

УДК 532.532.542+533.6.011.32+004.021

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ $K - \varepsilon$ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАТОПЛЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

Маликов З. М., Назаров Ф. Х., Мадалиев М. Е.

malikov.z62@mail.ru; farrukhn88@inbox.ru; madaliev.me2019@mail.ru

Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз

В статье приведены результаты численного исследования осесимметричной затопленной струи с помощью модифицированной $k - \varepsilon$ методом. Для численной реализации полученных уравнений использованы переменные Мизеса, а также неявная конечно-разностная схема. Полученные результаты сопоставлялись с известными опытными данными. Показано, что использованная модель для турбулентности в целом удовлетворительно описывает турбулентную струю.

Ключевые слова: затопленная турбулентная струя, модифицированная $k - \varepsilon$ модель, переменные Мизеса, неявная схема, верификация модели

Цитирование: *Маликов З. М., Назаров Ф. Х., Мадалиев М. Е.* Применение модифицированной $k - \varepsilon$ модели для исследования затопленной осесимметричной турбулентной струи // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 3(21). — С. 87–93.

1 Введение

Струйные течения часто встречаются в инженерной практике, примерами которых являются: истечение воды из пожарного гидранта, поток расплавленного металла, вытекающего из ковша и т.п. В приведенных примерах границей струи является граница фаз вещества струи и окружающего пространства – вода или расплавленный металл в окружающем воздухе.

Часто встречаются так называемые затопленные струи, когда вещество струи и вещество, заполняющее окружающее пространство, находятся в одинаковом фазовом состоянии, например, струя воздуха распространяется в неподвижном окружающем ее воздухе или в газе иного состава.

Примерами затопленных струй являются: газовая струя, вытекающая из сопла реактивного двигателя, струя газов бытовой газовой горелки и т.п. С помощью газовых струй можно управлять процессами в химической технологии, вентилировать помещение и так далее. Как видно из примеров, течения, которые принято относить к струйным течениям, очень разнообразны, поэтому трудно дать общее строгое определение понятия струи.

Исследованию задачи о динамике круглой турбулентной струи, являющейся классической задачей экспериментальной, теоретической и вычислительной гидродинамики, посвящено большое количество работ (см. работы [1–13] и библиографию к ним). В [1, 8] экспериментально изучалось течение в круглых турбулентных струях на достаточно больших удалениях от источников.

Эксперименты [1] проведены при числе Рейнольдса $Re = U_{jet}D/\nu = 10^5$, определяемом по скорости истечения U_{jet} и диаметру сопла D при $x/D = 30 \div 100$; эксперименты [8] – при $Re = 1.1 \cdot 10^4, x/D = 30 \div 160$. Исследования [1, 8] проводились по разным методикам, и изучаемые струи различались по ряду характерных

параметров. Возможно, это послужило причиной различной интерпретации полученных данных. В [9] экспериментально изучена динамика течения в ближней области турбулентных струй газов разных плотностей (неавтономные режимы) в спутном потоке, полученные данные сопоставлены с результатами [1, 8]. Лабораторные измерения выполнены при $Re = 2.1 \cdot 10^4$ для $x/D = 0 \div 30x/D$. В [10] приведены результаты численного моделирования круглых турбулентных струй с использованием модели, включающей уравнения переноса для всех компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации кинетической энергии турбулентности. Показано, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [9]. В [11] выполнен подробный анализ данных, полученных при экспериментальном и теоретическом (в том числе численном) изучении таких течений.

Несмотря на многочисленность математических моделей для расчета свободной струи, точность их все еще невысока. Если некоторые из них дают приемлемые результаты на близких расстояниях, то на больших расстояниях дают неудовлетворительные результаты, а другие модели наоборот. Поэтому поиск эффективных моделей турбулентных свободных струй до сих пор продолжается.

