

УДК 530.12:531.51

ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЯ ЗАХВАТА ОТ МАГНИТНОГО МОМЕНТА НАМАГНИЧЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ШВАРЦШИЛЬДА*

Рахимов О.Г.

orahimov.81@mail.ru

Ташкентский институт ирригации и инженеров механизации сельского хозяйства

Простейшим результатом решения уравнения Эйнштейна, является черная дыра Шварцшильда, которая характеризуется только через собственную массу. Здесь приведена математическая модель движения намагниченных частиц вокруг Шварцшильдовской черной дыры. Изучается сечение захвата намагниченных частиц вокруг черной дыры Шварцшильда, помещенной в асимптотически однородное магнитное поле, которое является расширенным изучением формулировки Захарова, для классических частиц в метрике Райснера-Нордстрема. Магнитный момент частицы рассматривается таким, как было изучено в работах де Феличе и Сорге. Показано, что спин частицы способствует устойчивости частиц, вращающихся вокруг черной дыры Шварцшильда с внешним магнитным полем, то есть, намагниченные частицы более стабильны чем частицы с нулевым спином. Результаты подтверждают, что магнитный момент существенно изменяет значения критического углового момента и влияет на процесс захвата частиц черной дырой.

Ключевые слова: намагниченность, магнитное поле, метрика, спин, угловой момент, черная дыра, стабильные орбиты.

Цитирование: Рахимов О.Г. Зависимость сечения захвата от магнитного момента намагниченных частиц в поле черной дыры Шварцшильда // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 3(21). — С. 94–101.

1 Введение

Черные дыры являются самыми уникальными объектами астрофизики, в частности, невидимость невооруженным глазом. Соответственно, получить полную информацию о них можно только с помощью наблюдений движения тел, находящихся вокруг. Помимо этого, черные дыры имеют самое сильное гравитационное поле, среди космических объектов известных науке. За последние десять лет точность наблюдений телескопов намного выросла и это позволяет получить данные со сверхвысоким разрешением. Недавно, после 26 летних астрономических наблюдений, астрономы официально подтверждали предсказанной общей теорией относительности особенности движения звезды в сильном гравитационном поле сверхмассивной черной дыры в центре Млечного Пути. Статья, посвящённая этим наблюдениям опубликована в журнале *Astronomy and Astrophysics*. Ученым пришлось исследовать все эти годы звезду S2, расположенная рядом с сверхмассивной черной дырой Стрелец A*, которая находится в центре нашей галактики. Стрелец A* имеет массу в четыре миллиона раз больше массы Солнца и расположена на расстоянии 26 тысяч световых лет от нашей планеты.

Звезды появляются, когда огромное облако пыли и газа, в основном водорода, образует плотное скопление. Это скопление вращается все быстрее и быстрее, из-за

*Работа выполнена в рамках ГНТП по проекту прикладных исследований №. ВА-ФА-Ф-2-008.

чего атомы сталкиваются друг с другом. Это столкновение атомов высвобождает огромное количество тепла, которое заставляет газ светиться. Облако газа, называемое протозвездой, продолжает сжиматься до тех пор, пока не станет звездой. Звезда светит миллионы лет до тех пор, пока внешний слой не начнет остывать, а звезда терять свою яркость – до полного угасания. Но иногда звезды умирают, взрываясь и порождая сверхновые звезды. Когда массивная звезда находится на грани смерти, ее ядро разрушается, высвобождая огромное количество энергии, что приводит к большому взрыву. Этот взрыв называется сверхновым. Он посылает огромное количество света и вещества в космос. Во время взрыва звезда бывает в миллиарды раз ярче, чем Солнце. Затем остатки звезды постепенно сжимаются, образуя черную дыру. Так вкратце можно объяснить возникновение черных дыр. Чёрные дыры звёздных масс образуются как конечный этап жизни некоторых звезд. После полного выгорания термоядерного топлива и прекращения реакции звезда теоретически должна начать остывать, что приведёт к уменьшению внутреннего давления и сжатию звезды под действием гравитации. Сжатие может остановиться на определённом этапе, а может перейти в стремительный гравитационный коллапс. В зависимости от массы звезды и вращательного момента возможно превращение ее в черную дыру. Условия (главным образом, масса), при которых конечным состоянием эволюции звезды является чёрная дыра, изучены недостаточно хорошо, так как для этого необходимо знать поведение и состояния вещества при чрезвычайно высоких плотностях, недоступных экспериментальному изучению. Различные модели дают нижнюю оценку массы чёрной дыры, получающейся в результате гравитационного коллапса, от 2,5 до 5,6 масс Солнца. Радиус чёрной дыры при этом очень мал – несколько десятков километров. Рассмотрим виды черных дыр.

