УДК 519.712.2

ОСОБЕННОСТИ КРИТЕРИЕВ ИНФОРМАТИВНОСТИ ФИШЕРА

Фазылов Ш.Х.
заместитель директора Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99890) 927-72-13, e-mail: sh.fazilov@mail.ru

Маматов Н.С.
старший научный сотрудник Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99893) 506-24-57, e-mail: m_narzullor@mail.ru

В статье рассматривается исследование критериев информативности, позволяющий выявить их особенности, которые необходимо учитывать при построении методов выбора информативных признаков, основанных на использовании критериев Фишеровского типа. Критерии информативности Фишеровского типа, являясь эвристическими, основаны на оценке меры разделимости объектов заданной обучающей выборки с использованием Евклидовой метрики.

Ключевые слова: признак, критерий, информативный признак, объект, класс.

FEATURES OF THE FISHER'S INFORMATION CRITERIA

Sh.X.Fazilov, N.S.Mamatov

The article deals with the study of the criteria of informativeness, which makes it possible to reveal their features that must be taken into account when constructing methods for selecting informative features based on the use of the Fisher-type criteria. Criteria of informativeness of the Fisher type, being heuristic, are based on an estimation of the measure of separability of objects of a given training sample using the Euclidean metric.

Keywords: feature, criterion, informative feature, object, class.

ФИШЕР ИНФОРМАТИВЛИК МЕЗОНЛАРИНИНГ ХУСУСИЯТЛАРИ

Ш.Х.Фозилов, Н.С.Маматов

Мақолада Фишер типидаги мезонлар тадқиқ этилган бўлиб, улар асосида информатив белгиларни ажратиш усулларини шакллантиришда муҳим аҳамият касб этувчи информативлик мезони хусусиятлари кўриб чиқилган. Фишер типидаги мезонлар эвристик бўлиб, улар Эвклид метрикасидан фойдаланган ҳолда берилган ўқув танланма асосида объектларни ажратишни баҳолашга мўлжалланган.

Калит сўзлар: белги, мезон, информатив белги, объект, синф.

Выбор признаков является необходимым этапом при построении систем классификации. Удачное решение данной задачи обеспечивает как снижение размерности вектора, то есть выбор информативных признаков, измерений и описания объектов, так и повышение эффективности системы классификации в целом. В настоящее время для решения многих практических задач широко применяется выбор информативных признаков с помощью критериев Фишеровского типа. При этом мало исследованы особенности этих критериев. В статье рассматривается исследование этих критериев, позволяющий выявить их особенности, которые необходимо учитывать при построении методов выбора информативных признаков, основанных на использовании данных критериев.

Критерии информативности Фишеровского типа, являясь эвристическими, основаны на оценке меры разделимости объектов заданной обучающей выборки с использованием евклидовой метрики.

Допустим, обучающая выборка задана объектами $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m_1}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2m_2}, ..., x_{r1}, x_{r2}, ..., x_{rm_r}$, для которых известно, что каждая группа объектов $x_{p1}, x_{p2}, ..., x_{pm_p}$ принадлежит к определенному классу $X_p, p = \overline{1, r}$.

Каждый объект x_{pi} является N-мерным вектором числовых признаков, т.е. $x_{pi} = \left(x_{pi}^1, x_{pi}^2, ..., x_{pi}^N\right)$.

Для заданной обучающей выборки объектов $x_{p1}, x_{p2}, ..., x_{pm_p} \in X_p$, $p = \overline{1, r}$, где x_{pi}-вектор в N-мерном признаковом пространстве, введем вектор $\lambda = \left(\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N\right)$, $\lambda^k \in \{0;1\}$, $k = \overline{1, N}$, который, как отмечено в предыдущем параграфе, однозначно характеризует определенную подсистему признаков.

Компоненты вектора λ, равные единице, указывают на наличие соответствующих признаков в данной подсистеме, а нулевые компоненты свидетельствуют об отсутствии соответствующих признаков.

Пространство признаков $\left\{ x = \left(x^1, x^2, ..., x^N\right) \right\}$ будем считать евклидовым и обозначим через R^N.

Определение 1. Усечением пространства $R^N = \left\{ x = \left(x^1, x^2, ..., x^N\right) \right\}$ по λ назовем пространство $R^N\big|_\lambda = \left\{ x\big|_\lambda = \left(\lambda^1 x^1, \lambda^2 x^2, ..., \lambda^N x^N\right) \right\}$.