2 Постановка задачи

В настоящей работе проводится численное исследование модифицированной модели $k - \varepsilon$ для осесимметричной турбулентной затопленной струи [14]. В работе численные результаты модели сопоставляются с опытными данными [15-16]. Эти данные включены в базу данных NASA для верификации математических моделей турбулентности. Для описания осесимметричного турбулентного потока запишем систему уравнений в цилиндрических координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial(rV_r)}{r\partial r} = 0, \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r\partial r} \right) - \frac{\partial(r\overline{v_r v_z})}{r\partial r}, \\ V_r \frac{\partial k}{\partial r} + V_z \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G - \varepsilon, \\ V_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + V_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \\ R_R = \frac{\sqrt{k} y}{\nu}, \quad \nu_s = \nu + \nu_t, \quad \nu_t = \frac{C_\nu f_\nu k^2}{\varepsilon}, \quad f_1 = 1 + \left(\frac{A_1}{f_\nu} \right)^3, \\ f_2 = 1 - e^{-R_t^2}, \quad R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, \quad f_\nu = (1 - e^{-A_\nu R_R})^2 (1 + A_t/R_t), \\ G = 4\nu_s \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2, \quad \overline{v_z v_r} = -\nu_t \frac{\partial V_z}{\partial r}, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \\ C_\nu = 0.09, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad A_\nu = 0.0165, \quad A_t = 20.5, \quad A_1 = 0.05 \end{array} \right. \quad (1)$$

Данная система подчинена следующим краевым условиям:

- при $z = 0$ и $r < R$: $V_z = 1$, $V_r = 0$, $k = 0.19$, $\varepsilon = 0.019$;
- при $r \rightarrow \infty$: $V_z = V_r = k = \varepsilon = 0$;
- при $r = 0$: $\frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{\partial V_r}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0$.

Здесь V_r, V_z – радиальная и аксиальная скорости, G – генерация за счет составляющих V_r, V_z , k – кинетическая энергия, ε – скорость диссипации, $\overline{v_z v_r}$ – турбулентное напряжение возникающее за счет пульсации скоростей, ν_t – коэффициент турбулентной вязкости.

Система уравнений (1) приведена к безразмерному виду. При этом все размеры соотносились к радиусу сопла, а скорости к скорости истечения струи на выходе из сопла.

Для численной реализации полученной системы уравнений произведена замена переменных $(z, r) \rightarrow (\xi, \psi)$:

$$\xi = z, \quad V_z = \frac{\psi \partial \psi}{r \partial r}, \quad V_r = -\frac{\psi \partial \psi}{r \partial z}.$$

При этом воспользуемся следующими соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{r V_r}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{r V_z}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

В новых переменных система уравнений (1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{r^2 \nu V_z}{\psi} \frac{\partial V_z}{\partial \psi} - r \overline{\vartheta_r \vartheta_z} \right), \\ \frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(r^2 \frac{\nu_t V_z}{\sigma_z \psi} \frac{\partial k}{\partial \psi} \right) + \frac{G - \varepsilon}{V_z}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(r^2 \frac{\nu_t V_z}{\sigma_\varepsilon \psi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \right) + C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{V_z k} G - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{V_z k}, \\ G = 4 \nu_s \left(\frac{r V_z}{\psi} \frac{\partial V_z}{\partial \psi} \right)^2, \quad \overline{\vartheta_z \vartheta_r} = -\nu_t \frac{r V_z}{\psi} \frac{\partial V_z}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (2)$$

3 Методы решения

Систему уравнений (2) представим в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (A \frac{\partial V_z}{\partial \psi}) \\ \frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (B \frac{\partial k}{\partial \psi}) + \frac{G - \varepsilon}{V_z} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (C \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi}) + \frac{C_1 f_1 G \varepsilon - C_2 f_2 \varepsilon^2}{V_z k} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $A = \frac{r^2(\nu + \nu_t)V_z}{\psi}$, $B = \frac{r^2 \nu_t V_z}{\sigma_z \psi}$, $C = \frac{r^2 \nu_t V_z}{\sigma_\varepsilon \psi}$