Сверхмассивные чёрные дыры. Разросшиеся очень массивные чёрные дыры, по современным представлениям, образуют ядра большинства галактик. В их число входит и массивная чёрная дыра в ядре нашей Галактики.

Первичные чёрные дыры в настоящее время носят статус гипотезы. Если в начальные моменты жизни Вселенной существовали достаточной величины отклонения от однородности гравитационного поля и плотности материи, то из них путём коллапса могли образовываться чёрные дыры. При этом их масса не ограничена снизу, как при звёздном коллапсе – их масса, вероятно, могла бы быть достаточно малой. Обнаружение первичных чёрных дыр представляет особенный интерес в связи с возможностями изучения явления испарения чёрных дыр.

Квантовые чёрные дыры. Предполагается, что в результате ядерных реакций могут возникать устойчивые микроскопические чёрные дыры, так называемые квантовые чёрные дыры. Для математического описания таких объектов необходима квантовая теория гравитации, которая еще не создана. Однако из общих соображений весьма вероятно, что спектр масс чёрных дыр дискретен и существует минимальная чёрная дыра – планковская чёрная дыра. Её масса порядка 10^{-5} г, радиус – 10^{-35} м. Комптоновская длина волны планковской чёрной дыры по порядку величины равна её гравитационному радиусу.

Изучение движение частиц играет немаловажную роль не только в физике черных дыр, но и при наблюдении компактных космических объектов, которые становятся самыми актуальными научными объектами современной физики. Здесь изучается гравитационный захват [1, 2] намагниченных частиц, в поле черной дыры Шварцшильда, помещенное в однородное магнитное поле [3, 4]. Помимо сечения захвата частиц, найдены, аналитические выражения для частиц, которые, могут отскакивать

от захвата черной дыры [5]. Как нам известно, не всякая частица уходит в бесконечность от черной дыры, преодолевая ее сильное гравитационное поле. Частица, зависимо от своего углового момента и энергии, или уходит в бесконечность или попадет в черную дыру, т.е. захватывается черной дырой. Ранее в работе [1] была изучена сечение гравитационного захвата пробных частиц в поле Райснера-Нордстрема и Шварццильда в классическом приближении, т.е. рассматриваемая частица не имеет собственного магнитного момента и заряда. В данной работе рассматривается частица с собственным магнитным моментом μ и с массой m , и для простоты будем считать частицу нейтральной.

2 Постановка задачи

В релятивистской теории тяготения гравитационный захват - явление захвата прилетающей из бесконечности частицы тяготеющим черной дырой. В Ньютоновской теории тяготения чисто гравитационный захват одним телом другого невозможен. Частица, прилетающая из бесконечности, имеет отрицательную полную энергию, движется относительно тяготеющего центра по параболе или гиперболе и снова улетает в бесконечность. Если же скорость тела меньше второй космической скорости, то оно будет двигаться по замкнутой кривой, т.е. по эллипсу. По теории Эйнштейна в таком случае траектория движения тела не эллипс, и оно движется по незамкнутой траектории, то приближаясь к черной дыре, то удаляясь от нее. В случае достаточно удаленной от черной дыры траектории тела она представляет собой медленно поворачивающийся в пространстве эллипс. Такой поворот эллиптической орбиты был обнаружен у Меркурия и составил за столетие 43 угловых секунды. Кроме того, движение по круговой траектории по классической теории возможно на любом расстоянии от тяготеющего центра. По теории Эйнштейна это происходит иначе. Чем ближе тело к тяготеющему центру, тем больше его скорость обращения. На окружности, удаленной на полтора гравитационных радиуса от черной дыры, скорость обращения тела достигнет скорости света в вакууме. Однако на расстояниях меньше трех гравитационных радиусов движение тела по окружности неустойчиво, если скорость его составляет половину скорости света. Незначительное возмущение заставит вращающееся тело уйти с орбиты: оно либо улетит в космическое пространство, либо упадет в черную дыру. Если тело вдали от черной дыры имеет скорость много меньше световой и его орбита пролегает близко к окружности с радиусом, равным двум гравитационным, то оно облетит вокруг черной дыры несколько раз, прежде чем снова улетит в космос. Если же траектория тела подойдет вплотную к окружности двух гравитационных радиусов, то тело окажется захваченным черной дырой. Если траектория тела подойдет еще ближе к черной дыре, то оно неизбежно упадет в черную дыру. Тело, имеющее вторую космическую скорость или больше, навсегда улетит от черной дыры. Чтобы тело могло вырваться из окрестности черной дыры, недостаточно иметь скорость больше второй космической скорости, нужно еще, чтобы направление вектора скорости составляло с направлением на черную дыру угол больше некоторого критического значения. При движении тел в поле тяготения черной дыры должны излучаться гравитационные волны. Согласно теории Эйнштейна передача гравитационного взаимодействия происходит со скоростью света.

