

УДК 631.6:512.312

МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОПРОДУКТИВНОСТИ, КАК ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Арушанов М.Л.

д.г.н., заведующий лабораторией,
Научно-исследовательский гидрометеорологический институт,
тел.: +(99890) 997-61-46, e-mail: mikl-arushanov@rambler.ru

Жумаев У.Х.

с.н.с., аспирант,
Научно-исследовательский гидрометеорологический институт

В статье рассматривается один из возможных подходов к созданию модели биопродуктивности, сельскохозяйственных культур, описывающей динамику созревания на всех этапах вегетативного периода на основе уравнений математической физики и их численного решения.

Ключевые слова: математическая модель, уравнение теплопереноса, профиль температуры, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности.

MODELING OF BIOLOGICAL PRODUCTIVITY AS THE PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS Arushanov M.L., Jumaev U.H.

An algorithm for calculating the temperature profile of the soil layer, the coefficients of heat capacity and thermal conductivity, as functions of moisture and soil density, is proposed and implemented.

Keywords: mathematical model, heat transfer equation, temperature profile, heat capacity and heat conductivity coefficients.

БИОҲОСИЛДОРЛИКНИ МАТЕМАТИК ФИЗИК МОДЕЛЛАШТИРИШ ЕЧИМИ Арушанов М.Л., Жумаев У.Х.

Маколада математик физика тенгламалари ва уларнинг рақамли ечимлари асосида вегетация даврининг барча босқичларида этилиш динамикасини тасвирлайдиган қишлоқ хўжалиги экинларини биомахсуддорлик моделини яратишнинг ёндашувларидан бири кўриб чиқилган.

Калит сўзлар: Математик модел, иссиқлик узатиш тенгламаси, иссиқлик профили иссиқлик ҳажми ва иссиқликўтказувчанлик коэффициентлари.

1. Введение

Исследование закономерностей динамики биопродуктивности сельскохозяйственных культур и их энергетического баланса в естественной природной среде, «нагруженной» агротехническими технологиями можно отнести к числу важнейших проблем, как сельскохозяйственной науки, так и экологии. Помимо большого числа естественнонаучных исследований, в этой области в настоящее время накоплен немалый опыт математического моделирования и системного анализа, что позволяет использовать теоретические построения в практических целях.

Актуальность исследований, выполненных в данной статье, продиктована сложившемся разрывом между возрастающей степенью антропогенного давления на агроэкосистемы и несовершенством методов прогноза их последствий. Прогресс в этом направлении наметился с появлением концепций устойчивого и точного земледелия [1]. Инструментом

формирования комплекса рекомендаций в них являются средства поддержки технологических решений, а в качестве их интеллектуального ядра выступают динамические модели производственного процесса (ДМПП) сельскохозяйственных культур. Использование математических моделей повышает эффективность современных информационных систем сельскохозяйственного назначения.

Процессы динамики созревания культуры допускают теоретическое описание. Теоретический подход предполагает рассмотрение сути процессов и описание их динамики на языке физически или биологически интерпретируемых уравнений и не требует избыточного набора опытных данных для идентификации модели: большинство используемых параметров имеет прозрачный физический или биологический смысл. С другой стороны, адекватное отражение в модели явлений, имеющих место в среде обитания и в самой культуре, может служить гарантией ее работоспособности в широком

диапазоне внешних воздействий – более широком, чем тот, на котором она была идентифицирована.

Таким образом, важной задачей при построении имитационной модели формирования биомассы растений является разработка «физиологической» модели фотосинтеза, как основного процесса, влияющего на биопродуктивность растений. Такая модель должна описывать адекватную реакцию растения на внешнюю среду. Поэтому, разработка имитационных моделей, в частности, механистических, биопродуктивности сельскохозяйственных культур, и не только, можно

рассматривать как решение задачи математической физики.

2. Структура модели и ее функции

Рассматриваемая ниже модель предназначена для описания продукционного процесса зерновых культур от момента сева до полного созревания. Программная реализация модели основана на модульном принципе, что позволяет достаточно просто модифицировать отдельные процедуры внутри модулей (рис. 1).



Рис. 1. Обобщенная блок-схема модели

Согласно рис. 1 модель включает в себя описание следующих процессов в системе «почва– растительный покров– приземный слой воздуха»:

- радиационный режим культуры – моделирование поглощенной коротковолновой и тепловой радиации, а также фотосинтетической активной радиации (ФАР);
- турбулентный режим посева;
- фотосинтез и фотодыхание;
- развития растений – моделирование наступления фенофаз (расчет биологического времени);
- распределения накопленных продуктов фотосинтеза по органам культуры, формирования урожая зерна;
- динамику почвенной влаги;
- транспирацию растений и испарения влаги с поверхности почвы;
- динамику соединений азота в почве и в растении;
- прогнозирования темпов развития растений;

- прогнозирования урожая (начиная с фазы колошения);
- выбора норм и сроков орошения в поливном земледелии.

Модуль радиации. Солнечная радиация, приходящая на горизонтальную поверхность у земли вычисляется по формуле:

$$Q_c = \left(a_{sn} + b_{sn} \frac{n}{N} \right) Q_a, \quad (1)$$

где N – длительность светового дня (час), n – число часов солнечного сияния, $a_{sn} = 0,24$, $b_{sn} = 0,5$ – эмпирические коэффициенты; $Q_a = Q_0 \cdot \sin(h_0)$ – солнечная радиация, приходящая к границе атмосферы (инсоляция), $Q_0 = 1370 \text{ Дж/м}^2$ – солнечная постоянная, h_0 – высота солнца над горизонтом:

$$\sin h_0 = \sin \varphi \cdot \cos \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos [2\pi \cdot (t_h + 12) / 24],$$

$$\delta = -0,408 \cdot \cos [2\pi \cdot (t_d + 10) / 365],$$

где φ – географическая широта места, δ – угол склонения солнца, t_h – время суток, отсчитываемое от полудня, час, t_d – номер дня по Юлианскому календарю. Первоначально для текущей даты счета

рассчитывается время восхода и захода солнца ($h_0=0$) и определяется длительность светового дня N . Значение высоты солнца h_0 внутри суток рассчитывается с заданным шагом по времени.

