УДК 519.62

ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ РАЗНОСТНЫХ ФОРМУЛ

[1]***Шадиметов Х. М.***, [2]***Мирзакабилов Р. Н.***,
kholmatshadimetov@mail.ru; omad2015@mail.ru;
[1]Институт математики АН РУз;
[2]Джиззакский политехничиский институт

Оптимизация вычислительных методов в функциональных пространствах является одной из основных задач вычислительной математики. В настоящей работе приводятся алгебраические и функциональные постановки задачи разностных формул. Для оптимизации разностных формул т.е построения оптимальных разностных формул в функциональных пространствах важную роль играет экстремальная функция данной разностной формулы. В этой работе в пространстве Соболева явно найдена экстремальная функция разностных формул и вычислена норма функционала погрешности разностных формул в сопряженном пространстве Соболева.

Ключевые слова: Пространство Соболева, экстремальная функция, разностные формулы, функционал погрешность.

Цитирование: *Шадиметов Х. М., Мирзакабилов Р. Н.* Задача о построении разностных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 5(17). — С. 95–101.

1 Введение

Пусть требуется найти приблежённое решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием $y(0) = y_0$ на отрезке [0,1]. Разделим этот отрезок на N частей длины $h = \frac{1}{N}$ и будем искать приближенное значения y_n искомого решения $y(x)$ в точках $x_n = nh$, $n = 0, 1, ..., N$. Классическим примером методов такого рода служит метод Эйлера, который состоит в следующем: приближенное значение y_{n+1} решения в точке x_{n+1} получается из приближенного значения y_n решения в точке x_n по формуле

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n, \tag{2}$$

где $y'_n = f(x_n, y_n)$, так что y_{n+1} есть линейная комбинация значений функции и ее первой производной в точке x_n.

Мы будем рассматривать лишь так називаемые дискретные методы, т.е. методы определяющие решение для дискретных значений независимой переменной. Характерная особенность дискретных методов для решения уравнения (1) заключается в том, что процесс решения состоит в повторении алгоритма для получения искомого решения y_n с использованием известных, ранее вычисленных значений y_{n-j} и $f(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, ..., s$.

Проблему построения численного алгоритма можно разделить на три группы:

1. Локальные свойства алгоритма.

Задача заключается в выборе такого алгоритма для определения y_n, чтобы разность $y_n - y(x_n)$ была минимальной. Здесь y_n обозначает приближенное значение точного решения $y(x)$; предполагается, что $y(x_{n-j})$, $j = 1, 2, ..., m$ известны. Асимптотическая оценка точности алгоритма для $|x_{n-j} - x_{n-j-1}| = h \to 0$ определяется двумя числами (α, C), если

$$|y_n - y(x_n)| = Ch^\alpha + o(h^\alpha).$$

Решение предполагается достаточно гладким, а параметр α характеризует алгебраическую степень точности. Примером такого алгоритма служит метод Эйлера (2), для которого $\alpha = 2$, $C = \frac{1}{2}y''(x_n)$.

2. Глобалные свойства алгоритма.

Основной задачей становится выбор такого алгоритма, который бы не приводил к напоплению ошибок, т.е. чтобы $y_n \to y(\widetilde{x})$ при $|x_n - x_{n-1}| \to 0$ и $x_n \to \widetilde{x}$.

3. Устойчивость алгоритма как численный процесс.

Некоторые сходящиеся алгоритмы могут сопровождаться численной неустойчивостью. Потому мы расмотрим условия, гарантирующие устойчивость алгоритмов.

2 Задача о построении разностных формул

Задача о построении разностных формул, верных для многочленов степени $\leqslant m - 1$, которую мы также рассмотрим сначала в ее алгебраической постановке.

Всюду, в дальнейшем под разностной формулой мы будем понимать приближенное равенство

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0, \tag{3}$$

Здесь $[\beta] = h\beta$, $\beta = 0, 1, ..., k$ $C[k] \neq 0$, $C[\beta]$ и $C^{(1)}[\beta]$- коэффициенты разностной формулы.

Погрешностью формулы мы назовем разность

$$(l, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]. \tag{4}$$

Равенство (4) задает на классах дифференцируемых по $[0, 1]$ функциях φ аддитивный и однородный функционал l, который мы будем называть функцианалом погрешности разностной формулы (3). Скажем, что разностная формула точна на функции φ, если разность (4) равна нулю. Другими словами, функции, на которых точна разностная формула, образуют ядро функционала погрешности l. Задача о построении разностной формулы в алгебраической постановке для отрезка $[0, 1]$ заключается в следующем.

