УДК 519.957

ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В НЕОБРАТИМОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Юсупов Р.К.
Каракалпакский государственный университет им.Бердаха,

Жабборов Н.М.
Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,

Первой работой, в которой была рассмотрена задача групповой классификации нелинейных уравнений диффузии, является классическая работа Л.В. Овсянникова, где впервые была поставлена задача групповой классификации дифференциальных уравнений, дан алгоритм ее решения. Эта работа положила начало многочисленным циклам работ по групповой классификации дифференциальных уравнений. Обозначим через L главную алгебру Ли для исследуемого уравнения. Оставшаяся часть групповой классификации определяется нелинейными коэффициентами, которые допускают расширение главной алгебры L для исследуемого уравнения. В предложенном Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. подходе не проводится проверка определяющего уравнения, в результате авторы получили частичную группу для исследуемого дифференциального уравнения посредством так называемого метода предварительной групповой классификации. Существенной частью предложенного метода является классификация всех неподобных подалгебр L_E алгебры L. Фактически применение метода является простым и эффективным, когда классификация основана на конечномерной алгебре эквивалентности L_E .В данной работе на основе метода группового анализа найдено ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений пороупругости в диссипативном приближении.

Ключевые слова: математическая модель, численный эксперимент, группа Ли, двухскоростная гидродинамика, равновесиея фаз по давлению.

GROUP PROPERTIES FOR A SYSTEM OF ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR DYNAMIC EQUATIONS OF POROELASTICITY FOR TRANSVERSE WAVES IN AN IRREVERSIBLE APPROXIMATION

Yusupov R.K., Zhobborov N.M.

The first paper in which the problem of group classification of non-linear diffusion equations was considered is the classical work of L.V. Ovsyannikov, where the problem of group classification of differential equations was first posed, an algorithm for solving it is given. This work marked the beginning of numerous cycles of work on the group classification of differential equations. We denote by L the principal Lie algebra for the equation in question. In the proposed approach by Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh. does not verify the defining equation, as a result, the authors have obtained a partial group for the differential equation under study by means of the so-called preliminary group classification method. An essential part of the proposed method is the classification of all the inconvenient subalgebras L_E of the algebra L. In fact, the application of the method is simple and effective when the classification is based on a finite-dimensional equivalence algebra L_E . In this paper, the core of main Lie groups of the one-dimensional system of pore-elasticity equations in the dissipative approximation are found on the basis of the group analysis method.

Keywords: mathematical model, numerical experiment, Lie group, two-velocity hydrodynamics, equilibrium of phases by pressure.

QAYTMAS KO’NDALANG TO’LQINLAR UCHUN ELASTIK G’OVAKNING BIR ULCHOVLI CHIZIQLI BO’LMAGAN DINAMIK TENGLAMALAR SISTEMASINING GURUHLI XOSSALARI

Yusupov R.K., Zhobborov N.M.

Diffuziya nochiziqli tenglamalarning guruhli tasniflash muammosi ko’rilgan birinchi ish, L.V. Ovsyannikovning klassik ishi bo’ib, unda birinchi marta differensial tenglamalarning guruhli tasniflash masalasi qo’yilgan bo’lib, uni hal etish uchun algoritm berilgan. Bu ish differensial tenglamalar guruhli tasnifi bo'yicha ko'plab ilmiy ishlarning boshlanishini belgilab berdi. Qidirilayotgan tenglama uchun L bilan bosh Li algebrasini belgilaymiz. Guruhli tasniflashning qolgan qismi o'rganilayotgan tenglama uchun nochiziqli koeffitsiyentlar bilan aniqlanib, u bosh algebra Lni kengaytirish imkonini beradi. Axatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. mualliflar taklifida tenglamani aniqlovch tekshiruv olib bormaydi, natijada dastlabki guruhli tasniflash deb ataluvchi usul bilan tekshiriluvchi differensial tenglama uchun qisman guruh hosil qilingan. Taklif etilayotgan guruhli tasniflash usulining muhim ahamiyati L algebrani o'xshash bo'lmagan L_E algebralarga tavsiflashdir. Qachon qo'llanilgan usul tasniflash usuli chekli o'lchamli L_E algebralarning ekvivalentligiga asoslanganda samarali va sodda bo'ladi. Ushbu ishda qaytmas kundalang tulqinlar uchun elastik g'ovakning bir ulchovli chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasining guruhli tahlil usuli asosida Li guruhining yadrosi topilgan.