Радиационный баланс посева R_{nc} определяется по значению приходящей интегральной радиации Q_c с учетом альbedo α :

$$R_{nc} = Q_c (1 - \alpha). \quad (2)$$

Приходящая к посеvu радиация включает в себя две составляющих – прямую и рассеянную (диффузную) части. При безоблачном небе, когда $n/N \approx 1$, доля диффузной радиации определяется как:

$$D/S = \min\{1, 0,1/\sinh_0\},$$

где S – прямая радиация, D – диффузная. При наличии облачности, т.е. в тех случаях, когда $n/N \leq 0,9$, прямая радиация отсутствует ($S=0$), а вся радиация принимается за диффузную.

Функция ослабления суммарного потока радиации a_Σ при ее проникновении вглубь посева для пшеницы рассчитывается по формуле

$$a_\Sigma(L) = \frac{\theta \cdot \exp\left(\frac{L}{1 \cdot \sin \theta}\right) + a_D(L, h_0)}{1 + \theta} + c_2 \left[\exp(-c_1 c_3 \sinh_0) - \exp\left(-c_1 \frac{L}{\sinh_0}\right) \right], \quad (3)$$

где $c_1=0,5$, $c_2=0,3$, $c_3=0,15$ – эмпирические константы, L – листовой индекс (отсчитывается сверху, начиная с верхней кромки посева). Функция ослабления радиации используется для расчета радиации, поглощенной в некотором слое фитомассы. Так, для яруса листьев между двумя поверхностями с листовыми индексами L' и L'' поглощенная радиация равна:

$$\Delta R_p = Q_c \left[(1 - \alpha) (a_\Sigma(L') - a_\Sigma(L'')) \right]. \quad (4)$$

В соответствии с (4) радиационный баланс на поверхности почвы определяется как

$$\Delta R_s = R_c \left[(1 - \alpha) (1 - a_\Sigma(L)) \right].$$

Переход от суммарной радиации к суммарной ФАР рассчитывается по формуле

$$Q_\Phi = C_Q R_c \quad (5)$$

где C_Q – коэффициент перехода, определяемый соотношением

$$c_Q = \left(c_s \frac{1}{S \cdot D} + c_D \right) \cdot \left(1 + \frac{S}{D} \right)$$

Величина C_S зависит от высоты стояния солнца, а $C_D \approx 0,6$ – принимается константой. Поглощение ФАР рассчитывается по формуле (3) при $c_2=0$.

Для величины длинноволнового радиационного баланса принято соотношение:

$$R_{nl} = \left(0,9 \frac{n}{N} + 0,1 \right) \cdot \left(0,34 - 0,139 \sqrt{e_d} \right) \cdot \sigma \cdot 0,5 (T_{max}^4 + T_{min}^4), \quad (6)$$

где e_d – дефицит влажности воздуха (кПа), T_{max} , T_{min} – максимальная и минимальная температура воздуха (К), $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана.

На основании (2) и (6) результирующий радиационный баланс посева равен:

$$R_{пр} = R_{nc} - R_{nl}.$$

Энергетическая экспозиция солнечного излучения, т.е. значение поступившей солнечной энергии на единицу площади растения в течение светлого периода суток является важнейшей характеристикой, определяющей динамику фотосинтеза.

Таким образом, как следует из выше приведенных соотношений, расчет солнечной радиации основан на уравнение Ангстрема [2], модифицированного Прескоттом (Prescott) [3]. На рис. 2 приведен суточный ход солнечной радиации, рассчитанный по выше приведенным соотношениям с учетом наклона посевного поля.

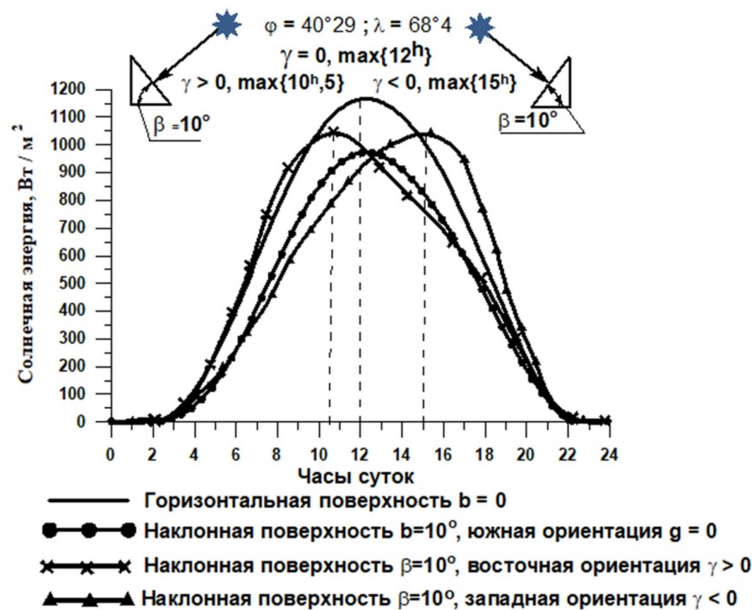


Рис. 2. Суточный ход солнечной радиации, приходящейся в июле месяце на горизонтально- и наклонно расположенные пшеничные поля ($\varphi=40^\circ, 29'$, $\lambda=68^\circ, 4'$) различной ориентации

Модуль турбулентности. Для моделирования переноса всех субстанций в посеве необходимо знать соответствующие аэродинамические и диффузионные сопротивления. Для этого необходимо рассчитать переносы тепла, паров воды и углекислого газа. Поток тепла на своем пути встречает сопротивления:

- от невозмущенного слоя воздуха (на высоте $\approx 3h$, где h – высота посева) до
- верхней кромки посева;
- от межлиственного пространства до поверхности листа.

Для потоков CO_2 и водяного пара существует дополнительное диффузионное сопротивление – устьично-кутикулярное. Два первых сопротивления связаны с турбулентным обменом в атмосфере, а их величины зависят от скорости ветра. Величина последнего сопротивления определяется состоянием растения и, в частности, – водным потенциалом листа.

Потоки тепла P_T , водяного пара E_p от растений к атмосфере, а также поток углекислого газа к посеву Φ_C описываются системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_T &= \frac{\rho_a c_p (T_l - T_a)}{r_{\Sigma}^T}, \\ E_p &= \frac{\rho_a (q_l - q_a)}{r_{\Sigma}^q}, \\ \Phi_C &= \frac{\rho_a (C_a - C_i)}{r_{\Sigma}^C}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где ρ_a – плотность воздуха, $г/см^3$; c_p – теплоемкость воздуха при постоянном давлении, $кал/(см^3 \cdot К)$; T_l , T_a – температура листа и воздуха, $^{\circ}C$ соответственно; q_l , q_a – удельная влажность воздуха в межклеточном пространстве листа и в атмосфере, $г/г$; C_a , C_i – концентрация CO_2 в невозмущенной атмосфере и в межклеточном пространстве, $г/г$.