Под усечением расстояниям между двумя объектами $x, y \in R^N$ будем понимать евклидово расстояние между $x\big|_\lambda$, $y\big|_\lambda$ в $R^N\big|_\lambda$ т.е.

$$\|x - y\|_\lambda = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \lambda^k \left(x^k - y^k\right)^2}.$$

Определение 2. Назовем вектор λ ℓ-информативным, если сумма компонентов равна ℓ, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda^i = \ell.$$

Для каждой подсистемы, заданной ℓ-информативным вектором λ, определено свое ℓ-мерное признаковое подпространство. В каждое из этих подпространств введем евклидову норму относительно усечения по λ

$$\|x\|_\lambda = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \lambda^j \left(x^j\right)^2}.$$

Обозначим

$$\bar{x}_p = \frac{1}{m_p} \sum_{i=1}^{m_p} x_{pi}, \ p = \overline{1, r},$$

где $\bar{x}_p$ -усредненный объект класса X_p.

Введем функцию

$$S_p(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{m_p} \sum_{i=1}^{m_p} \left\|x_{pi} - \bar{x}_p\right\|_\lambda^2}.$$

Функция $S_p(\lambda)$ характеризует средний разброс объектов класса X_p в подмножестве признаков, заданных вектором λ. Зададим критерий информативности подсистем в виде функционала

$$I_1(\lambda) = \frac{\sum\limits_{p,q=1}^{r} \left\|\bar{x}_p - \bar{x}_q\right\|_\lambda^2}{\sum\limits_{p=1}^{r} S_p^2(\lambda)}. \qquad (1)$$

Этот функционал является некоторым обобщением функционала Фишера [1]. Обозначим

$$a = \left(a^1, a^2, ..., a^N\right); \ b = \left(b^1, b^2, ..., b^N\right),$$

$$a^j = \sum_{p,q=1}^{r} \left(\bar{x}_p^j - \bar{x}_q^j\right)^2, \ j = \overline{1, N};$$

$$b^j = \sum_{p=1}^{r} \left(\frac{1}{m_p} \sum_{i=1}^{m_p} \left(\bar{x}_{pi}^j - \bar{x}_p^j\right)^2 \right), \ j = \overline{1, N}.$$

Тогда функционал (1) сводится к виду

$$I(\lambda) = \frac{(a, \lambda)}{(b, \lambda)}, \qquad (2)$$

где (*,*) -скалярное произведение векторов.

Коэффициенты a^j, b^j не зависят от λ и вычисляются заранее. Для расчета функционала $I(\lambda)$ при каждом λ требуется порядка N операций.

Далее критерий, задаваемый в виде функционала (2), будем называть критерием информативности Фишера и обозначать ее как $I_1(\lambda)$. Данный критерий исследован в работах [1-6], где выявлены его особенности, оценена эффективность и предложены методы выбора информативных признаков, основанные на максимизации функционала (2).

Пусть соответствующие отношения компонентов векторов *a* и *b* упорядочены по убыванию:

$$\frac{a^1}{b^1} \ge \frac{a^2}{b^2} \ge ... \ge \frac{a^N}{b^N}. \qquad (3)$$

Пусть Λ^ℓ-множество всех ℓ-информативных векторов. Из определения ℓ-информативного вектора следует, что мощность множества Λ^ℓ равна C_N^ℓ.

Введем обозначение $F(\ell) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda^\ell} I(\lambda)$.

Основная задача. При каждом заданном ℓ требуется найти такой ℓ-информативный вектор $\lambda_\ell \in \Lambda^\ell$, при котором имеет место следующее равенство: $I(\lambda_\ell) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda^\ell} I(\lambda)$, т.е. требуется найти аналитическое выражение функции $F(\ell)$ при условии (3).

Замечание 1. Прежде чем найти аналитическое выражение функции $F(\ell)$, будем считать переменную величину ℓ параметром. Сформулируем задачу, которая эквивалентна основной задаче. Для этого выберем произвольный вектор λ пространства Λ^ℓ, т.е. $\forall \lambda_i \in \Lambda^\ell$, где $1 \le \ell \le C_N^\ell$. Пусть λ_i^k -ненулевой k-компонент вектора λ_i, где $i = \overline{1, \ell}$. Значение функционала (2) в точке $\lambda_i \in \Lambda^\ell$ равен:

$$I(\lambda_i) = \frac{(a, \lambda_i)}{(b, \lambda_i)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{l} a^{i_k} \lambda^{i_k}}{\sum\limits_{k=1}^{l} b^{i_k} \lambda^{i_k}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{l} a^{i_k}}{\sum\limits_{k=1}^{l} b^{i_k}} \qquad (4)$$

Далее множество всевозможных значений функционала $I(\lambda)$ в множестве Λ^ℓ можно описать следующим образом:

$$\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}=\left\{\frac{\sum_{k=1}^{\ell}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell}b^{i_k}}:1\le\ell\le C_N^{\ell}\right\}=\{I\}.$$

Замечание 2. Множество Λ^{ℓ} конечно. Тогда

Множество $\{I\}$ – *конечно* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\{I\}-\text{ограничено}\to\exists\sup\{I\}\ (\inf\{I\})\\ \{I\}-\text{ограничено}\to\sup\{I\}=\max\{I\}\\ \qquad\qquad\qquad(\inf\{I\}=\min\{I\})\end{cases}$$

Воспользовавшись замечанием 2, можно поставить следующую задачу, которая эквивалентна основной задаче.