Kalit so'zlar: matematik model, sonli tajriba, Li guruhlari, ikki tezlikli gidrodinamika, fazalarning bosim bo'yicha muvozanati.

1. Введение

Хорошо известно [1, (с.80)], что задача групповой классификации заключается в нахождении группы локальных преобразований, которую допускают динамические уравнения, которые приводят к расширению ядра основных групп. Применение инфинитезимального метода Ли-Овсянникова [1, (с.84)] к решению исследуемой задачи сводит нахождение групп локальных преобразований к построению определяющих их алгебр Ли инфинитезимальных операторов (алгебр инвариантности), допускаемых исследуемыми уравнениями.

Первой работой, в которой была рассмотрена задача групповой классификации нелинейных уравнений диффузии, является классическая работа Л.В. Овсянникова [2], где впервые была поставлена задача групповой классификации дифференциальных уравнений, дан алгоритм ее решения. Эта работа положила начало многочисленным циклам работ по групповой классификации дифференциальных уравнений. Следуя [3], обозначим через L главную алгебру Ли для исследуемого уравнения. Оставшаяся часть групповой классификации определяется нелинейными коэффициентами, которые допускают расширение главной алгебры L для исследуемого уравнения. В предложенном авторами подходе не проводится проверка определяющего уравнения, в результате авторы получили частичную группу для исследуемого дифференциального уравнения посредством так называемого метода предварительной групповой классификации [4]. Существенной частью предложенного метода является классификация всех неподобных подалгебр L_E алгебры L. Фактически применение метода является простым и эффективным, когда классификация основана на конечномерной алгебре эквивалентности L_E .В данной работе на основе метода группового анализа найдено ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений пороупругости в диссипативном приближении.

2. Одномерная система динамических уравнений пороупругости для поперечных волн в диссипативном приближении

Рассмотрим распространение нелинейных поперечных сейсмических волн в случае, когда парциальные плотности матрицы пористого тела ρ_s, насыщающей жидкости ρ_l, а также модуль сдвига μ являются постоянными, а сила трения, определяющая диссипацию энергии, является функцией разности скоростей $\varphi = \varphi(u - v)$. При таких предположениях система нелинейных одномерных уравнений пороупругости может быть записана в следующем виде [5-7]:

$$\begin{gathered} \rho_s u_t = \sigma_x - \rho_l \varphi , \\ \sigma_t = \mu u_x, \\ v_t = \varphi, \end{gathered} \tag{1}$$

где u и v - скорости пористой матрицы и насыщающей жидкости, соответственно; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ - операторы дифференцирования; $\rho_s = \rho_s^f (1 - \phi)$, $\rho_l = \rho_l^f \phi$, ϕ - пористость, ρ_s^f и - физические плотности пористого тела и насыщающей жидкости, соответственно; σ - тензор напряжений.

3. Алгебра эквивалентности и обозначения

Преобразование эквивалентности в нашем случае является невырожденным изменением переменных t , x , u , v, σ для любой системы вида (1) в систему того же вида, вообще говоря, с отличной функцией $\varphi(u - v)$.

Рассмотрим непрерывную группу преобразований эквивалентности и будем искать его генератор в вид

$$Y = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \\ + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \sigma} + \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2}$$

из условий инвариантности системы уравнений (1):

$$\begin{gathered} \rho_s u_t = \sigma_x - \rho_l \varphi, \\ \sigma_t = \mu u_x, \\ v_t = \varphi, \\ \varphi_t = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\varphi_x = 0.$$

В формуле (2) координаты $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ и $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ являются функциями от t, x, u, v, σ :

$$\xi = \xi(t, x, u, v, \sigma),\ \eta = \eta(t, x, u, v, \sigma),$$

а координата λ является функцией переменных от $t, x, u, v, \sigma, \varphi$:

$$\lambda = \lambda(t, x, u, v, \sigma, \varphi).$$

Условиями инвариантности системы уравнений (3) являются следующие соотношения

$$\begin{gathered} \tilde{Y}(\rho_s u_t - \sigma_x + \rho_l \varphi) = 0, \\ \tilde{Y}(\sigma_t - \mu u_x) = 0, \\ \tilde{Y}(v_t - \varphi) = 0, \\ \tilde{Y}\varphi_t = 0, \\ \tilde{Y}\varphi_x = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

где $\tilde{Y}$ - оператор продолжения для оператора (2).