Для численного решения системы (3) использована неявная конечно-разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{V_{z,i,j} - V_{z,i-1,j}}{\Delta \xi} = \frac{V_{z,i,j+1}(A_{j+1} + A_j) - V_{z,i,j}(A_{j+1} + 2A_j + A_{j-1}) + V_{z,i,j-1}(A_j + A_{j+1})}{2\psi_j \Delta \psi^2} \\ \frac{k_{i,j} - k_{i-1,j}}{\Delta \xi} = \frac{k_{i,j+1}(A_{j+1} + A_j) - k_{i,j}(B_{j+1} + 2B_j + B_{j-1}) + k_{i,j-1}(B_j + B_{j+1})}{2\psi_j \Delta \psi^2} + \frac{G - \varepsilon_{i-1,j}}{V_{z,i-1,j}} \\ \frac{\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i-1,j}}{\Delta \xi} = \frac{\varepsilon_{i,j+1}(C_{j+1} + C_j) - \varepsilon_{i,j}(C_{j+1} + 2C_j + C_{j-1}) + \varepsilon_{i,j-1}(C_j + C_{j+1})}{2\psi_j \Delta \psi^2} + \frac{C_1 f_1 G \varepsilon_{i,j} - C_2 f_2 \varepsilon_{i,j}^2}{V_{z,i-1,j} k_{i-1,j}} \end{cases}$$

Для разрешения неявной схемы использовался метод прогонки. Безразмерные шаги интегрирования были $\Delta \xi = 10^{-4}$, $\Delta \psi = 10^{-2}$.

4 Обсуждение результатов

Численные результаты иллюстрированы на рисунках 1-3. На рисунке 1 показаны профили продольной скорости потока в различных сечениях струи. Как видно из этого рисунка хорошее согласие с опытными данными происходит на больших расстояниях от сопла. Это объясняется тем, что на больших расстояниях струю можно считать полностью сформированным изотропным турбулентным потоком. Поэтому используемая модель турбулентности здесь работает хорошо. Другую картину можно наблюдать вблизи сопла, где поток претерпевает переходной режим от ламинарного потока к турбулентному потоку.

На рисунке 2 показана осевая продольная скорость в зависимости от расстояния от сопла. Для сравнения на этом рисунке штриховыми линиями показаны также и опытные данные.

Для практики и теории большой интерес представляют и расчетные рейнольд-совы напряжения. Поэтому на рисунке 3 иллюстрированы профили турбулентных

напряжений в различных сечениях струи. Из этого рисунка видно, что расчетные данные для данного параметра только качественно соответствуют опытным данным. Это свидетельствует о том, что выбранная математическая модель турбулентности не совсем адекватно описывает сдвиговые течения. Об этом свидетельствуют исследования и других исследователей.