Задача 1. При каждом значении ℓ требуется найти наибольший элемент множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$, т.е. $\max\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}=?$.

Для решения этой задачи в дальнейшем будет полезна следующие леммы и теорема.

Пусть даны действительные числа a,b *ва* $c\ge0,d>0$ $(a+c\ge0,b+d>0)$. Тогда имеет место одна и следующих лемм:

Лемма 1. Если $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ и $\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$, то имеет место соотношение $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Лемма 2. Если $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ и $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$, то имеет место соотношение $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$.

Лемма 3. Если $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$ и $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$, то имеет место соотношение $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Лемма 4. Если $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$ и $\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$, то имеет место соотношение $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$.

Лемма 5. Если $\begin{cases}a\ge0\\b\le0\end{cases}$, то имеет место соотношение $\frac{a+c}{b+d}\ge\frac{c}{d}$.

Лемма 6. Если $\begin{cases}a\le0\\b\ge0\end{cases}$, то имеет место соотношение $\frac{a+c}{b+d}\le\frac{c}{d}$.

Так как доказательства выше приведенных лемм очень просты, не приведены.

Теорема 1. Для $\forall l\,(l>0)$

$$\max\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}=\frac{a^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b_1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}.$$

Доказательство.

Допустим, компоненты векторов a и b удовлетворяют условие (3) тогда имеем следующее:

$$\frac{a^1}{b^1}\ge\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}\Rightarrow\frac{a^1}{b^1}\ge\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}},\ \frac{a^1}{b^1}\ge\frac{a^t}{b^t},t\ne i_k$$

От $\frac{a^1}{b^1}\ge\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$ и леммы 2 имеем $\frac{a^1}{b^1}\ge\frac{a^1+\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$.

Для $\frac{a^t}{b^t}$ и $\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$ выполняется одно из следующих случаев:

1. $\frac{a^t}{b^t}\ge\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$;

2. $\frac{a^t}{b^t}\le\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$.

Пусть выполняется случай 1, т.е. $\frac{a^t}{b^t}\ge\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$.

Тогда из леммы 2 имеем $\frac{a^t}{b^t}\ge\frac{a^t+\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{b^t+\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$. Докажем, что $\frac{a^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}-\frac{a^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}\ge0$.

$$\frac{a^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}-\frac{a^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}=$$

$$=\frac{\left(a^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\right)\left(b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)-\left(a^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\right)\left(b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}{\left(b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)\left(b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^1\cdot b^t+a^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+b^t\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}{\left(b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)\left(b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}-$$

$$-\frac{\left(a^t\cdot b^1+b^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}+a^t\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}{\left(b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)\left(b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}$$

А). $a^1\cdot b^t+a^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+b^t\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}+$

$+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\geq b^1\cdot a^t+a^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+$

$$+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\frac{a^t\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}=$$

$$=b^1\cdot a^t+a^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+a^t\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}=$$

$$=b^1\cdot a^t+\left(a^1+a^t\right)\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}.$$

Б) $a^t\cdot b^1+b^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}+a^t\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+$

$+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\leq a^t\cdot b^1+a^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+$

$+a^t\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}=$

$$=a^t\cdot b^1+\left(a^1+a^t\right)\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}.$$

Из А) и Б) получим:

$$\frac{\left(a^1\cdot b^t+a^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+b^t\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}{\left(b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)\left(b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}-$$

$$-\frac{\left(a^t\cdot b^1+b^1\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}+a^t\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}\cdot\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}{\left(b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)\left(b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}\right)}\geq 0$$

Отсюда

$$\frac{a^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}}\geq\frac{a^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}a^{j_k}}{b^t+\sum_{k=1}^{\ell-1}b^{j_k}},\left(t=\overline{2,N},t\neq j_k,t\neq 1\right).$$

Пусть выполняется случай 2, т.е. $\frac{a^t}{b^t}\leq\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$.

Тогда из леммы 2 имеем

$$\frac{a^t}{b^t}\leq\frac{a^t+\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{b^t+\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}\leq\frac{\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}\leq\frac{a^1+\sum_{k=1}^{l-1}a^{i_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{l-1}b^{i_k}}$$

Для рассмотрения разности $I\left(\lambda_j\right)-I\left(\lambda_i\right)$ воспользуемся следующей леммой.

Утверждение 1. Если имеет место неравенство (3), тогда

$$\frac{\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}}-\frac{a^1+\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}}\leq 0\,. \quad (5)$$

где $p<N$.

