j - w_1^j) \right] / \overset{s}{\lambda}_p.
 \end{aligned}$$

Сеткой разбит координатный отрезок [0;100] на 200 интервалов, временный отрезок [0;2000] – на 4000 интервалов. «Данные измерений» подготовлены на основе этого решения в 800 точках «время».

#### 4. Анализ численных расчетов и заключение

Результаты расчетов по определению коэффициента  $\lambda_p$  методом первого порядка (по формуле (5)) при различных нулевых приближениях  $\lambda_p^0$  представлены на рис. 2. Результаты расчетов показывают, что при различных нулевых приближениях  $\lambda_p^0$  коэффициент  $\lambda_p$  восстанавливается практически за пять и шесть итераций (рис. 2). При слишком удаленном начальном приближении от точки равновесия  $\lambda_p$  не приближается к равновесному значению (при  $\lambda_p^0 = 3000$  с). Поэтому для решения данной задачи используем модифицированный метод второго порядка [5]. На каждом итерационном слое вместо функционала (2) используем

$$J_M \left( \lambda_p \right) = J \left( \lambda_p \right) + \alpha \left( \lambda_p - \overset{s}{\lambda}_p \right)^2,$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации.

На рис. 3 показано поведение определяемого коэффициента в зависимости от величины  $\alpha$ . Результаты расчетов показывают, что при достаточно малых значениях  $\alpha$  происходит относительно точное восстановление коэффициента  $\lambda_p$ .

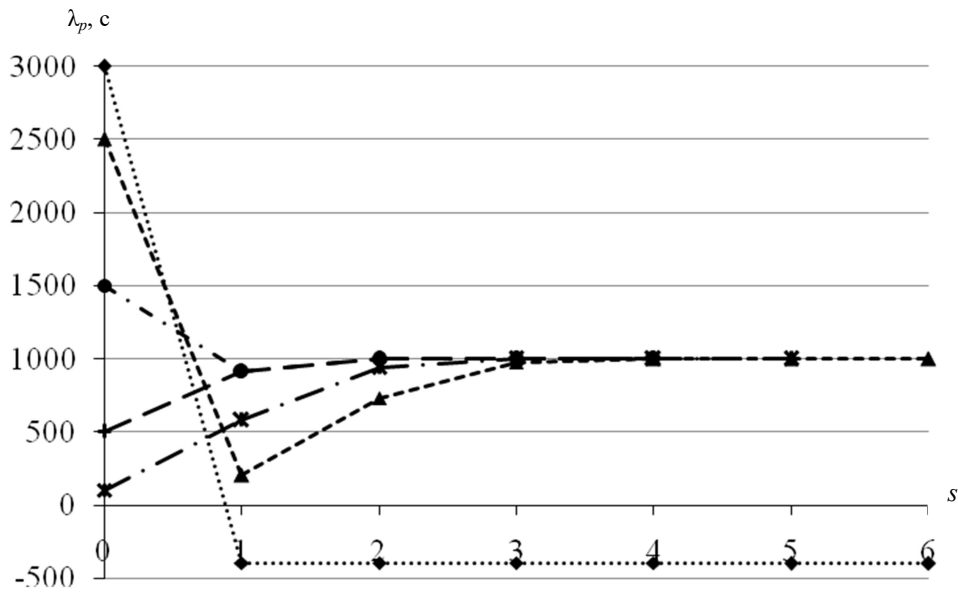


Рис. 2. Восстановление значения  $\lambda_p$  методом первого порядка при различных начальных приближениях