Сопротивление потоку тепла включает две компоненты: сопротивление слоя воздуха от уровня метеорологической будки (уровня измерения) до верхней кромки посева r_a ($с/м$); сопротивление прилистного (пограничного) слоя $1/D_T$ ($с/м$). Эти величины равны:

$$r_a = 0,74 \ln \frac{(H_r - h_L)}{z_0 u^*}, \quad D_T = \frac{1}{c_u} \sqrt{\frac{u}{L_0}} \quad (8)$$

где H_r – высота метеобудки, h_L – высота посева, d – высота слоя вытеснения, L_0 – эталонная длина листа, u^* – динамическая скорость, K – постоянная Кармана, u – скорость ветра, $c_u = 2,3$ – коэффициент.

Таким образом, обе величины (8), входящие в суммарное сопротивление являются функциями скорости ветра. Сопротивления потоку водяного пара и углекислого газа включают в себя дополнительную составляющую – сопротивление устьично-кутикулярного аппарата r_{st} . Иными словами, в расчет вводятся три сопротивления, а именно:

- переносу тепла
- $$r_{\Sigma}^T = r_a + \frac{1}{D_T}; \quad (9)$$

- влагопереносу
- $$r_{\Sigma}^q = r_a + \frac{1}{D_T} + r_{st}; \quad (10)$$

- потоку углекислого газа

$$r_{\Sigma}^C = r_a + \frac{1,3}{D_T} + 1,6 r_{st}. \quad (11)$$

Расчет величин всех этих сопротивлений требует знания профиля скорости ветра. Последняя величина измеряется на «высоте флюгера» H_F ($H_F \approx 7 \div 10$ м). Принимается, что зависимость скорости ветра от высоты x над посевом подчиняется логарифмическому закону:

$$u(x) = \frac{u^*}{K} \ln \left(\frac{x - d}{z_0} \right),$$

где высота слоя вытеснения d и шероховатость z_0 определяются по высоте растительного покрова h_c по формулам:

$$d = 0,63 h_c, \quad z_0 = 0,2 * h_c.$$

По известной скорости ветра на уровне флюгера u_F и высоте посева, определяется значение динамической скорости u^* :

$$u^* = \frac{K u_F}{\ln \left[\frac{H_F - d}{z_0} \right]}. \quad (12)$$

Далее вычисляются значение скорости ветра на любой высоте и соответствующие сопротивления.

Модуль фотосинтеза и фотодыхания. Скорость фотосинтеза Φ [$мг \cdot CO_2 / м^2 \cdot с$] единичной площадью поверхности листа определяется соотношением:

$$\Phi = \frac{r_x}{C_w} + \frac{1}{\alpha Q_{\Phi}} + \frac{1}{\Phi_{mn}} - R_d, \quad (13)$$

где C_w – концентрация углекислого газа в хлоропластах, $мг/см^3$; r_x – сопротивление карбоксилирования, α – начальный наклон световой кривой фотосинтеза, $мг \cdot CO_2 / Вт \cdot с$, Q_{Φ} – поглощенная единичной поверхностью листа ФАР, $Вт/м^2$, Φ_{mn} – максимальная интенсивность фотосинтеза, $мг \cdot CO_2 / м^2 \cdot с$, R_d – интенсивность фотодыхания.

Концентрация CO_2 в хлоропластах лимитируется диффузионным сопротивлением на пути от невозмущенного потока воздуха (над посевом) до места вступления собственно в реакцию карбоксилирования:

$$\Phi_n = \frac{C_a - C_w}{r_{\Sigma}^C}, \quad (14)$$

где C_a – концентрация CO_2 в атмосфере, r_{Σ}^C – суммарное сопротивление диффузии углекислого газа, $с/см$. Поскольку в реакцию карбоксилирования включается углекислота, находящаяся непосредственно в хлоропластах (в растворе), к суммарному сопротивлению добавляется член, ответственный за скорость растворения сопротивление мезофилла r_m :

$$r_{\Sigma}^C = r_{\Sigma}^C + r_m \quad (15)$$

где $r_m \approx 1$ $с/см$. Скорость фотодыхания отражает интенсивность функционирования фотосинтетического аппарата. Поэтому принято

$$R_d = C^* \cdot \Phi_{mn}, \quad (16)$$

где коэффициент затрат $C^* = 0,1 \div 0,3$.

Выше представленные выражения дают значения всех параметров, необходимых для расчета интенсивности газообмена. Для этого надо использовать (11), (15) и (16), подставив необходимые соотношения в (13) и (14), после чего из двух последних уравнений следует исключить неизвестную величину C_w . Эта процедура приводит к необходимости решения квадратного уравнения, корень которого и определяет искомую скорость

нетто-фотосинтеза (прим. нетто-фотосинтез – разность между количеством углекислоты, ассимилированной листом и выделенной в процессе дыхания).

В модуле фотосинтеза реализован часовой шаг счета (в остальных – суточный). Дополнительно учитывается также величина листового индекса (LAI). В случае, когда листовой индекс не превышает величины 0,5, в модели используется однослойная схема. При величине LAI, находящейся в пределах от 0,5 до 1,0, схема включает в себя два расчетных слоя, а при LAI > 1,0 – три слоя, из которых, два верхних слоя равны 0,5, а последний включает в себя оставшуюся величину. После расчета накопленных ассимилятов за шаг модели они все суммируются по слоям и по времени в течение суток и образуют общий пул ассимилятов, накопленных посевом в целом за «большой», т.е. суточный шаг. Тем самым, при расчете газообмена учитывается влияние на фотосинтез приходящей к посеву радиации, а так же архитектура посева, скорость ветра и потенциал воды в листе, от которого зависит устьичное сопротивление.

Модуль развития. Модуль развития является неперменной составной частью большинства механистических и динамических моделей. Задачей этого модуля является расчет т.н. «биологического времени», т.е. связи скорости развития растения с условиями его вегетации, изменяющимися в обычном календарном (хронологическом) времени. Визуальным проявлением биологического времени является смена фенофаз.