Доказательства.

$$\frac{a^1}{b^1}\geq\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}\Rightarrow a^1b^{i_k}\geq b^1a^{i_k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^1\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}\geq b^1\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}\Rightarrow\frac{a^1}{b^1}\geq\frac{\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}}$$

От $\frac{a^1}{b^1}\geq\frac{\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}}$ и леммы 2 имеем

$$\frac{a^1}{b^1}\geq\frac{a^1+\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}}{b^1+\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}}\geq\frac{\sum_{k=1}^{p}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{p}b^{i_k}}\,.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Из теоремы 1 следует, что множество $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ достигает максимума хотя бы при одном из векторов $\lambda\in\Lambda^{\ell}$, у которых первая компонента отлична от нуля, т.е. при максимальном значении множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ всегда участвуют числа a^1 и b^1. Здесь делается оговорка «… хотя бы при одном…» потому, что множество $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ может достигать максимума в нескольких точках Λ^{ℓ}.

Пример 1. Пусть при некотором фиксированном индексе j имеет место равенство (4), где λ^{j_k} - ненулевые компоненты вектора λ, $k=\overline{1,\ell}$. Пусть в неравенстве (3) выполняются равенства $a^{j_\ell}=a^{j_{\ell+1}}$, $b^{j_\ell}=b^{j_{\ell+1}}$. Тогда множество $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ достигает максимума еще и при другом векторе $\lambda_*\in\Lambda^{\ell}$, ненулевые компоненты которого определяются как $\lambda^{j_k}\left(k=\overline{1,\ell-1}\right)$, $\lambda^{j_{\ell+1}}$.

Так как множество $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ может достигать максимума в нескольких точках, то полезно описать множество максимальных элементов множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$.

Через $\sum$ обозначим следующий класс векторов a и b:

$$\sum=\begin{cases}a=\left(a^1,a^2,...,a^N\right),a^j\geq 0;\\ b=\left(b^1,b^2,...,b^N\right),b^j>0,\end{cases}$$

где $\left(j=\overline{1,N}\right)$ и $\dfrac{a^1}{b^1}\geq\dfrac{a^2}{b^2}\geq...\geq\dfrac{a^N}{b^N}$.

Очевидно, что следующие равенства являются эквивалентными равенства:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{\ell}a^{j_k}}{\sum\limits_{k=1}^{\ell}b^{j_k}}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{\ell}a^{q_s}}{\sum\limits_{s=1}^{\ell}b^{q_s}}=0,\quad \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(a^{j_k}b^{q_s}-b^{j_k}a^{q_s}\right)=0, \tag{6}$$

где $j\neq q$.

Чтобы описать множество максимальных элементов множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ достаточно решить следующую задачу: при каждом заданном ℓ требуется выделить некоторый подкласс $\sum_{\ell}\leq\sum$, такой, при котором для всех элементов класса $\sum_{\ell}$ имело бы место следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(a^{j_k}b^{q_s}-b^{j_k}a^{q_s}\right)=0.$$

Решение этой задачи легко следует из утверждения.

Утверждение 2. Если имеет место равенство

$$\frac{a^{j_k}}{b^{j_k}}=\frac{a^{q_s}}{b^{q_s}}, \tag{7}$$

то $\sum\limits_{k=1}^{\ell}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\left(a^{j_k}b^{q_s}-b^{j_k}a^{q_s}\right)=0$, где $k,s=\overline{1,\ell}$; $j\neq q$.

Доказательство утверждения очевидно.

Замечание 4. Условие (7) является достаточным для (6). Однако оно не является необходимым.

Пример 2. Пусть $a=(4,3,2,1)$, $b=(5,4,3,2)$.

Тогда очевидно равенство $\dfrac{4+1}{5+2}=\dfrac{2+3}{3+4}$.

Однако $\dfrac{4}{5}>\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{2}$.

Пример 3. Пусть $a=(4,3,2,1)$, $b=(1,2,3,4)$.

Тогда очевидно неравенство $\dfrac{4}{1}>\dfrac{3}{2}>\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{4}$.

Однако $\dfrac{4+3}{1+2}>\dfrac{3+2}{2+3}$.