Требуется найти коэффициенты $C[\beta]$ и $C^{(1)}[\beta]$ разностной формулы таким образом, чтобы она была точна на всех многочленах из пространства $\mathbb{P}_{m-1}$ ($\mathbb{P}_{m-1}$- пространство многочленов степени $m - 1$) при вазможно большом m.

Таким образом, мы считаем качество разностной формулы тем выше, чем больше размерность пространства многочленов на которых эта формула точна.

Подставляя в (4) вместо $\varphi(x)$ многочлен $P_{m-1}(x) = a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + ... + a_{m-1}$. мы получим

$$(l, P_{m-1}(x)) = \sum_{\beta=0}^{K} C[\beta]P_{m-1}[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{K} C^{(1)}[\beta]P'_{m-1}[\beta].$$

Таким образом, наше требование $(l, P_{m-1}(x)) = 0$ при $P_{m-1}(x) \in \mathbb{P}_{m-1}$ равносильно системе условий

$$(l, x^\alpha) = 0, \alpha = 0, 1, ..., m - 1, \tag{5}$$

выполняется в том и только в том случае, когда векторы

$$C = (C[0], C[1], ..., C[k]) \text{ и } C^{(1)} = (C^{(1)}[0], C^{(1)}[1], ..., C^{(1)}[k])$$

представляют собою решение системы уравнений

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] = 0, C[k] = 1,$$

$$(hk)^s + \sum_{\beta=0}^{k-1} C[\beta](h\beta)^s = \sum_{\beta=0}^{k} sC^{(1)}[\beta](h\beta)^{s-1}, S = 1, 2, ..., m-1.$$

Система (5) всегда имеет решение как только $k \geqslant m-1$.

Теперь приводим известные разностные формулы, построенные алгебраическим путем.

Обозначим $\bigtriangledown y_n = y_n - y_{n-1}$, тогда формула Адамса-Башфорта имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + \frac{1}{2} \bigtriangledown y'_n + \frac{5}{12} \bigtriangledown^2 y'_n + \frac{3}{8} \bigtriangledown^3 y'_n + ...),$$

а формула Адамса-Мултона

$$y_n = y_{n-1} + h(y'_n - \frac{1}{2} \bigtriangledown y'_n - \frac{1}{12} \bigtriangledown^2 y'_n - \frac{1}{24} \bigtriangledown^3 y'_n ...).$$

Существуют и другие известные формулы, например, формулы Нистрома и Мали-Симпсона и другие.

3 Функциональная постановка задач. Экстремальная функция разностной формул

Переходим теперь к функциональной постановке наших задач. Будем рассматривать функции $\varphi(x)$, принадлежащие гильбертову пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. $L_2^{(m)}$ -гильбертово пространство классов вещественных фунций $\varphi(x)$, отличающихся на полином степени $m-1$ с производными (в смысле обобщенных функций) порядка m, квадратично интегрируемыми в интервале $[0,1]$ и скалярным произведением

$$\{f, \varphi\} = \int_0^1 \left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)\left(\frac{d^m \varphi(x)}{dx^m}\right) dx. \tag{6}$$

Так как $L_2^{(m)}(0,1)$ вложено в пространству $C(0,1)$ непрерывных функций, то линейным будет и функционал погрешности разностной формулы

$$(l, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{K} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\beta=0}^{K} C[\beta]\delta(x-h\beta) + h\sum_{\beta=0}^{K} C^{(1)}[\beta]\delta'(x-h\beta)\Big]\varphi(x)dx. \tag{7}$$

Задача о построении разностной формулы

$$\sum_{\beta=0}^{K} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{\kappa} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0$$

в функциональной постановке состоит в нахождении такого функционала (7), норма которого в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$ минимальна. Для нахождения в явном виде нормы фунционала погрешности l мы будем пользоваться часто так називаемой экстремальной функцией данного функционала, т.е такой функцией ψ_l для которой

$$(l,\psi_l) = \|l\| \cdot \|\psi_l\|.$$

Известно, что в работе И.Бабушка и др. [1] нахождение экстремальной функции $\psi_l(x)$ сведена к решению дифференциального уравнению $2m$-го порядка. Однако там решение не приводится. Наш метод нахождения $\psi_l(x)$ отличается от метода И.Бабушка и позволяет явно найти экстремальную функцию. Функциональной постановке задач теории кубатурных формул рассматривалось в работах [2–10]