Известно, что метрика Шварццильда характеризует поле вокруг не вращающегося компактного объекта:

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + H^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi, \quad (1)$$

здесь - масса черной дыры и $A^2 = H^{-2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$.

В работе [1] было рассмотрено гравитационный захват частицы в классическом приближении в метрике Райснера-Нордстрема. Там было указано, что критическое значение углового момента незаряженной частицы в поле черной дыры Райснера-Нордстрема имеет значение $L_{cr} = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ и для сечения гравитационного захвата

$$\sigma = 27\pi \left(1 + \frac{2}{2E}\right). \quad (2)$$

В нашем случае, свойства частиц при движении вокруг компактного объекта, характеризуется только через магнитные свойства частицы. Центральная черная дыра в данном случае имеет только массу, равной 10^9 солнечных масс.

Следуя работам [6, 7], получим выражение для сечения захвата частицы достаточно компактным сферически-симметричным телом. Аналогично тому, как получено выражение для сечения захвата частицы черной дырой Шварцшильда, можно получить критическое значение параметра L_{cr} , соответствующего захвату частицы, обладающей произвольной энергией на бесконечности, сферически-симметричным телом [8].

3 Метод решения

Решения уравнения Максвелла для 4-потенциала электромагнитного поля в заданной метрике имеет вид:

$$A_\mu = \frac{1}{2} \delta_\mu^\varphi B_0 r^2 \sin^2 \theta. \quad (3)$$

Соответствующие компоненты тензора электромагнитного поля в метрике Шварцшильда имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{r\varphi} &= B_0 r \sin^2 \theta, \\ F_{\theta\varphi} &= B_0 r^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

И для магнитного поля имеем:

$$B_r = \frac{1}{4} B_0 r^4 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Выведем теперь уравнение движения намагниченной пробной частицы в однородном магнитном поле вокруг компактного объекта. Для упрощения задачи будем рассматривать случай, в котором частица движется в экваториальной плоскости, т.е. . Чтобы получить уравнения движения, используем уравнение Гамильтона-Якоби для намагниченной частицы [3]:

$$g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu - m D^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 = 0, \quad (6)$$

здесь $D^{\mu\nu}$ - тензор поляризации [2] и $F_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса.

Рассмотрим движение намагниченной пробной частицы, вокруг невращающейся черной дыры. Соответствующее уравнение движения, полученное из уравнения Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V = \frac{e^2 - 1}{2}. \quad (7)$$

где $V = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} - \eta\right)$ является эффективным потенциалом частицы и введены следующие обозначения: $\eta = \frac{\beta(1-1frm-\epsilon M)}{(1-1frm-\epsilon M-\Omega^2 r^2)^{\frac{1}{2}}}$ и $\beta = \frac{2\mu m}{B_0}$, которое, последнее называется магнитным параметром частицы.

Разделив уравнению (7) на $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)$ находим следующую выражению, которая нам описывает траектории частиц, с энергией e [?]:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + V = e^2. \quad (8)$$

Здес B_0 - напряженность внешнего однородного магнитного поля вокруг черной дыры, μ - магнитный момент частицы, m - масса частицы и Ω - угловая скорость частицы.

Теперь найдем выражение, которое, связывает магнитный параметр частицы с внешним магнитным полем. Для этого разделим уравнению (7) на l^2 и введя обозначения $b = l/e$ и $B = \beta/l^2$ в Ньютоновском приближении получим

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{27M^2} - \frac{B}{3}. \quad (9)$$

Компоненты скорости частиц, в поле Шварцшильда можем переписать в виде:

$$\vartheta_r = \pm \sqrt{1 - b^2/U^2} \quad \vartheta_\varphi = b/U. \quad (10)$$

где $U^{-1} = \sqrt{(1 - 2M/r)(1/r^2 - \eta)}$ и для $\theta_{cr} = \arccos \vartheta_r = \arcsin \vartheta_\varphi$. Можно найти выражения для критического значения θ_{cr} , угла отскакивающих частиц:

$$\theta_{cr} = \arcsin \left[3M \sqrt{3 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2} - B \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \right]. \quad (11)$$

Физический смысл уравнения (8) приведено на рисунке (3). Отсюда видно, что угол направления частиц, имеющие меньше чем критического значения, падают в черную дыру. В классическом приближение этот угол составил $\theta = \pi/2$.