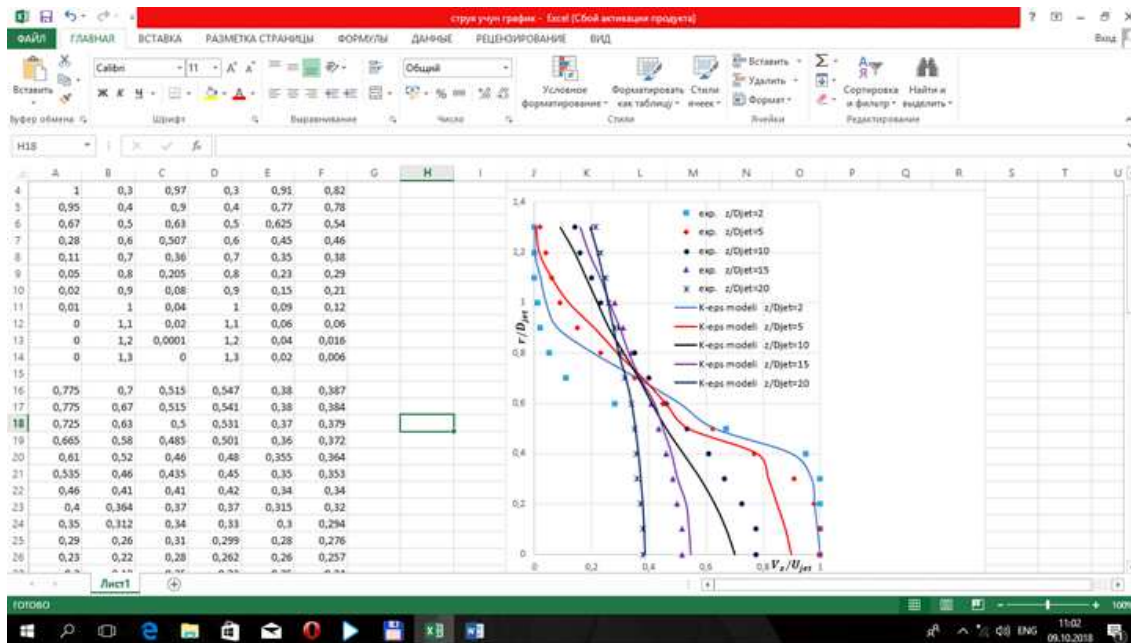


Рис. 1 Профили продольной скорости в различных сечениях струи

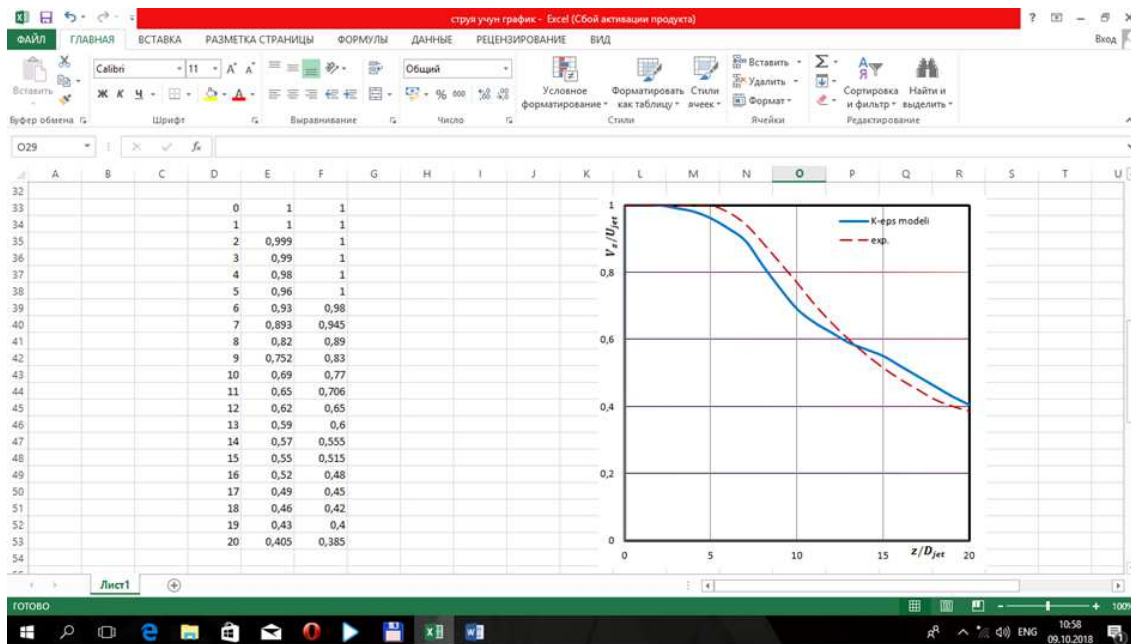


Рис. 2 Осевая продольная скорость потока от расстояния от сопла

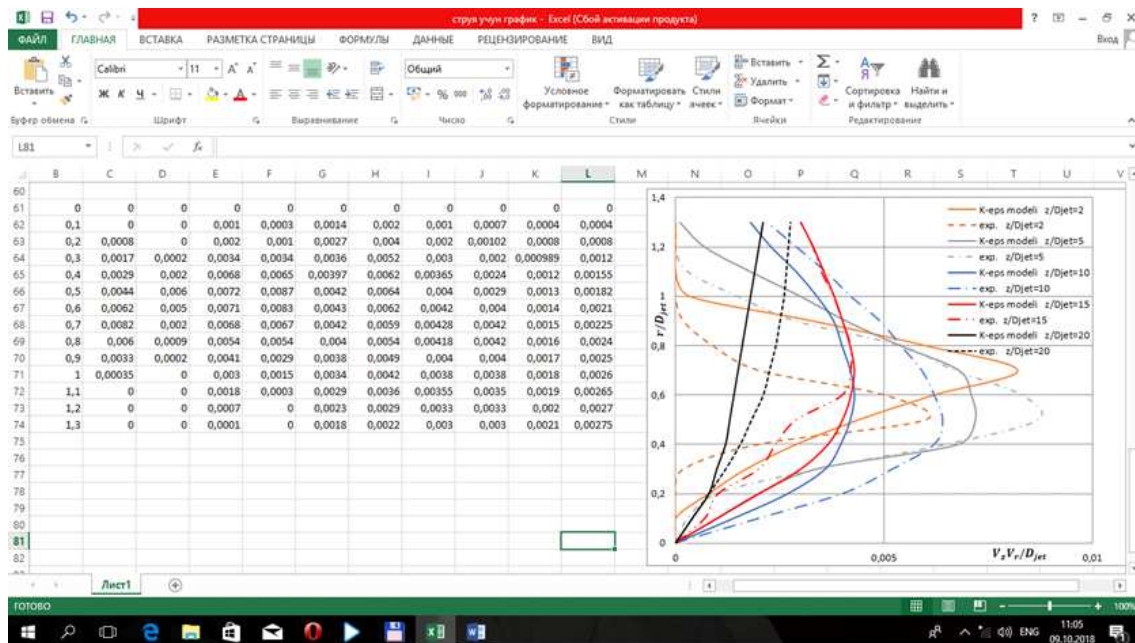


Рис. 3 Профили турбулентных напряжений в различных сечениях струи

5 Выводы

Исследование вышеописанной модели турбулентности для затопленной струи показывает, что она способна дать только качественные результаты. В пользу выбранной модели можно констатировать то, что и другие модели дают результаты не лучше этой, потому что выбранная задача для тестирования модели имеет чрезвычайно сложную структуру турбулентности. Это связано с тем, что струя, истекая в затопленное пространство проходит все режимы течения. Вблизи сопла наблюдается ламинарное течение, далее наступает переходной режим и на расстоянии больше 20 калибров струя полностью приобретает турбулентный характер. Поэтому использованную модель можно считать пригодной для исследования турбулентных течений.

Литература

- [1] *Wyganski I., Fiedler H.* Некоторые измерения в самосохраняющейся струе // *J. Fluid Mech.*, 1969. V. 38. P. 577–612.
- [2] *Rodi W.* Прогнозирование свободных турбулентных пограничных слоев с использованием двухуровневой модели турбулентности: Ph. D. Тезис. L., 1972.
- [3] *W. Frost, T. Moulden. N. Y.* Справочник по турбулентности. V. 1. Основы и приложения : Пленум пресс, 1977.
- [4] *Schetz J. A. Injection and mixing in turbulent flow. N. Y.: New York Univ., 1980. (Progress in astronautics and aeronautics; V. 68).*
- [5] *Rodi W. Turbulence models and their application in hydraulics. Karlsruhe: Univ. of Karlsruhe, 1980.*
- [6] *Лаундер Б. Е., Морс А.* Численный расчет осесимметричных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // *Турбулентные сдвиговые течения 1: Пер. с англ. / Под ред. А. С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982. С. 291–310.*