На скорость протекания физиологического времени оказывают существенное влияние погодные условия, варьирующие в ходе вегетации. Основными факторами, влияющими на фенологическое проявление генетически детерминированной скорости развития многих растений, являются длина светового дня (фотопериод), температура воздуха и влагообеспеченность посева. Регулирующая роль этих факторов, несомненно, отражает адаптивные свойства растений по отношению к варьирующим условиям среды и имеет эволюционное происхождение. В разработанной нами модели в качестве регулирующих факторов участвуют температурный и водный режимы. При этом в основу модели положены следующие известные факты: температурный режим – главенствующий в формировании скорости развития. Развитие ускоряется при повышении температуры выше определенного порога – «биологического нуля», но слишком высокие температуры замедляют развитие; водный режим характеризует стресс по влаге – ускоряет развитие от фазы всходов до цветения и замедляет развитие от сева (посадки) до всходов и от цветения до полного созревания [4, 5].

Длительность светового периода является весьма важной для индивидуального развития. В определенных условиях ее влияние оказывается решающей для перехода на генеративный путь развития.

В модели рассматриваются только даты наступления фенофаз. Для этого вводится

обозначение k для номера дня по Юлианскому календарю. Например, $k=1$ соответствует 1 января, $k=365-31$ декабря. Дата 29 февраля в високосные годы опускается. Единицей измерения биологического времени является градусодни. Приращение биологического времени в день k определяется по формуле:

$$\begin{cases} T_{av}(k) - T_0 & \text{при} \\ \Delta\tau_0(k) = & \begin{cases} T_{av}(k) \geq T_0 \\ 0 & \text{при } T_{av}(k) \leq T_0, \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

где $T_{av}(k)$ – среднесуточная температура воздуха в день k , T_0 – биологический нуль. Соотношение (17) описывает только ускорение развития при увеличении температуры воздуха выше порогового значения T_0 . Однако оно не отражает влияния на развитие высоких температур и влажности почвы. Учет этих эффектов определяется соотношениями:

- членом, описывающим уменьшение скорости развития при высоких температурах;
- функцией стресса, отражающей влияния на процесс водного дефицита.

В результате приращение биологического времени в день k определяется по формуле:

$$\Delta\tau(k) = \Delta\tau_0 \left(1 - \frac{\Delta\tau_0}{c_1}\right) \cdot \text{Str}(\Psi_s), \quad (18)$$

где c_1 – некоторая константа, Ψ_s – потенциал почвенной влаги, а функция $\text{Str}(\Psi_s)$ отражает влияние водного дефицита. Поскольку $\Delta\tau(k) > 0$, то когда соотношение (18) дает $\Delta\tau(k) < 0$, то в этом случае в программе выполняется присваивание $\Delta\tau(k) = 0$.

Водный дефицит на разных фазах может приводить либо к ускорению ($\text{Str}(\Psi_s) > 1$), либо к замедлению развития ($\text{Str}(\Psi_s) < 1$). В условиях оптимального увлажнения (т.е. при влажности почвы, вблизи наименьшей влагоемкости) $\text{Str}(\Psi_s) = 1$. Таким образом, функция стресса уменьшается или увеличивается при изменении потенциала почвенной влаги, достигая максимального значения при потенциале почвенной влаги, соответствующем влажности завядания.

Функция $\text{Str}(\Psi_s)$ определяется выражением:

$$\begin{cases} 1 & \text{если } \Psi_s(k) \geq \Psi_{opt} \\ \text{Str}(\Psi_s) = & (19) \\ 1 + (S_0 - 1) \frac{\Psi_s - \Psi_{opt}}{\Psi_w - \Psi_{pot}} & \text{если } \Psi_s(k) \leq \Psi_{opt}, \end{cases}$$

где Ψ_w – потенциал почвенной влаги, соответствующий влажности завядания.

Функция стресса содержит два параметра: ширину комфортной зоны Ψ_{opt} , в пределах которой влияние стресса отсутствует, и предельную величину стресса S_0 . Значение S_0 при этом должно быть больше единицы при ускорении развития, и меньше единицы при замедлении развития.

Величина прироста биологического времени (17) суммируется по дням, так что накопленная к текущим суткам величина рассчитывается как:

$$\tau(k) = \sum_{j=k_0}^k \Delta\tau_j,$$

где k_0 – номер дня сева, k – номер текущего дня. Очередная фаза наступает при достижении величиной $\tau(k)$ некоторого порогового значения $T_{Ph}(I\text{Ph})$, зависящего от порядкового номера фазы $I\text{Ph}$:

$$\tau(k) \geq T_{Ph}(I\text{Ph}). \quad (20)$$

Соотношение (20) означает, что в том случае, когда в ходе вегетации значение $\tau(k)$ впервые достигает или превышает пороговое значение $T_{Ph}(I\text{Ph})$, порядковый номер фазы увеличивается на единицу.

В формулы (18), (19) отражающие влияние условий вегетации на скорость развития, входят переменные T_{av} , Ψ_{opt} и параметры: T_0 , c_1 , S_0 , T_{Ph} , являющиеся функцией номера фазы развития $I\text{Ph}$.

В комплексе предусмотрена кластеризация биологического времени DVS путем присваивания ему нулевого значения в момент всходов, единичного значения при цветении и двойки в момент полного созревания.

Модуль роста. В модуле роста растений находит свое отражение процесс распределения ассимилятов между отдельными органами растения, накопленных за текущие сутки модулем фотосинтеза. Если развитие характеризуется физиологическим возрастом, то рост растения определяется интенсивностью фотосинтеза и ростовыми функциями.

Пусть ΔB означает накопленные за сутки ассимиляты, т.е. разность между фотосинтезом и дыханием. Тогда ростовые функции (distributionkeys) используются для расчета скорости прироста биомассы отдельных органов. Вначале ассимиляты распределяются между надземными органами и корнями:

$$\Delta B_{root} = c_{rs} \cdot \Delta B$$

$$\Delta B_{shoot} = (1 - c_{rs}) \cdot \Delta B$$

где ΔB – прирост сухого вещества посева [$\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$]; ΔB_{root} – прирост сухого вещества корней [$\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$]; ΔB_{shoot} – прирост сухого вещества надземной части посева [$\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$]; c_{rs} – ростовая функция корней.

Величина прироста биомассы других органов, т.е. листьев, стеблей и колоса определяется как доля сухого вещества надземной части, направляемого в этот орган:

$$\Delta B_i = c_i \cdot \Delta B_{shoot} (i=1,2,3)$$

где ΔB_i – прирост сухого вещества органа i [$\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$]; c_i – ростовая функция i -го органа; i ~ листья (l), стебли (s), колос (e).