Пусть имеет место равенство (4). Тогда, пользуясь утверждением 2 и принимая во внимание замечание 3, множество максимальных элементов множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ можно описать следующим образом:

$$\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{\ell}a^{j_k}}{\sum\limits_{k=1}^{\ell}b^{j_k}}\right\}\cup\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sum\limits_{s=1}^{\ell}a^{q_s}}{\sum\limits_{s=1}^{\ell}b^{q_s}}:\dfrac{a^{j_k}}{b^{j_k}}=\dfrac{a^{q_s}}{b^{q_s}},\ q,\ s=\overline{1,\ell};\\ 0\leq q\leq C_{N-1}^{\ell-1}-1;\ j\neq q;\\ j_1=q_1=1;\ j-\text{фиксировано}\end{array}\right\}$$

Вектора $\lambda_q\in\Lambda^{\ell}$ $\left(\lambda_q\neq\lambda_{\ell}\right)$ может и не существовать, если

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sum\limits_{s=1}^{\ell}a^{q_s}}{\sum\limits_{s=1}^{\ell}b^{q_s}}:\dfrac{a^{j_k}}{b^{j_k}}=\dfrac{a^{q_s}}{b^{q_s}},\ q,\ s=\overline{1,\ell};\\ q=0;\ j\neq q;\ j_1=1;\\ j-\text{фиксировано}\end{array}\right\}\neq\varnothing.$$

Используя известный результат из теории множеств $A\cup\varnothing=A$, можно утверждать, что существует такой единственный фиксированный индекс j, при котором выполняется равенство

$$\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}=\frac{\sum_{k=1}^{\ell}a^{q_k}}{\sum_{k=1}^{\ell}b^{q_k}}.$$

Таким образом, класс $\sum_{\ell}$ описывается следующим образом:

$$\sum{}_{\ell}=\left\{\begin{matrix}a=\left(a^1,a^2,...,a^N\right)\\ \qquad :\frac{\sum_{k=1}^{\ell}a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell}b^{j_k}}\\ b=\left(b^1,b^2,...,b^N\right)\end{matrix}\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\begin{matrix}a=\left(a^1,a^2,...,a^N\right)\quad k,\, s=\overline{1,\ell};\, j\neq q;\\ :\frac{a^{j_k}}{b^{j_k}}=\frac{a^{q_s}}{b^{q_s}},\ 0\le q\le C_{N-1}^{\ell-1}-1;\\ b=\left(b^1,b^2,...,b^N\right);\ j_1=q_1=1;\ j-\text{фиксировано}\end{matrix}\right\}$$

Используя замечание 4, вместо множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$, можно поставить задачу 1 относительно следующего множества, которое обозначим через Ω_{ℓ}:

$$\Omega_{\ell}=\left\{\frac{\sum_{k=1}^{\ell}a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell}b^{j_k}}:1\le j\le C_{N-1}^{\ell-1}-1;\, j_1=1\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\begin{matrix}\text{Один из одинаковых}\\ \text{элементов множества}\\ \left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}\\ \text{с учетом кратности}\end{matrix}\right\}.$$

Особенность такого представления состоит в том, что максимальный элемент множества Ω_{ℓ} определяется однозначно. Однако такое представление не всегда удобно, так как: при каждом заданном ℓ всегда найдется такой единственный вектор $\lambda_{\ell}\in\Lambda^{\ell}$, при котором $I(\lambda_{\ell})=\max\Omega_{\ell}$.

Рассматривая все векторы $\lambda_{\ell}\in\Lambda^{\ell}\left(\ell=\overline{1,N}\right)$, нельзя гарантировать, что в процессе исключения одинаковых элементов остаются те элементы, которые давали бы некоторую закономерность.

Поэтому целесообразно поставить задачу 1 относительно следующего множества, которое обозначим через E_{ℓ}:

$$E_{\ell}=\left\{\frac{\sum_{k=1}^{\ell}a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell}b^{j_k}}:1\le j\le C_{N-1}^{\ell-1}-1,\, j_1=1\right\}.$$

Таким образом, задачу 1 можно свести к следующей задаче.

Задача 2. При каждом заданном ℓ требуется найти наибольшее значение множества E_{ℓ}.

Прежде чем решать задачу 2 определим верхнюю границу множества $0\,E_{\ell}$. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 3. Для произвольного элемента множества $\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$ имеет место следующее неравенство

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell}a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell}b^{i_k}}\le\sum_{k=1}^{\ell}\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}. \qquad (8)$$

Доказательство утверждения следует из следующих соотношений:

$$\sum_{k=1}^{\ell}\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}\sum_{k=1}^{\ell}b^{i_k}=\sum_{k=1}^{\ell}\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}\sum_{s=1}^{\ell}b^{i_s}=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}\cdot b^{i_s}=$$

$$0=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}a^{i_k}\cdot\frac{b^{i_s}}{b^{i_k}}+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}a^{i_k}\cdot\frac{b^{i_s}}{b^{i_k}}\ge$$

$$\ge\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}a^{i_k}\cdot\frac{b^{i_s}}{b^{i_k}}=\ell\cdot\sum_{k=1}^{\ell}a^{i_k}\ge\sum_{k=1}^{\ell}a^{i_k}.$$

Так как имеет место соотношение $E_{\ell}\le\left\{I(\lambda):\lambda\in\Lambda^{\ell}\right\}$, то неравенство (8) имеет место также во всем множестве.