Для того чтобы написать формулы продолжения, удобно ввести следующие обозначения. Прежде всего подчеркнем, что преобразования симметрии и их генераторы для системы дифференциальных уравнений (1) действуют на пространство (x , u) независимых перем

$$x = (x^1, x^2),\ x^1 := t,\ x^2 := x, \tag{5}$$

и зависимых переменных

$$u = (u^1, u^2, u^3),\ u^1 := u,\ u^2 := v,\ u^3 := \sigma. \tag{6}$$

В отличие от преобразований симметрии преобразования эквивалентности и их генераторы (2) действуют на пространство (y, φ) пяти независимых переменных

$$y = (x, u),$$

и зависимый переменной φ .

Введенные таким образом обозначения позволяют представить оператор $\tilde{Y}$ в компактной форме и четко различать генераторы симметрии и эквивалентности.

Запишем оператор симметрии ка

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}, \tag{7}$$

и его первое продолжение как

$$\underset{1}{X} = X + \zeta_i^j \frac{\partial}{\partial u_i^j} \tag{8}$$

С

$$\zeta_i^j = D_i(\eta^j) - u_k^j D_i(\xi^k), \tag{9}$$

где $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} + u_i^j \dfrac{\partial}{\partial u^j}$ – полная производная относительно x^i .

Что касается генератора (2), запишем его в форма

$$Y = \nu^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{10}$$

где $\nu := (\xi, \eta)$.

Следовательно

$$Y = X + \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{11}$$

Теперь мы можем дать компактную форму для продолжения оператора (10):

$$\tilde{Y} = Y + \zeta_i^j \frac{\partial}{\partial u_i^j} + \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \tag{12}$$

где

$$u_1^1 = u_t,\ u_1^2 = v_t,\ u_1^3 = \sigma_t,\ u_2^1 = u_x,$$
$$u_2^3 = \sigma_x. \tag{13}$$

Координаты ζ_i^j оператора (12) задаются формулой (9), тогда как

$$\omega_i = \tilde{D}_i(\lambda) - \varphi_j \tilde{D}_i(v^j)\ ,\ \text{i=1,2}, \tag{14}$$

где $\tilde{D}_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i} + \varphi_i \dfrac{\partial}{\partial \varphi}$.

Отметим также, что формула продолжения (12) может быть переписана как

$$\tilde{Y} = \underset{1}{X} + \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \tag{15}$$

в соответствии с (11).

Теперь, принимая во внимание введенные обозначения, подставим формулы продолжения (12) в условия инвариантности (4). После простых преобразований получим

$$\rho_s \zeta_1^1 - \zeta_2^3 + \rho_l \zeta_1^2 = 0, \tag{16}$$
$$\zeta_1^3 - \mu \zeta_2^1 = 0, \tag{17}$$
$$\zeta_1^2 - \lambda = 0, \tag{18}$$
$$\omega_1 = 0, \tag{19}$$
$$\omega_2 = 0. \tag{20}$$