Норма функции в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формулой

$$\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\| = \left(\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Поскольку функционал l вида

$$l = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\delta(x-h\beta) + h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\delta'(x-h\beta)$$

определен в $L_2^{(m)}(0,1)$, то имеем

$$(l,x^\alpha) = 0, \alpha = 0,1,...,m-1.$$

Поскольку норма элемента φ из гильбертово пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется по формуле (8) и скалярное производение опрнделяется формулой (6) и применяя теорему Рисса, найти для каждого функционала, в том числе для функционала прогрешности разностной формулы, явное выражение через некоторую функцию ψ_l, которая является элементом Рисса. По теореме Рисса имееют место равенство и при $\varphi \in L_2^{(m)}$

$$(l,\varphi) = \{\psi_l,\varphi\}, \tag{9}$$

$$\|l|L_2^{(m)*}(0,1)\| = \|\psi_l'|L_2^{(m)}(0,1)\|.$$

В силу (6) и (9) получаем, следующее тождество справедливое для любой функции $\varphi \in \mathring{C}^{(\infty)}(0,1)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций

$$\int_0^1 \frac{d^m\psi_l(x)}{dx^m}\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}dx = (l,\varphi). \tag{10}$$

Произведя m раз интегрирование по частям в смысле обобщенных функций, после некоторых упращений левой части (10) получим

$$(l,\varphi)=\int\limits_0^1(\frac{d^m}{dx^m}\psi_l(x))(\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x))dx=$$

$$=(-1)^m(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_l(x)),\varphi(x))+$$

$$+\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_l(x)\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}\varphi(y)|_{y=0}^{y=1}=$$

$$=(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}((-1)^m\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_l(x)),\varphi(x))+$$

$$+(\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_l(y)\delta^{(m-j)}(x-y),\varphi(x))|_{y=0}^{y=1},$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$- индикатор отрезка $[0,1]$.

Таким образом, в пространсве обобщенных функций

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_l(x))=(-1)^m l(x)+\sum_{j=1}^m(-1)^{m+j}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_l(y)\times$$

$$\times\delta^{(m-j)}(x-y)|_{y=0}^{y=1}. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) записывается в виде

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\psi_l(x)=(-1)^m l(x)*G_m(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^m a_j|x-y|^{2m-j}|_{y=0}^{y=1}+P_{2m-1}(x). \tag{12}$$

В формуле (12) сумма $\sum\limits_{j=1} a_j|x-y|^{2m-j}|_{y=0}^{y=1}$ -многочлен степени $2m-1$, с переопределенными коэффициентами a_j соответствующий члену

$$\sum_{j=1}^m\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_l(y)\delta^{(m-j)}(x-y)|_{y=0}^{y=1}.$$

Функция $G_m(x)$ -фундаментальное решение уравнение $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}G_m(x)=\delta(x)$ имеет вид

$$G_m(x)=\frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}.$$

Рассмотрим равенство (12) вне отрезка $[0,1]$. В силу (5) выражение $(-1)^m l(x)*G_m(x)$ вне отрезка $[0,1]$ является многочленом степени $m-1$, так как эта функция из пространства $C^\infty(R\backslash[0,1])$, которая после m кратного дифференцирования обращается в нуль. Чтобы выполнялось условие $\varepsilon_{[0,1]}\psi_l(x)=0$ при $x\overline{\in}[0,1]$ необходимо

$$\sum_{j=1}^{m-1}a_j|x-y|^{2m-j}|_{y=0}^{y=1}+P_{2m-1}(x)=R_{m-1}(x),$$

где $R_{m-1}(x)$ -некоторый многочлен степени $m-1$.

Итак, для любой разностной формулы вида (3) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ ее экстремальная функция, т.е. элемент Рисса дается формулой

$$\psi_l(x) = (-1)^m l(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

где $P_{m-1}(x)$ -некоторый многочлен степени $m-1$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Экстремальная функция разностной формулы (3) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется формулой

$$\psi_l(x) = (-1)^m l(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x)$$

Мы знаем что по теорему Рисса и определении экстремальной функции следует что

$$(l,\psi_l) = \|l|L_2^{(m)*}\| \cdot \|\psi_l|L_2^{(m)}\| = \|l|L_2^{(m)*}\|^2.$$

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности разностой формулы вида (3) определяется формулой

$$\|l|L_2^{(m)*}\|^2 = (l,\psi_l).$$

Литература

[1] *Бабушка И, Витасек Э, Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений: – Москва, Издательство Мир. 1969 г. 369 с.