В детерминированном случае все ростовые коэффициенты являются функциями физиологического времени τ и удовлетворяют условиям нормировки:

$$0 \leq c_{rs}, c_i \leq 1; c_l + c_s + c_e = 1.$$

Очевидно, ростовые коэффициенты являются также и функциями биологического времени DVS . Для их определения вводится первоначально монотонно возрастающая функция, определяемая двумя параметрами: a_1 и a_2 :

$$y(x) = \frac{x}{x + \exp(a_1 - a_2 \cdot x)},$$

где независимая переменная x совпадает с возрастом DVS .

На рис. 3 приведен вид ростовых функций для фиксированных параметров a_1 и a_2 в диапазоне нормированного биологического времени DVS . Первая из них применяется при расчете распределения ассимилятов между надземными органами и корнями, а также между листьями и стеблями. Второй тип функции используется при направлении ассимилятов в генеративные (колос) или запасные органы. Помимо указанных параметров функция роста (возрастающая или убывающая) имеет еще три: x_0 , x_{max} , y_{max} (рис.3).

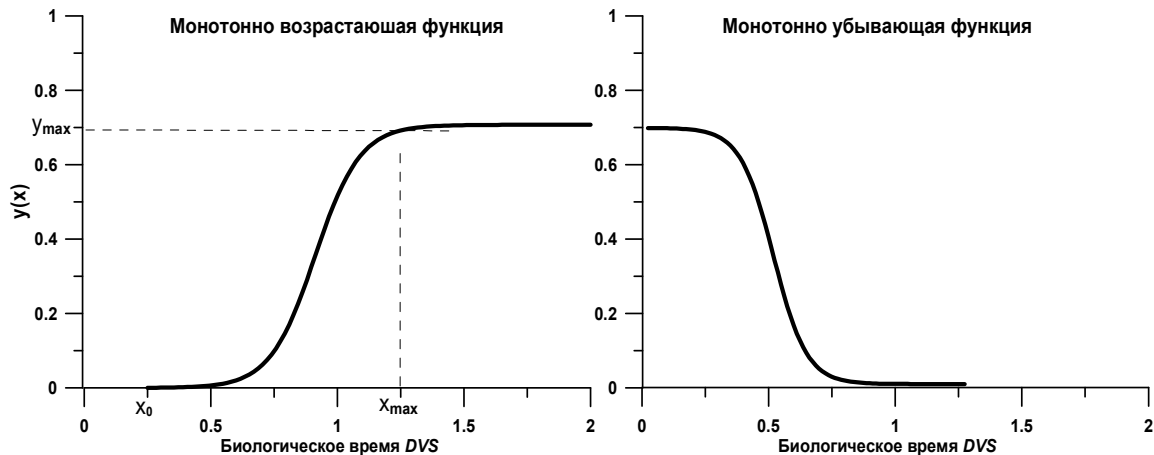


Рис. 3. Вид ростовых функций

Примечание: $0-X_0$ – интервалы постоянства функции; X_0-X_{max} – интервал изменения функции; Y_{max} – максимальное значение функции.

По определению ростовая функция периода вегетативного роста показывает какая доля вновь образованных ассимилятов направляется на рост того либо иного органа в данный момент времени онтогенеза, т.е.

$$\beta_i(\tau) = \frac{\Delta m_i(\tau)}{\Delta M(\tau)}, \quad (21)$$

где Δm_i – сухая масса i -го органа; ΔM – прирост общей сухой массы растения за единицу временного шага. Преобразуем уравнение (21) таким образом, что бы в определении ростовых функций периода вегетативного роста явным образом участвовала переменная времени:

$$\beta_i(\tau) = \frac{\Delta m_i(\tau) / \Delta M(\tau)}{\Delta \tau} = \frac{dm_i}{d\tau} / \frac{dM}{d\tau}. \quad (21a)$$

Ростовая функция периода вегетативного роста является отношением скорости роста органа к скорости роста всего организма растения. Но скорость роста всего организма растения состоит из суммы скоростей роста органов

$$\frac{dM}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{d\tau},$$

где n – число органов растения.

Окончательно, ростовая функция периода вегетативного роста данного органа может быть получена в виде выражения

$$\beta_i(\tau) = \frac{dm_i}{d\tau} / \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{d\tau}. \quad (22)$$

Дифференцируя уравнение логистической кривой роста органов

$$\mu(\tau) = \frac{c}{1 + 10^{a-b\tau}}$$

где a , b и c – параметры уравнения, по переменной времени, получаем устойчивую составляющую скорости роста каждого органа растения, и, используя уравнение (22), получаем ростовые функции периода вегетативного роста.

Общая онтогенетическая временная шкала преобразуется в собственную временную шкалу роста каждого органа в виде линейного преобразования

$$\tau_i = k_i \cdot \tau_{общ} + \tau_i^0, \quad (23)$$

где τ_i – собственная временная ось каждого i -го органа; $\tau_{общ}$ – общая временная ось всего организма; k_i и τ_i^0 – константы, параметры линейного преобразования для каждого i -го органа.

Линейное преобразование (23) позволяет сжимать общую временную ось с коэффициентом сжатия k_i и сдвигать временную ось на величину τ_i^0 . С учетом (23) уравнение устойчивой составляющей вегетативного роста i -го органа запишется в виде

$$\mu_i(\tau_{общ}) = \left[-\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \cdot \tau_i) + \tau_i \right] \cdot c_i, \quad (24)$$

где c_i – доля каждого i -го органа в конечной общей биомассе растения.