- [7] *Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй / Г. Н. Абрамович, Т. А. Гиршович, С. Ю. Крашенинников, А. Н. Секундов, И. П. Смирнова. М.: Наука, 1984.*

- [8] Panchapakesan N. R., Lumley J. L. *Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Pt 1. Air jet* // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 246. P. 197–223.
- [9] Amielh M., Djeridane T., Anselmet F., Fulachier L. *Velocity near-field of variable density turbulent jets* // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1996. V. 39, N 10. P. 2149–2164.
- [10] Gharbi A., Ruffin E., Anselmet F., Schiestel R. *Numerical modelling of variable density turbulent jets* // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1996. V. 39, N 9. P. 1865–1882.
- [11] Piquet J. *Turbulent flows: models and physics.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [12] Алексеенко С. В., Бильский А. В., Маркович Д. М. *Применение метода цифровой трассерной визуализации для анализа турбулентных потоков с периодической составляющей* // *Приборы и техника эксперимента.* 2004. № 5. С. 145–153.
- [13] Alekseenko S. V., Bilsky A. V., Dulin V. M., et al. *Non-intrusive determination of turbulent energy balance in free and confined jet flows* // *Proc. of the 4th Intern. symp. on turbulence and shear flow phenomena (TSFP-4), Williamsburg (VA, USA), 27–29 June 2005.* P. 605–610.
- [14] Новомлинский В.В., Стронгин М.П. *Численное исследование закрученных одно и двух-фазных турбулентных потоков в цилиндрическом канале. Прикладная механика и техническая физика 1988, №2.*
- [15] Bridges, J., Wernet, M. P. "Establishing Consensus Turbulence Statistics for Hot Subsonic Jets," *AIAA Paper 2010-3751, 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, Sweden, June, 2010.*
- [16] Bridges, J. and Wernet, M. P. "The NASA Subsonic Jet Particle Image Velocimetry (PIV) Dataset". *NASA/TM-2011-216807, November, 2011.*