Согласно формуле продолжения (9), имеем

$$\begin{gathered} \zeta_1^1 = D_t(\eta^1) - u_t D_t(\xi^1) - u_x D_t(\xi^2) \equiv \\ \equiv \eta_t^1 + u_t \eta_u^1 + v_t \eta_v^1 + \sigma_t \eta_\sigma^1 - \\ -u_t(\xi_t^1 + u_t \xi_u^1 + v_t \xi_v^1 + \sigma_t \xi_\sigma^1) - \\ -u_x(\xi_t^2 + u_t \xi_u^2 + v_t \xi_v^2 + \sigma_t \xi_\sigma^2), \\ \zeta_2^1 = D_x(\eta^1) - u_t D_x(\xi^1) - u_x D_x(\xi^2) \equiv \\ \equiv \eta_x^1 + u_x \eta_u^1 + v_x \eta_v^1 + \sigma_x \eta_\sigma^1 - \\ -u_t(\xi_x^1 + u_x \xi_u^1 + v_x \xi_v^1 + \sigma_x \xi_\sigma^1) - \\ -u_x(\xi_x^2 + u_x \xi_u^2 + v_x \xi_v^2 + \sigma_x \xi_\sigma^2), \\ \zeta_1^2 = D_t(\eta^2) - v_t D_t(\xi^1) - v_x D_t(\xi^2) \equiv \\ \equiv \eta_t^2 + u_t \eta_u^2 + v_t \eta_v^2 + \sigma_t \eta_\sigma^2 - \\ -v_t(\xi_t^1 + u_t \xi_u^1 + v_t \xi_v^1 + \sigma_t \xi_\sigma^1) - \\ -v_x(\xi_t^2 + u_t \xi_u^2 + v_t \xi_v^2 + \sigma_t \xi_\sigma^2), \qquad (21) \\ \zeta_2^2 = D_x(\eta^2) - v_t D_x(\xi^1) - v_x D_x(\xi^2) \equiv \\ \equiv \eta_x^2 + u_x \eta_u^2 + v_x \eta_v^2 + \sigma_x \eta_\sigma^2 - \\ -v_t(\xi_x^1 + u_x \xi_u^1 + v_x \xi_v^1 + \sigma_x \xi_\sigma^1) - \\ -v_x(\xi_x^2 + u_x \xi_u^2 + v_x \xi_v^2 + \sigma_x \xi_\sigma^2), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \zeta_1^3 = D_t(\eta^3) - \sigma_t D_t(\xi^1) - \sigma_x D_t(\xi^2) \equiv \\ \equiv \eta_t^3 + u_t \eta_u^3 + v_t \eta_v^3 + \sigma_t \eta_\sigma^3 - \\ -\sigma_t(\xi_t^1 + u_t \xi_u^1 + v_t \xi_v^1 + \sigma_t \xi_\sigma^1) - \\ -\sigma_x(\xi_t^2 + u_t \xi_u^2 + v_t \xi_v^2 + \sigma_t \xi_\sigma^2), \\ \zeta_2^3 = D_x(\eta^3) - \sigma_t D_x(\xi^1) - \sigma_x D_x(\xi^2) \equiv \\ \equiv \eta_x^3 + u_x \eta_u^3 + v_x \eta_v^3 + \sigma_x \eta_\sigma^3 - \\ -\sigma_t(\xi_x^1 + u_x \xi_u^1 + v_x \xi_v^1 + \sigma_x \xi_\sigma^1) - \\ -\sigma_x(\xi_x^2 + u_x \xi_u^2 + v_x \xi_v^2 + \sigma_x \xi_\sigma^2), \end{gathered}$$

В следствии соотношений $\varphi_t = 0, \varphi_x = 0$, можем написать выражения для операторов

$$\widetilde{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}$$
$$\widetilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \widetilde{D}_\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma},$$
$$\widetilde{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + \varphi_u \frac{\partial}{\partial \varphi},$$
$$\widetilde{D}_v = \frac{\partial}{\partial v} + \varphi_v \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial v} - \varphi_v \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Здесь использовалось свойство силы трения, что она является функцией только относительной скорости фаз.

Функции ω_1 и ω_2 вычисляются по формулам

$$\omega_1 = \widetilde{D}_t(\lambda) - \varphi_t\widetilde{D}_t(\xi^1) - \varphi_x\widetilde{D}_t(\xi^2) - \varphi_u\widetilde{D}_t(\eta^1) - -\varphi_v\widetilde{D}_t(\eta^2) \equiv \lambda_t - \varphi_u\eta_t^1 - \varphi_v\eta_t^2, \quad (22)$$

$$\omega_2 = \widetilde{D}_x(\lambda) - \varphi_t\widetilde{D}_x(\xi^1) - \varphi_x\widetilde{D}_x(\xi^2) - \varphi_u\widetilde{D}_x(\eta^1) - -\varphi_v\widetilde{D}_x \equiv \lambda_x - \varphi_u\eta_x^1 - \varphi_v\eta_x^2. \quad (23)$$

Так как здесь λ_t, λ_x, $\eta_t^1, \eta_t^2, \eta_x^1, \eta_x^2$ не зависят от φ_u, φ_v, то

$$\lambda_t = \lambda_x = 0,$$
$$\eta_t^1 - \eta_t^2 = \eta_x^1 - \eta_x^2 = 0. \quad (24)$$

Из соотношения (18) получим формулу для определения функции λ

$$\lambda = \lambda(u,v,\varphi) = \zeta_1^2 \equiv \eta_t^2 + u_t\eta_u^2 + v_t\eta_v^2 + \sigma_t\eta_\sigma^2 - -v_t(\xi_t^1 + u_t\xi_u^1 + v_t\xi_v^1 + \sigma_t\xi_\sigma^1) - -v_x(\xi_t^2 + u_t\xi_u^2 + v_t\xi_v^2 + \sigma_t\xi_\sigma^2) = = \eta_t^2 + u_t(\eta_u^2 - \varphi\xi_u^1 - v_x\xi_u^2) + v_t(\eta_v^2 - \xi_t^1 - v_x\xi_v^2) + +\sigma_t(\eta_\sigma^2 - \varphi\xi_\sigma^1 - v_x\xi_\sigma^2) - \varphi^2\xi_v^1 - v_x\xi_t^2.$$