Дифференцируя уравнение (24) по переменной времени, получаем устойчивые составляющие скорости роста каждого i -го органа растения

$$\frac{d\mu_i}{d\tau_{общ}} = [-\cos(2\pi \cdot \tau_i) + \tau_i] \cdot c_i. \quad (25)$$

Замыкает систему (24), (25) уравнение

$$\frac{d^2 \mu_i}{d\tau_{общ}^2} = [2\pi \sin(2\pi \cdot \tau_i)] \cdot c_i. \quad (26)$$

Модуль влагопереноса в почве. Моделирования влагопереноса в почве основано на уравнение Ричардса [6], объединяющее в себе уравнение баланса и закон Дарси для скорости движения влаги по почвенному профилю:

$$\frac{\partial(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k^*(P) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} - 1 \right) - f_e(x,t) \quad (27)$$

где t – время; x – пространственная координата по направленной вертикально вниз оси, имеющей начало на границе почва – приземный слой атмосферы; θ – объемная влажность почвы; P – капиллярно-сорбционный потенциал почвенной влаги; $k^*(P)$ – функция влагопроводности (гидравлической проводимости) почвы; $f_e(x,t)$ – функция стока, характеризующая скорость поглощения воды корнями. Уравнение (27) замыкается начальными и граничными условиями:

$$\theta(x,0) = w(x), \quad (28)$$

где функция $w(x)$ (или ее дискретный аналог) должна быть измерена экспериментально или оценена, исходя из тех или иных соображений; граничное условие на поверхности почвы ($x=0$) записывается в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} Pr, \text{ если } Pr > 0 \\ q_x^w(0,t) = q_{up}(t) = -E_s, \text{ если } Pr = 0, \end{array} \right. \quad (29)$$

где Pr – величина атмосферных осадков; E_s – физическое испарение влаги, см/сут; $q(0,t)$ – поток воды на верхней границе расчетного слоя почвы; граничное условие на нижней границе расчетного слоя может иметь разный вид:

а) в случае неглубокого залегания грунтовых вод на этой границе ($x=H_s$) значение капиллярно-сорбционного потенциала задается постоянным

$$P(H_s, t) = -P_H, \quad (30)$$

где значение P_H определяется в зависимости от разности глубин расчетного слоя и залегания грунтовых вод. В частности, когда расположение грунтовых вод совпадает с нижней границей расчетного слоя почвы, $P_H = 0$.

б) при глубоком залегании грунтовых вод ($H_s \geq 5$ м) в модели принят следующий вид граничного условия, отражающий то обстоятельство, что вода из расчетного слоя почвы может стекать, в основном, за счет гравитации:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0_{|x=H_s} \quad (31)$$

Уравнение (27) описывает динамику влажности почвы и потенциала почвенной влаги, между которыми имеется однозначная связь. Эта связь задается т.н. педотрансферными функциями, вид и параметры которых определяются, в основном, гранулометрическим составом почвы. Удовлетворительная точность расчетов может быть получена с использованием трехслойной модели, в которой агрогидрологические характеристики специфичны для каждого расчетного слоя, т.е. в почвенном профиле толщиной 100 см выделены три слоя – $H_1(0 - 20$ см) $H_2(20 - 50$ см) и $H_3(50 - 100$ см). Для каждого из этих слоев определены значения

следующих агрогидрологических характеристик: МГ – максимальная гигроскопичность почвы, ВЗ – влажность устойчивого завядания, НВ – наименьшая влагоемкость почвы, ПВ – полная влагоемкость (влажность насыщения, пористость) почвы. С использованием этих характеристик определяются соответствующие параметры педотрансферных функций, имеющих вид

$$\theta(P) = MГ + \frac{ПВ - MГ}{1 + b(-P)^a}, \quad (32)$$

$$k^w(P) = K_0 \cdot (-P)^c \quad (33)$$

где P – капиллярно-сорбционный потенциал почвенной влаги, см вод.ст.; θ – объемная влажность почвы, см³/см³; K₀ – коэффициент фильтрации, см/сут; a, b и c – эмпирические параметры.

Функция (32) представляет собой соотношение для кривой водоудерживающей способности почвы, а (33) выражает зависимость влагопроводности почвы от капиллярно-сорбционного потенциала почвенной влаги.

Таким образом, расчет влагопереноса в почве, занятой растительным покровом, выполняется в результате совместного решения уравнений динамики почвенной влаги и влагопереноса в растительном покрове.

Модуль эвапотранспирации. В данном модуле реализуется вычисление первоначально потенциальной эвапотранспирации. Рассчитанная потенциальная эвапотранспирация в зависимости от величины листового индекса и величины водного стресса делится на две составляющие. Далее выполняется расчет реальных значений транспирации и испарения из почвы.

Расчет потенциальной эвапотранспирации в модели основан на методе Пенмана-Монтейса [11]. Выполненный нами анализ этапов расчета по этому методу показал, что его использование в задаче моделирования не является оптимальным с точки зрения количества процедур, задействованных в вычислительном процессе для непосредственной оценки реальных значений транспирации и физического испарения. Оказалось возможным модернизировать метод Пенмана-Монтейса и перейти к расчету реальных значений транспирации растений и физического испарения непосредственно, минуя промежуточные стадии. В результате суточные суммы транспирации культуры вычисляются согласно соотношению:

$$E_p = k_w \frac{R_n}{\chi} + (1 - k_w) E_p^0, \quad (34)$$

где χ – теплота парообразования; R_n – поглощенная посевом за сутки коротковолновая радиация (раздел 1.2); E_p⁰ – величина, имеющая размерность транспирации, мм/сут, где

$$E_p^0 = 86400 \rho_a \frac{q_{sat}(T_a) - q_a}{r_s^q}, \quad (35)$$

$$k_w = \left[1 + \frac{c_p}{b\chi} \cdot \frac{r_s^q}{r_s^q} \right]^{-1}. \quad (36)$$

В (34) – (36) ρ_a – плотность воздуха; c_p – теплоемкость воздуха при постоянном давлении; q_a и q_{sat}(T_a) – удельная влажность воздуха и удельная влажность насыщения при данной температуре воздуха; b – коэффициент линеаризации в формуле

Магнуса прим. Эмпирическая формула для зависимости упругости насыщения водяного пара от температуры

$$E = E_0 \cdot 10^{\frac{7.45t}{235+t}};$$

r_Σ^T и r_Σ^q – зависящие от скорости ветра и сопротивления переносу тепла и водяного пара, рассчитываемые в соответствии с формулами (9) и (10).