Введем обозначение

$$E_{\ell}^{*}=\left\{\sum_{k=1}^{\ell}\frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}:1\le i\le C_{N-1}^{\ell-1},i_1=1\right\}.$$

Замечание 5. Для множества E_{ℓ}^{*} имеет место замечание 3.

Пользуясь замечанием 5 и неравенствами (3), имеем

$$SupE_{\ell}^{*}=\max E_{\ell}^{*}=\sum_{k=1}^{\ell}\frac{a^k}{b^k}. \qquad (9)$$

Введем обозначение $H(\ell)=\max E_{\ell}^{*}$.

Теорема 2. $H(\ell)$ –возрастающая функция от ℓ.

Доказательство. Распишем значение функции $H(\ell)$ в точке $(\ell+1)$:

$$H(\ell+1)=\sum_{k=1}^{\ell+1}\frac{a^k}{b^k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\frac{a^k}{b^k}+\frac{a^{\ell+1}}{b^{\ell+1}}=H(\ell)+\frac{a^{\ell+1}}{b^{\ell+1}}.$$

Так как $\frac{a^{\ell+1}}{b^{\ell+1}}\ge 0$, то $H(\ell+1)\ge H(\ell)$.

Последнее соотношение доказывает теорему.

Теперь воспользуемся следующим результатом из математического анализа: пусть $x\le y$, где $x\in\{x\},y\in\{y\}$.

Тогда имеет место следующее неравенство

$$Sup\{x\}\le Sup\{y\}. \qquad (10)$$

Пользуясь неравенствами (8), (10) и равенством (9), имеем

$$SupE_\ell \le SupE_\ell^* = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^k}{b^k} \quad . \tag{11}$$

Соотношение (11) указывает на то, что множество E_ℓ ограничено сверху числом $\sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^k}{b^k}$.

Теперь вернемся к рассмотрению задачи 2. Очевидно, что всегда существуют такие индексы j, при котором имеет место следующее равенство

$$\max E_\ell = \frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}} . \tag{12}$$

Используя неравенство (8), имеем

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}} \le \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} , \tag{13}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{i_k}} \le \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{i_k}}{b^{i_k}} , \tag{14}$$

где $j = \overline{1,m}$-фиксированные индексы, $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$ и $i_1 = 1$.

Вычитая почленно из неравенства (13) неравенство (14), можем получим

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}} - \frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{i_k}} \le \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{i_k}}{b^{i_k}} , \tag{15}$$

где $j = \overline{1,m}$ -фиксированные индексы, $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$ и $i_1 = 1$.

Утверждение 4. Соотношение (15) имеет место для всех $j\left(j = \overline{1,m}\right)$.

Доказательство. Из равенства (12) и выше описанного множества максимальных элементов множества $\left\{I(\lambda) : \lambda \in \Lambda^\ell\right\}$ имеем

$$\left\{\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l} \frac{\sum_{s=1}^{\ell} a^{q_s}}{\sum_{s=1}^{\ell} b^{q_s}} : \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} = \frac{a^{q_s}}{b^{q_s}},\ q,\ s = \overline{1,\ell}; \\ 0 \le q \le C_{N-1}^{\ell-1} - 1;\ j \ne q; \\ j_1 = q_1 = 1;\ j - \text{фиксировано} \end{array}\right\}$$

Отсюда следует, что не существует элемент $I\left(\lambda_q\right) \in \left\{\max E_\ell\right\}$, для которого неравенство (15) не имело бы место. Утверждение доказано.

Однако для всех значений второго параметра ℓ соотношение (15) не выполняется.

Пример 4. Пусть $a = (5,10,10,1)$, $b = (1,50,51,19)$.

Очевидно, что при $\ell = 2$ соотношение (15) не выполняется; при $\ell = 3$ соотношение (15) имеет место.

Для определения максимального элемента множества E_ℓ целесообразно ответить на очень важный вопрос: при каком условии множества E_ℓ и E_ℓ^* достигают одновременно максимума? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 3. Если для некоторого фиксированного индекса j, а также для всех ℓ и i имеет место соотношение (15), тогда существует такой фиксированный индекс j, при котором имеет место следующее равенство:

$j_k = k \left(k = \overline{1,\ell}\right)$, где $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$ и $i_1 = 1$.

Доказательство. Очевидно, что при выполнении соотношения (15) множества E_ℓ и E_ℓ^* достигают максимума при одних и тех же ℓ-информативных векторов $\lambda_i \in \Lambda^\ell$. Доказательство теоремы будем проводить по индукции.

При $\ell = 1$ имеем $\max E_1 = \frac{a^{j_1}}{b^{j_1}}$. Пользуясь неравенствами (3), получим $j_1 = 1$.