4 Обсуждение результатов

В рисунках 1 и 2 приведены радиальные зависимости эффективного потенциала от магнитного параметра β и углового момента L , соответственно.

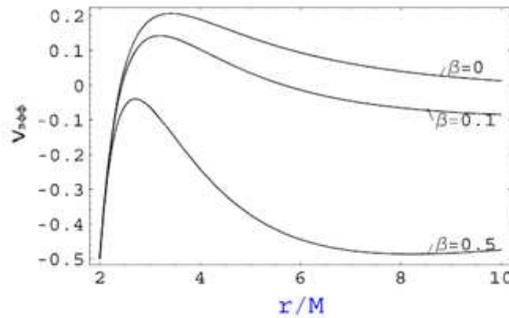


Рис. 1 Зависимость радиуса стабильных круговых орбит от параметра магнитного взаимодействия β .

В рисунке 3 схематически изображена траектория частиц, которые движутся под критическим углом с радиальным направлением. Тут и заключается физический смысл уравнения (11), то есть, те частицы которые имеют меньше значения критического угла захватываются черной дырой.

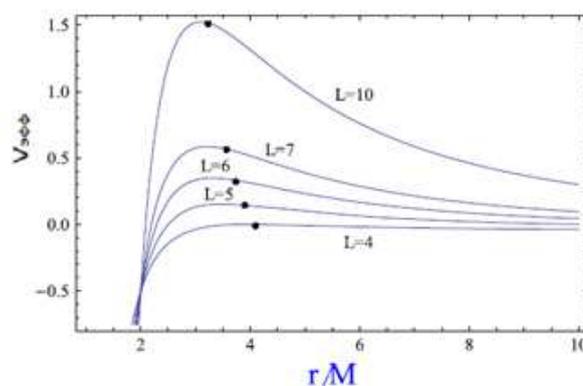


Рис. 2 Зависимость радиуса стабильных круговых орбит от углового момента L .

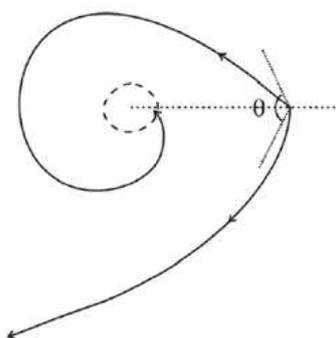


Рис. 3 Критическая граница угла показана пунктирным прямым.

5 Заключение

Целью данной работы являлось определение влияния магнитного момента частиц на критическое значение угла между радиальным и разлетающимся направлениями частиц, вокруг черной дыры Шварцшильда, помещенное в однородное магнитное поле. Для этого изучена природа эффективного потенциала, которая включает в себя магнитный момент, энергию и угловой момент частицы. Из уравнения (11) видно, что критическое значение угла направления частиц, имеющих магнитный момент, меньше чем классических частиц. По-другому, если в классическом приближении частица должна иметь критический угол направления $\theta_{cr} \geq 90^\circ$, то для намагниченных частиц находим $\theta_{cr} \leq 90^\circ$. Это показывает, что, магнитные свойства частиц положительно влияют движению вокруг компактных объектов. А это в свою очередь нам может способствовать получить информации о компактном астрофизическом объекте в более близких расстояниях. При детальном изучении движению частиц вокруг компактных астрофизических объектов, немаловажную роль играют спин

черной дыры и внешнее магнитное поле. В дальнейшем планируется изучение захвата намагниченных частиц вокруг черной дыры Керра, которая имеет более общую характеристику астрофизических компактных объектов и является универсальным решением уравнения Эйнштейна [6].