[2] *Бабушка И, Соболев С.* Оптимизация численных методов.: – Apl, Mat., 10, 9-170, 1965

[3] *Соболев С.* Введение в теорию кубатурных формул.: – М., 1974, 808 с

[4] *Соболев С, Васкевич Л.* Кубатурные формулы.: – Новосибирск из-во ИМСОРАН, 1996, 484 с

[5] *Шадиметов Х.* Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева.: – Сибирских журнал. Вычеслительные математики РАН. Сиб отд. Новосибрск 1999, Т.2 185-196 с

[6] *Шадиметов Х.* Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формул.: – Докл. РАН. Москва 2001, Т.376 №5 , 597-599 с

[7] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of Optimal Quadrature Formula for Numerical Calculation of Fouriercoefficients in Sobolev space $L_2^{(1)}$: – American Journal of Numerical Analysis, 2016, Vol. 4, No. 1, 1-7

[8] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space: – Calcolo(2014) 51:211-243.

[9] *Shadimetov Kh.X., Hayotov A.R., Akhmedov D.M.* Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space: – Applied Mathematics and Computation.2015, N.263. p.302-314.

[10] *Akhmedov D.M.,Hayotov A.R.,Shadimetov Kh.X.* Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals: – Applied Mathematics and Computation.2018, N.317. p.150-159.

Поступила в редакцию 12.09.2018

UDC 519.62

THE PROBLEM ON CONSTRUCTION OF THE DIFFERENCE SCHEMES

[1]***Shadimetov Kh. M.***, [2]***Mirzakobulov R. N.***
kholmatshadimetov@mail.ru; omad2015@mail.ru;
[1]Institute of Mathematics UzAS;
[2]Jizzakh Polytechnic Institute.

Optimization of computational methods in functional spaces is one of the main tasks of computational mathematics. In the present paper we give algebraic and functional statements of the problem of difference formulas. To optimize difference formulas, that is, the construction of optimal difference formulas in function spaces plays an important role the extremal function of a given difference formula. In this paper in the Sobolev space explicitly found an extremal function of difference formulas and the norm of the error functional of difference formulas in the congruent Sobolev space is calculated.

Keywords: Sobolev space, extremal function, difference scheme, error functional.

Citation: Shadimetov Kh. M., Mirzakabulov R. N. 2018. The problem on construction of the difference schemes. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(17): 95–101.

References

[1] Babushkin, I., Vitasek, E, Prager, M. 2012. *Chislinnie prossesi resheniya differensialnix uravneniya* [Numerical processes for solving differential equations]. Moscow: Mir 1969. 369 p (In Russian)

[2] Babyshka I, Sobolev S. *Optimization of numerical methods.*: – Apl, Mat., 10, 9-170, 1965

[3] Sobolev S. *Introduction to the theory of cubature formulas.*: – M., 1974, 808 p

[4] Sobolev S,Vaskevich L. *Cubature formulas.*: – Novosibirsk IMSORAN, 1996, 484 p

[5] Shadimetov X. *Weighted optimal cubature formulas in a periodic Sobolev space.*: – Sibirsk journal. Computational mathematics RSA. Sib dep. Novosibirsk 1999, T.2 185-196 p

[6] Shadimetov X. *On the optimal lattice quadrature and cubature formulas.*: – Dokl. RSA. Moscow 2001, T.376, No 5 , 597-599 p

[7] Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. *Construction of Optimal Quadrature Formula for Numerical Calculation of Fouriercoefficients in Sobolev space* $L_2^{(1)}$: – American Journal of Numerical Analysis, 2016, Vol. 4, No. 1, 1-7

[8] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. *Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in* $W_2^{(m,m-1)}$ *space*: – Calcolo(2014) 51:211-243.

[9] Shadimetov Kh.X., Hayotov A.R., Akhmedov D.M. *Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space*: – Applied Mathematics and Computation.2015, N.263. p.302-314.

[10] Akhmedov D.M.,Hayotov A.R.,Shadimetov Kh.X. *Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals* : – Applied Mathematics and Computation.2018, N.317. p.150-159.

Received September 12, 2018