Предположим, что при $\ell = v$ теорема верна, т.е.

$$\max E_v^* = \sum_{k=1}^{v} \frac{a^k}{b^k} . \tag{16}$$

Покажем, что при $\ell = v+1$ теорема также верна. Для этого, пользуясь равенством (16), распишем

$$\max E_{v+1}^* = \sum_{k=1}^{v+1} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} = \sum_{k=1}^{v} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} + $$
$$+ \frac{a^{j_{v+1}}}{b^{j_{v+1}}} = \sum_{k=1}^{v} \frac{a^k}{b^k} + \frac{a^{j_{v+1}}}{b^{j_{v+1}}}$$

Теперь остается показать истинность равенства $j_{v+1} = v+1$. Предположим противное, т.е. $j_{v+1} \ne v+1$. Ввиду того, что $j_k \ge k \left(k = \overline{1,\ \ell}\right)$, то наше предположение можно сформулировать следующим образом: пусть $j_{v+1} > v+1$. Тогда, пользуясь неравенствами (3), имеем

$$\max E_{v+1}^* = \sum_{k=1}^{v} \frac{a^k}{b^k} + \frac{a^{j_{v+1}}}{b^{j_{v+1}}} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{v} \frac{a^k}{b^k} + \frac{a^{v+1}}{b^{v+1}} = \sum_{k=1}^{v+1} \frac{a^k}{b^k} .$$

Последнее неравенство указывает на то, что существует такое значение $\ell = v+1$, при котором соотношение (15) не выполняется, что приводить к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\lambda_\ell \in \Lambda^\ell : I(\lambda_\ell) = \max\limits_{\lambda\in\Lambda^\ell} I(\lambda)$, где $1 \le \ell \le N$.

Если для некоторого фиксированного индекса, а также для всех ℓ и i имеет место соотношение (15), тогда существует такой единственный информативный вектор $\mu \in \Lambda^\ell$, при котором имеет место следующее равенство:

$$\lambda_\ell = \lambda_{\ell-1} + \mu, \qquad (17)$$

где $2 \le \ell \le N$.

Доказательство. Так как имеет место условие теоремы 3, то для всех ℓ существует такой фиксированный индекс j, при котором имеет место равенство $j_k = k \ \left(k = \overline{1, \ell}\right)$. Тогда для каждого заданного ℓ оптимальный ℓ-информативный вектор $\lambda_\ell \in \Lambda^\ell$ представляется в виде

$$\lambda_\ell = (\overbrace{1,1,...,1}^{\ell}, 0,0,...,0).$$

В этом случае равенство (17) становится очевидным:

$$\lambda_\ell = (\overbrace{1,1,...,1}^{\ell}, 0,0,...,0) = (\overbrace{1,1,...,1}^{\ell-1}, 0,0,...,0) + (\overbrace{0,0,...,0,1}^{\ell}, 0,0,...,0) = \lambda_{\ell-1} + \mu$$

Таким образом, вектор μ имеет следующий вид:

$$\mu = (\overbrace{0,0,...,0,1}^{\ell}, 0,0,...,0) \in \Lambda^1.$$

Следствие доказано.

Теорему 3 усиливает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть при заданном ℓ для некоторого фиксированного индекса j и для всех i имеет место соотношение (8). Тогда существует такой фиксированный индекс j, при котором имеет место равенство

$j_k = k \ \left(k = \overline{1,\ell}\right)$, где $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$ и $i_1 = 1$.

Доказательство. Из соотношения (15) имеем для всех j и i

$$\sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} \ge \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}, \qquad (18)$$

где j-фиксированные индексы, $i_1 = 1$ и $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$.

Из соотношения (18) имеем $\max E_\ell^* = \sum\limits_{k=1}^{\ell} \dfrac{a^{j_k}}{b^{j_k}}$.

Пользуясь равенством (9), заключаем: всегда найдется такой фиксированный индекс j, при котором имеет место равенство $j_k = k \ \left(k = \overline{1,\ell}\right)$.Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть при заданном λ для некоторого фиксированного индекса j и для всех i выполняется соотношение (15). Тогда множество максимальных значений множества E_ℓ имеет следующий вид:

$$\left\{\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sum_{s=1}^{\ell} a^{q_s}}{\sum_{s=1}^{\ell} b^{q_s}} : \dfrac{a^{j_k}}{b^{j_k}} = \dfrac{a^{q_s}}{b^{q_s}},\ q,\ s = \overline{1,\ell}; \\ 0 \le q \le C_{N-1}^{\ell-1} - 1;\ j \ne q; \\ j_1 = q_1 = 1;\ j - \text{фиксировано} \end{array}\right\}$$

$$\lambda_j = (\overbrace{1,1,...,1}^{\ell}, 0,0,...,0).$$

Доказательство очевидно.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда из соотношений (13) и (14) можно получить следующее неравенство:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}} - \frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{i_k}} \ge \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}, \qquad (19)$$

где j-фиксированные индексы, $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$ и $i_1 = 1$.