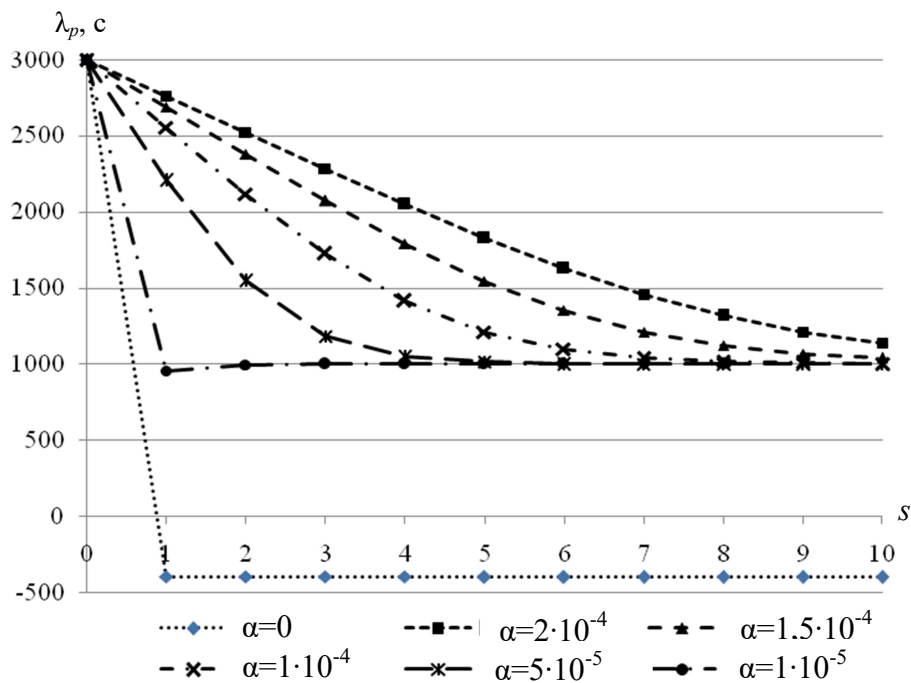


Рис. 3. Восстановление значения  $\lambda_p$  модифицированным методом второго порядка

При решении обратных задач центральным вопросом является исследование устойчивости решения по отношению к погрешностям исходных данных [8]. Обычно для обеспечения устойчивости применяются методы регуляризации [8]. Здесь для исследования устойчивости решений, полученных различными методами, проводились вычислительные эксперименты с возмущенными исходными данными. Погрешность в задании исходных данных моделировалась следующим образом:

$$z^\delta(t) = z(t) + 2\delta(\sigma(t) - 0,5), \quad t = t_j,$$

где  $z^\delta(t)$  – возмущенные величины  $z(t)$ ,  $\delta$  – погрешность,  $\sigma(t)$  – равномерно распределенная на  $(0, 1)$  случайная величина.

Результаты расчетов с возмущенным исходным данным приведены в таблице, откуда видно, что регуляризирующий параметр  $\alpha$  существенно улучшает восстановление

Значения  $\lambda_p$  при различных значениях  $\alpha$

Погрешность, $\delta$	Регуляризирующий параметр, $\alpha$	Число итераций, $s$	Нулевое приближение, $\lambda_p^0$ , с	Расчетное значение, $\lambda_p$ , с	Относительная погрешность возмущенного решения, %
0,1	0	6	2500,0	1003,534056	0,353406
0,1	$1 \cdot 10^{-5}$	9	2500,0	999,382362	0,061764
0,2	0	6	2500,0	1010,552349	1,055235
0,2	$1 \cdot 10^{-5}$	9	2500,0	1002,028652	0,202865
0,5	0	7	2500,0	982,231805	1,776820
0,5	$1 \cdot 10^{-5}$	9	2500,0	1007,488370	0,748837
1,0	0	7	2500,0	945,629947	5,437005
1,0	$1 \cdot 10^{-5}$	9	2500,0	978,480068	2,151993

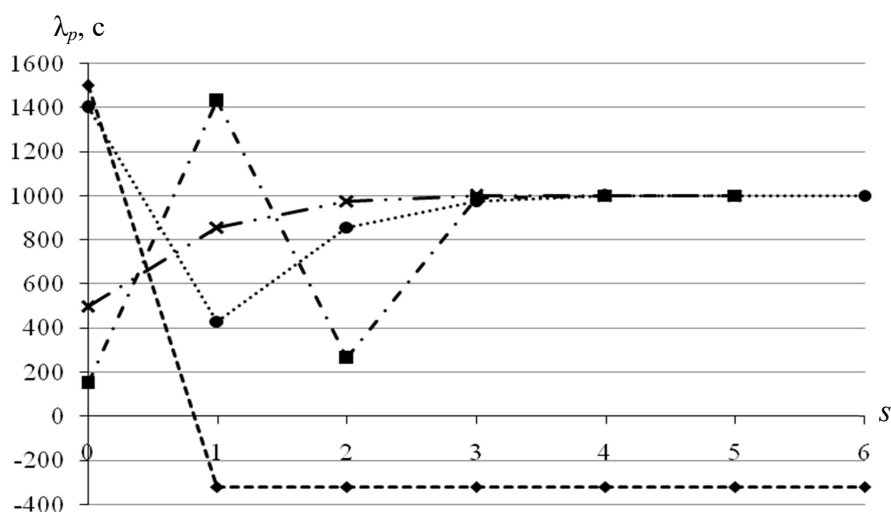


Рис. 4. Восстановление значения  $\lambda_p$  методом Ньютона при различных начальных приближениях