Литература

- [1] *Захаров А.* Сечения захвата частиц для черной дыры Рейсснера-Нордстрема // Учебный класс. Квантовая грав., 1994. том 11. Р 1027–1033. doi: <http://dx.doi.org/10.3114/S187007708007>.
- [2] *де Феличе Ф. и Зорге Ф.* Намагниченные орбиты вокруг черной дыры Шварцшильда // Учебный класс. Квантовая грав., 2003. том 20. Р 469–481. doi: [http://dx.doi.org/S0264-9381\(03\)56096-8](http://dx.doi.org/S0264-9381(03)56096-8).
- [3] *Рахимов О.* Движение магнитных частиц вокруг черной дыры в мире Брану // Современная Физика Буквы А, 2011. том 26. Р 399–408. doi: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732311034931>.
- [4] *Рахимов О., Абдужаббаров А. и Алмедов Б.* Поперечное сечение захвата для черной дыры Braneworld // Астрофизика и космическая наука, 2011. том 335. Р 499–504. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-011-0755-1>.
- [5] *Новиков И, Фролов В* Физика черных дыр / — М.: Наук, 1986. 127 с.
- [6] *Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж.* Гравитация / — Москва: Мир, 1977. 2т. 240 с.
- [7] *Шапиро С., Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды / — Москва: Мир, 1985. 2т. 276 с.
- [8] *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля / — Москва: Наука, 1988. 401 с.
- [9] *де Феличе Ф. и Зорге Ф.* Намагниченные орбиты вокруг черной дыры Керра // Учебный класс. Квантовая грав., 2004. том 21. Р 961–973. doi: [http://dx.doi.org/S0264-9381\(04\)69663-8](http://dx.doi.org/S0264-9381(04)69663-8).

Поступила в редакцию 01.05.2019

UDC 530.12:531.51

THE DEPENDENCE OF CAPTURE CROSS SECTION FROM MAGNETIC MOMENT OF MAGNETIC PARTICLES IN THE FIELD OF SCHWARZSCHILD BLACK HOLE*

Rahimov O. G.

orahimov.81@mail.ru

Tashkent Institute of Irrigation and Agrocultural Mechanization Engineers

The capture cross section of magnetized particles with nonvanishing magnetic moment by a Schwarzschild black hole immersed in an asymptotically uniform magnetic field has been studied as an extension of the approach developed in Zakharov for neutral unmagnetized particles in the Reissner-Nordström spacetime. The magnetic moment of the particle is chosen as in de Felice and Sorge. It is shown that the spin of the particle sustains the stability of particles circularly orbiting around the black hole immersed in a magnetic field, i.e., a spinning particle's motion near the Schwarzschild black hole

*The research was supported by Agency for Science and Technology of the Republic of Uzbekistan (grant VA-FA-F-2-008).

horizon is more stable than that of a particle with zero spin. It is shown that the magnetic parameter essentially changes the value of the critical angular momentum and affects the process of capture of the particles by the central black hole.

Keywords: magnetization, magnetic field, metrics, spin, angular momentum, black hole, stable orbits.

Citation: Rahimov O. G. 2019. The dependence of capture cross section from magnetic moment of magnetic particles in the field of Schwarzschild black hole. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(21):94–101.

References

- [1] Zakharov A.. 1994. Particle capture cross sections for a Reissner-Nordstrom black hole. *Class. Quantum Grav.* 11:1027–1033. doi: <http://dx.doi.org/10.3114/S187007708007>.
- [2] de Felice F. and Sorge F.. 2003. Magnetized orbits around a Schwarzschild black hole. *Class. Quantum Grav.* 20:469–481. doi: [http://dx.doi.org/S0264-9381\(03\)56096-8](http://dx.doi.org/S0264-9381(03)56096-8).
- [3] Rahimov O.. 2011. Magnetized Particle Motion Around Black Hole in Braneworld. *Modern Physics Letters A* 26:399–408. doi: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732311034931>.
- [4] Rahimov O., Abdujabbarov A. and Ahmedov B.. 2011. Capture Cross Section for Braneworld Black Hole. *Modern Physics Letters A* 335:499–504. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-011-0755-1>.
- [5] Novikov I., Frolov V. 1986. Fizika chernih dir [*Black hole physics*], Moscow: Nauka. 127 p.(In Russian)
- [6] Mizner Ch., Torn K, Willer J. 1977. Gravitatsiya [*Gravitation*], Moscow: Mir. 240 p.(In Russian)
- [7] Shapiro S., Teukolsky S. 1985. Cherniye diri, Beliye karliki i neytronniye zvezdi [*Black holes, White dwarfs and Neutron stars*], Moscow: Mir. 276 p.(In Russian)
- [8] Landau L., Lifshits E. 1988. Teoriya polya [*Theory of field*], Moscow: Nauka. 401 p.(In Russian)
- [9] de Felice F. and Sorge F.. 2004. Magnetized orbits around a Kerr black hole. *Class. Quantum Grav.* 21:961–973. doi: [http://dx.doi.org/S0264-9381\(04\)69663-8](http://dx.doi.org/S0264-9381(04)69663-8).

Received May 1, 2019