Прежде чем рассмотреть неравенство (19), рассмотрим следующее неравенство:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{j_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{j_k}} - \frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{i_k}} \ge \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{j_k}}{b^{j_k}} \cdot \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}, \qquad (20)$$

где $1 \le i \le C_{N-1}^{\ell-1}$ и $i_1 = 1$.

Из неравенства (20) следует, что при заданном ℓ имеет место равенство $\max E_\ell = \dfrac{\sum_{k=1}^{\ell} a^k}{\sum_{k=1}^{\ell} b^k}$.

Рассмотрим случай, когда соотношение (20) не выполняется, т.е. существует такой индекс i, при котором

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{k}} - \frac{\sum_{k=1}^{\ell} a^{i_k}}{\sum_{k=1}^{\ell} b^{i_k}} \ge \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{k}}{b^{k}} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{a^{i_k}}{b^{i_k}}, \qquad (21)$$

В этом случае закономерность не существует.

Пример 5. Пусть $a = (1,0,0,0)$, $b = (1,2,1,4)$. Тогда оптимальный вектор для функционала (2) в множестве имеет вид $\lambda_2 = (1,0,1,0)$.

Пример 6. Пусть $a = (1,1,1,0)$, $b = (1,6,12,1)$. Тогда оптимальный вектор для функционала (2) в множестве имеет вид $\lambda_2 = (1,0,0,1)$.

Следующие равенства удовлетворяют одновременно соотношениям (15) и (20):

$$\frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2} = ... = \frac{a^N}{b^N}. \qquad (22)$$

Учитывая (22), получим:

$$\frac{a^1}{b^1}=\frac{a^2}{b^2}=...=\frac{a^N}{b^N}=\frac{a^1+a^2+...+a^N}{b^1+b^2+...+b^N}. \quad (23)$$

Здесь необходимо отметить, что соотношение (22) глобально относительно ℓ и j, а также при выполнении соотношения (22) имеет место теорема 3.

В случае, когда в соотношении (19) существует такой индекс k, при котором $j_k \neq k$.

Пример 7. Пусть $a=(1,10,1,1)$, $b=(1,500,51,52)$. Тогда оптимальный вектор для функционала (2) в множестве имеет вид $\lambda_3=(1,0,1,1)$.

Пример 8. Пусть $a=(1,1,1,0)$, $b=(1,2,7,1)$. Тогда оптимальный вектор для функционала (2) в множестве имеет вид $\lambda_3=(1,1,0,1)$.

Кроме того в этом случае не имеет мест следствие теоремы 3.

Пример 9. Пусть $a=(1,10,10,7)$, $b=(1,500,510,52)$. В множествах Λ^2 и Λ^3 рассмотрим функционал вида (2). Этот функционал достигает максимума соответственно при векторах $\lambda_2=(1,0,0,1)$, $\lambda_3=(1,1,0,1)$. В этом случае $\mu=(0,1,0,0)$.

Пример 10. Пусть $a=(1,10,1,1)$, $b=(1,500,51,52)$. В множествах Λ^2 и Λ^3 рассмотрим функционал вида (2). Этот функционал достигает максимума соответственно при векторах $\lambda_2=(1,0,1,0)$, $\lambda_3=(1,0,1,1)$. В этом случае $\mu=(0,0,0,1)$.

Из примеров 9 и 10 видно, что вектор μ однозначно не определяется.

Заключение

Исследование свойств критерия информативности Фишеровского типа (2) показало, что можно использовать полученные результаты как метод выбора информативных наборов признаков [1] или как исходную информацию для методов, рассмотренных в работах [1-3].

Литература

[1] Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. – М.: Наука, 1974. – 416 с.

[2] Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов //М.: Мир, 416 с.

[3] Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение //М., Изд-во «Советское радио», 1972.

[4] Камилов М.М., Фазылов Ш.Х., Нишанов А.Х. Метод выбора признаков с использованием критерия информативности фишеровского типа. // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики», № 2, 1992. – с. 9-12.

[5] Камилов М.М., Фазылов Ш.Х., Нишанов А.Х. Эффективный метод выделения информативных подсистем признаков в распознавания образов. // Деп. в ВИНИТИ, 03.08.89. №5218-В89. Ред. журн. Изв. АН УзССР. СТН. – 7 с.

[6] Fazilov Sh.Kh., Mamatov N.S. Selection features using heuristic criteria// Ninth World Conference "Intelligent Systems for Industrial Automation", WCIS-2016,25-27 October 2016, Tashkent, Uzbekistan