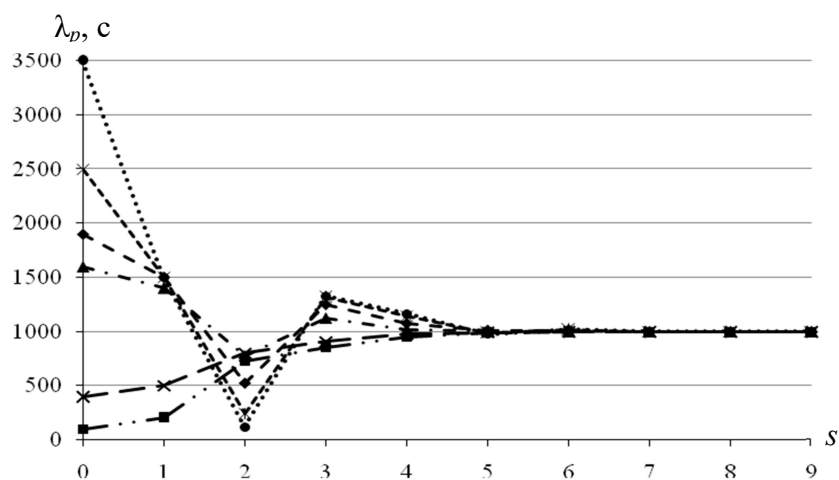


Рис. 5. Восстановление значения  $\lambda_p$  методом секущих при различных начальных приближениях

На рис. 4 приведены результаты расчетов по методу Ньютона при различных начальных приближениях  $\lambda_p$ . Метод Ньютона относится к методам второго порядка, поэтому при его

применении естественно ожидать относительно лучшие результаты. Однако сравнение результатов расчетов (представленных на рис. 2 и 4) показывает, что метод первого порядка относительно хорошо

восстанавливает  $\lambda_p$ , чем метод Ньютона. В методе Ньютона при каждой итерации надо решать три прямых задачи. Это, по-видимому, связано с накоплением погрешностей при увеличении количества вычислений. Для сокращения объема вычислений можно использовать модифицированные методы Ньютона, применение которых приводит к решению двух прямых задач. Например, вместо метода Ньютона для определения  $\lambda_p$  можно использовать метод секущих, т.е. уравнение вида [13]:

$$\lambda_p^{s+1} = \lambda_p^s - \left[ F \left( \lambda_p^s \right) \left( \lambda_p^s - \lambda_p^{s-1} \right) \right] \times \left[ F \left( \lambda_p^s \right) - F \left( \lambda_p^{s-1} \right) \right]^{-1}.$$

## Литература

- [1] Баренблатт Г.И. Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1973. – № 5. – С. 76-83.
- [2] Алишаев М.Г. О нестационарной фильтрации с релаксацией давления // Тр. Московского обл. пед. ин-та им. Н.К.Крупской. – М., 1974. – Вып. 111. – С. 166-177.
- [3] Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изд. вузов. Нефть и газ. – 1975. – № 6. – С. 71-74.
- [4] Молокович Ю.М. и др. Релаксационная фильтрация. – Казань: КГУ, 1980. – 136 с.
- [5] Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. – Новосибирск: Наука, 1980. – 161 с.
- [6] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 710 p.
- [7] Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- [8] Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. – Berlin: Walter de Gruyter, 2000. – 439 p.
- [9] Hao D. Methods for inverse heat conduction problems. – Peter Lang pub. Inc. 1998. – 249 p.
- [10] Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R. Jr. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. A Wiley-Interscience Publication. – New York, 1985. – 308 p.
- [11] Czisik M.N., Orlande H.R. Inverse heat transfer. Fundamentals and applications. – New York: Taylor&Francis, 2000. – 331 p.
- [12] Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
- [13] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 842 с.

На рис. 5 представлены результаты расчетов с использованием метода секущих, который может дать хороший результат при удачном выборе  $\lambda_p^0$  и  $\lambda_p^1$ . Видно, что метод секущих лучше восстанавливает  $\lambda_p$ , чем метод Ньютона.

Наиболее устойчивым к возмущениям исходных данных среди рассмотренных методов является модифицированный метод. Поэтому для решения этой обратной задачи целесообразно применять модифицированный метод второго порядка, основанный на (13).