Поступила в редакцию 16.04.2018

UDC 532.532.542+533.6.011.32+004.021

NUMERICAL MODELING OF THE PROCESS OF MOISTURE AND SALT TRANSFER IN SOILS

Malikov Z. M., Nazarov F. H., Madaliyev M. E.

malikov.z62@mail.ru; farrukhn88@inbox.ru; madaliev.me2019@mail.ru

¹Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures NAS RUz

The paper presents a numerical study of an axisymmetric flooded jet using a modified k- ϵ method. Mises variables and implicit finite-difference scheme are used for numerical realization of the obtained equations. The results were compared with known experimental data. It is shown that the model used for turbulence in General satisfactorily describes the turbulent jet.

Keywords: Flooded jet, a modified $k - \epsilon$ model, the variables of Mises, implicit scheme, the verification of the model

Citation: Malikov Z. M., Nazarov F. H., Madaliyev M. E. 2019. Numerical modeling of the process of moisture and salt transfer in soils. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 3(21):87–93.

References

- [1] Wygnanski I., Fiedler H. *Some measurements in the self-preserving jet* // *J. Fluid Mech.*, 1969. V. 38. P. 577–612.

- [2] Rodi W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of two-equation model of turbulence: Ph. D. thesis. L., 1972.
- [3] Handbook of turbulence. V. 1. Fundamentals and applications // Ed. by W. Frost, T. Moulden. N. Y.; L.: Plenum press, 1977.
- [4] Schetz J. A. Injection and mixing in turbulent flow. N. Y.: New York Univ., 1980. (Progress in astronautics and aeronautics; V. 68).
- [5] Rodi W. Turbulence models and their application in hydraulics. Karlsruhe: Univ. of Karlsruhe, 1980.
- [6] Launder B. E., Morse A. Numerical calculation of axisymmetric shear flows using short circuits for stresses // Turbulent shear flows 1: Per. from English // Ed. A. S. Ginevsky. M.: Mashinostroenie, 1982. pp. 291–310.
- [7] Abramovich G. N. Theory of turbulent jets // G. N. Abramovich, T. A. Girshovich, S. Yu. Krasheninnikov, A. N. Sekundov, I. P. Smirnova. M.: Science, 1984.
- [8] Panchapakesan N. R., Lumley J. L. Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Pt 1. Air jet // J. Fluid Mech. 1993. V. 246. P. 197–223.
- [9] Gharbi A., Ruffin E., Anselmet F., Schiestel R. Numerical modeling of variable density turbulent jets // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1996. V. 39, N 9. R. 1865–1882.
- [10] Piquet J. Turbulent flows: models and physics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [11] Alekseenko S.V., Bilsky A.V., Markovich D.M. Application of the digital tracer visualization method for the analysis of turbulent flows with a periodic component // Instruments and experimental technique. 2004. No. 5. P. 145–153.
- [12] Alekseenko S. V., Bilsky A. V., Dulin V. M., et al. Turbulent energy flows in free-stream and confined jet flows // Proc. of the 4th Intern. symp. on turbulence and shear flow phenomena (TSFP-4), Williamsburg (VA, USA), 27–29 June 2005. R. 605–610.
- [13] Novomlinsky V.V., Strongin MP Numerical investigation of twisted one and two-phase turbulent flows in a cylindrical channel. Applied mechanics and technical physics 1988, N.2.
- [14] Bridges, J., Wernet, M. P. "Establishing Consensus Turbulence Statistics for Hot Subsonic Jets," AIAA Paper 2010-3751, 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, Sweden, June, 2010.
- [15] Bridges, J. and Wernet, M. P. "The NASA Subsonic Jet Particle Image Velocimetry (PIV) Dataset". NASA/TM-2011-216807, November, 2011.

Received April 16, 2018