В соответствии с формулой (34) суточная сумма транспирации зависит от погодных условий текущего дня и величины устьичного сопротивления r_{st}, входящего в качестве слагаемого в выражение для r_Σ^q:

$$r_{\Sigma}^q = r_{\Sigma}^T + r_{st}$$

и является (устьичное сопротивление) функцией потенциала воды P_L в листе:

$$r_{st} = r_{st}(P_L). \quad (37)$$

Величина транспирации посева может быть вычислена как функция погодных условий и P_L:

$$E_p = f(R_n, T_a, q_a, u, P_L). \quad (38)$$

Представленная выше система уравнений позволяет вычислить поток транспирации, если известны все входящие в правую часть аргументы. К ним, кроме погодных условий, относится величина потенциала воды в листе. Однако эта величина остается неизвестной. Для исключения этой переменной поступим следующим образом. Запишем уравнение для суммарного за сутки поглощения воды корневой системой растений E_r

$$E_r = \sum_{i=1}^{NR} \xi w_i (p_{si} - P_R),$$

где NR – количество выделенных слоев почвы; w_i – удельная поверхность корней; ξ^o – проводимость корневой системы; p_{si} и P_R – значения потенциала влаги i-го слоя почвы и корня, соответственно. Полагая, что значения потенциала почвенной влаги известны (в модели эти величины берутся с предыдущего временного шага), исключим неизвестные величины P_L и P_R, пользуясь балансовым соотношением E_p ≈ E_r и принимая, что значения потенциала влаги в почве и корне также приблизительно равны: P_L ≈ P_R. Полученная система линейных уравнений решается с применением простого итерационного метода.

Соотношение для расчета испарения с поверхности почвы под растительным покровом имеет вид:

$$E_s = \frac{R_s}{\chi} \cdot \frac{g(\omega_0)}{1 + g(\omega_0)} + \frac{1}{1 + g(\omega_0)} E_s^0, \quad (39)$$

где E_s – физическое испарение, мм/сут; R_s – радиационный баланс на поверхности почвы; величина E_s⁰ и функция g(ω₀) определяются соотношениями:

$$E_s^0 = \rho_a D_s^q [q_{sat}(T_a) f(\omega_0) - q_a], \quad (40)$$

$$g(\omega_0) = \frac{b\chi f(\omega_0) D_s^q}{c_p D_s^T}, \quad (41)$$

где D_s^T и D_s^q – значения проводимости приземного слоя воздуха по теплу и влаге. Функция f(ω₀) отражает снижение влажности приземного воздуха при уменьшении влажности верхнего слоя почвы ω₀. Она аппроксимирована выражением:

$$f = \frac{\ln p_{s_0}}{\ln p_{s_0} + \exp(a - b \ln p_{s_0})}, \quad (42)$$

где p_{s_0} – потенциал почвенной влаги в верхнем слое почвы.

3. Численный метод интегрирования уравнений динамики почвенной влаги

Вертикальный перенос влаги в почвенной толще с учетом корневого поглощения описывается уравнением (27) с начальным условием (28) и граничными условиями (29)-(31). Соотношение (27) является нелинейным уравнением в частных производных параболического типа. Две входящие в него величины – потенциал почвенной влаги P и влажность почвы q – связаны между собой однозначной зависимостью (32), а входящая в уравнение функция влагопроводности зависит от потенциала почвенной влаги (33). Для окончательной записи уравнения влагопереноса необходимо исключить из (27) одну из двух переменных – P или q . Такой «лишней» переменной является именно q , поскольку влагоперенос осуществляется под действием градиента потенциала почвенной влаги. Кроме того, распределение величины потенциала почвенной влаги (в отличие от величины влажности почвы) по глубине расчетного слоя всегда описывается непрерывной кривой [7]. Воспользовавшись уравнением (32), перепишем (27) в виде

$$\mu(P) \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k^\omega(P) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} - 1 \right) - f_e(x, t), \quad (43)$$

где $\mu(P) = \frac{d\theta(P)}{dP}$ – дифференциальная влагоемкость почвы. Уравнения, подобные (43) решаются численными методами, поскольку аналитических методов их решения нет, т.е. интегрирование

выполняется методом конечных разностей. Для этого необходимо перейти к дискретному аналогу уравнения с заданным шагом дискретизации по времени и по вертикальной координате. Учитывая прикладную направленность модели, при ее адаптации к климатическим условиям Узбекистана, шаг по координате h выбран постоянным и равным 10 см. Выбор шага согласован с экспериментальным сопровождением модели: все измерения влажности почвы проводятся, как правило, по слоям 0-10, 10-20, ..., 90-100 см.

Численные эксперименты моделирования, выполненные для условий Узбекистана, показали, что такой выбор обеспечивает удовлетворительную точность расчетов.

Величина шага по времени t для обеспечения устойчивости численной схемы должна быть, как известно [8], согласована с пространственным шагом. Применение явной разностной схемы требует достаточно малого шага по времени. Поэтому для дискретизации уравнения (27) использована неявная разностная схема Кранка–Николсона [9], обеспечивающая второй порядок точности по пространственной переменной.

Для построения дискретного аналога уравнений, описывающих динамику почвенной влаги, разобьем рассматриваемую почвенную толщу на N_s слоев толщиной h . Узлы полученной таким образом пространственной решетки поместим на границах этих слоев. Следовательно, таких узлов будет $N_s + 1$. Аналогично разобьем и расчетный временной интервал на N_t шагов по времени длительностью t . Конечный момент времени этого интервала t_1 будет иметь номер $N_t + 1$. Дискретный аналог уравнения (43) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{h \mu_1^{j+1/2}}{t} (P_{i+1}^j - P_i^j) &= \frac{k^{j+1/2}}{2h} (P_{i+1}^{j+1} - P_i^{j+1} - h) - \frac{k^{j+1/2}}{2h} (P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1} - h) - \\ &- h(f_e^w)_i^{j+1/2} + \frac{k^{j+1/2}}{2h} (P_{i+1}^j - P_i^j - h) - \frac{k^{j+1/2}}{2h} (P_i^j - P_{i-1}^j - h), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_i^{j+1/2} &= \mu^w(P_i^{j+1/2}), \quad k_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{k^w(P_{i+1/2}^{j+1/2})}{\rho^w}, \quad k_{i-1/2}^{j+1/2} = \frac{k^w(P_{i-1/2}^{j+1/2})}{\rho^w}; \\ (f_e^w)_i^{j+1/2} &= \frac{(f_e^w)_i^{j+1} + (f_e^w)_i^j}{2\rho^w}, \quad P_i^{j+1/2} = \frac{1}{2}(P_i^{j+1} + P_i^j); \\ P_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{1}{4}(P_{i+1}^{j+1} + P_i^{j+1} + P_{i+1}^j + P_i^j), \quad P_{i-1/2}^{j+1/2} = \frac{1}{4}(P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1} + P_i^j + P_{i-1}^j), \end{aligned}$$

$$\text{где } P_i^j = P(x_i, t^j),$$

$$\frac{h\mu_i^{j+1/2}}{\tau}(P_i^{j+1} - P_i^j) = \frac{k^{j+1/2}}{2h}(P_{i+1}^{j+1} - P_i^{j+1} - h) - \frac{k^{j+1/2}}{2h}(P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1} - h) - h(f_e^\omega)_i^{j+1/2} +$$

$$+ \frac{k^{j+1/2}}{2h}(P_{i+1}^j - P_i^j - h) - \frac{k^{j+1/2}}{2h}(P_i^j - P_{i-1}^j - h),$$