Отсюда имеем

$$\eta_t^2 = 0, \quad (25)$$
$$\varphi\xi_u^1 + v_x\xi_u^2 - \eta_u^2 = 0,$$
$$\varphi\xi_\sigma^1 + v_x\xi_\sigma^2 - \eta_\sigma^2 = 0,$$

или,

$$\xi_u^1 = 0, \xi_u^2 = 0, \eta_u^2 = 0,$$
$$\xi_\sigma^1 = 0, \xi_\sigma^2 = 0, \eta_\sigma^2 = 0. \quad (26)$$

Таким образом,

$\lambda = (\eta_v^2 - \xi_t^1)\varphi - \varphi^2\xi_v^1$ (27)

является функцией только от v и φ.

Из соотношений (24)-(27) получим

$$\xi^1 = Ct + \alpha_1(x) + \alpha_2(v),$$
$$\xi^2 = \alpha_3(x),$$
$$\eta^1 = \eta^2 + \tilde{C}, \eta^2 = \beta(v), \quad (28)$$
$$\lambda = (\beta'(v) - C)\varphi - \varphi^2\alpha_2'(v).$$

Поставляя эти соотношение в (21), получим

$$\zeta_1^1 = \varphi\beta'(v) - u_t(C + \varphi\alpha_2'(v)),$$
$$\zeta_1^2 = (\beta'(v) - C - \varphi\alpha_2'(v))\varphi,$$
$$\zeta_2^1 = v_x\beta'(v) - u_t\big(\alpha_1'(x) + v_x\alpha_2'(v)\big) - u_x\alpha_3'(x),$$
$$\zeta_1^3 = \eta_t^3 + u_t\eta_u^3 + v_t\eta_v^3 + \sigma_t\eta_\sigma^3 - \sigma_t(C + \varphi\alpha_2'(v)),$$
$$\zeta_2^3 = \eta_x^3 + u_x\eta_u^3 + v_x\eta_v^3 + \sigma_x\eta_\sigma^3 - \sigma_t\big(\alpha_1'(x) + +v_x\alpha_2'(v)\big) - \sigma_x\alpha_3'(x).$$

Из этих соотношений после простых преобразований получим формулы

$$\xi^1 = C_1 + C_2t, \xi^2 = C_3 + C_4x,$$
$$\eta^1 = C_5, \eta^2 = C_6, \eta^2 = -\tfrac{C_4}{2}\sigma + C_7, \quad (29)$$
$$\lambda = -C_2\varphi.$$

Это общее решение порождает оператор эквивалентности для системы (1):

$$Y = \left(C_1 + C_2t\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(C_3 + C_4x\right)\frac{\partial}{\partial x} + C_5\frac{\partial}{\partial u} + +C_6\frac{\partial}{\partial v} + \left(C_7 - \frac{C_4}{2}\sigma\right)\frac{\partial}{\partial \sigma} - C_2\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Здесь $C_1, C_2, \ldots, C_7$ - произвольные постоянные.

Таким образом, показано что алгебра эквивалентности для системы (1) конечномерна.

В данном случае пространство L, натянуто на семь операторов

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ Y_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - \varphi\frac{\partial}{\partial \varphi},\ Y_3 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma},\ Y_5 = \frac{\partial}{\partial u},\ Y_6 = \frac{\partial}{\partial v},\ Y_7 = \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Литература

[1] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978.

[2] *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, No. 3, с. 492-495.

[3] *Ibragimov N. H. , Torrisi M., and Valenti A.* Preliminary group classification of equations // J. Math. Phys., 1991, v. 32, pp. 2988–2995.

[4] *Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР, 1987, т. 293, No. 5, с. 1033-1035.

[5] *Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Коробов П.В., Холмуродов А.Э.* Прямая и обратная задача для нелинейных одномерных уравнений пороупругости // Доклады Академии Наук, 2014, том 455, № 6, С. 640-642.

[6] *Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э.* Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.

[7] *Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х.* Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012., 212 с.