где $\mu_i^{j+1/2} = \mu^w(P_i^{j+1/2})$, $k_{i+1/2}^{j+1/2} = k^w(P_{i+1/2}^{j+1/2})/\rho^w$, $k_{i-1/2}^{j+1/2} = k^w(P_{i-1/2}^{j+1/2})/\rho^w$:

$$(f_e^\omega)_i^{j+1/2} = \left((f_e^\omega)_i^{j+1} + (f_e^\omega)_i^j \right) / (2\rho^w), P_i^{j+1/2} = (P_i^{j+1} + P_i^j) / 2;$$

$$P_{i+1/2}^{j+1/2} = (P_{i+1}^{j+1} + P_i^{j+1} + P_{i+1}^j + P_i^j) / 4, P_{i-1/2}^{j+1/2} = (P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1} + P_i^j + P_{i-1}^j) / 4;$$

$$\frac{h\mu_i^{j+1/2}}{\tau}(P_i^{j+1} - P_i^j) = \frac{k_{i+1/2}^{j+1/2}}{2h}(P_{i+1}^{j+1} - P_i^{j+1} - h) - \frac{k_{i-1/2}^{j+1/2}}{2h}(P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1} - h) - h(f_e^\omega)_i^{j+1/2} +$$

$$+ \frac{k_{i+1/2}^{j+1/2}}{2h}(P_{i+1}^j - P_i^j - h) - \frac{k_{i-1/2}^{j+1/2}}{2h}(P_i^j - P_{i-1}^j - h),$$

где $\mu_i^{j+1/2} = \mu^w(P_i^{j+1/2})$, $k_{i+1/2}^{j+1/2} = k^w(P_{i+1/2}^{j+1/2})/\rho^w$, $k_{i-1/2}^{j+1/2} = k^w(P_{i-1/2}^{j+1/2})/\rho^w$:

$$(f_e^\omega)_i^{j+1/2} = \left((f_e^\omega)_i^{j+1} + (f_e^\omega)_i^j \right) / (2\rho^w), P_i^{j+1/2} = (P_i^{j+1} + P_i^j) / 2;$$

$$P_{i+1/2}^{j+1/2} = (P_{i+1}^{j+1} + P_i^{j+1} + P_{i+1}^j + P_i^j) / 4, P_{i-1/2}^{j+1/2} = (P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1} + P_i^j + P_{i-1}^j) / 4;$$

x_i – пространственная координата i -го узла; t^j – j -й момент времени; $i = 2, 3, \dots, N_S$; $j = 1, 2, \dots, N_T$.

Введем обозначения:

$$a_i = \frac{k_{i-1/2}^{j+1/2}}{2h}, a_{i+1} = \frac{k_{i+1/2}^{j+1/2}}{2h}, d_i = \frac{h\mu_i^{j+1/2}}{\tau},$$

$$f_i = d_i P_i^j - h(f_e^w)^{j+1/2} + a_{i+1}(P_{i+1}^j - P_i^j) - a_i(P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1} - 2h).$$

С учетом этих обозначений перепишем разностное уравнение (44) в виде

$$d_i P_i^{j+1} = a_{i+1}(P_{i+1}^j - P_i^j) - a_i(P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1}) + f_i, \quad (45)$$

где $i = 2, 3, \dots, N_S$, $j = 1, 2, \dots, N_T$.

Уравнение (45) преобразуем к виду:

$$-f_i = w_i - w_{i+1} - d_i P_i^{j+1}, \quad (46)$$

$$w_i = a_i(P_{i-1}^{j+1} - P_i^{j+1}), w_{i+1} = a_{i+1}(P_i^{j+1} - P_{i+1}^{j+1}), i = 2, 3, \dots, N_S, j = 1, 2, \dots, N_T.$$

Дискретное значение вертикальной скорости изотермического переноса почвенной влаги $q_i^{j+1/2}$ связано с w_i соотношением

$$q_i^{j+1/2} = \frac{(q_x^w)_i^{j+1/2}}{\rho^w} = -\frac{k^{j+1/2}}{2h} (P_i^{j+1} + P_i^j - P_{i-1}^{j+1} - P_{i-1}^j - 2h) =$$

$$= a_i(P_{i-1}^{j+1} - P_i^{j+1}) + a_i(P_{i-1}^j - P_i^j + 2h). \quad (47)$$

Граничные условия. Дискретный аналог уравнения, описывающего стационарный поток почвенной влаги (31) на нижней границе расчетной почвенной толщи, имеет вид

$$P_{N_S+1}^{j+1/2} = P_{N_S}^{j+1/2}, j = 1, 2, \dots, N_T.$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$P_{N_S+1}^{j+1} + P_{N_S+1}^j = P_{N_S}^{j+1} + P_{N_S}^j$$

и из последнего уравнения получим

$$P_{N_S+1}^{j+1} = \chi_2 P_{N_S}^{j+1} + v_2, \quad (48)$$

где $\chi_2 = 1$, $v_2 = P_{N_S}^j - P_{N_S+1}^j$, $j = 1, 2, \dots, N_T$.

Дискретный аналог уравнения, описывающего поток почвенной влаги на верхней границе с учетом

деятельности корневой системы растений выражается соотношением

$$\frac{\mu_i^{j+1/2}}{\tau}(P_1^{j+1} - P_1^j) = \frac{k_2^{j+1/2}}{h} \left(\frac{P_3^{j+1} - P_1^{j+1}}{4h} + \frac{P_3^j - P_1^j}{4h} - 1 \right) +$$

$$\frac{(q_{up})^{j+1/2}}{h} - (f_e^w)_1^{j+1/2}, \quad (49)$$

где $(q_{up})^{j+1/2}$ – скорость влагопереноса на границе почва – приповерхностный слой воздуха, $j = 1, 2, \dots, N_T$.

Величина $(q_{up})^{j+1/2}$ определяется как разность между интенсивностью атмосферных осадков и физическим испарением влаги с поверхности почвы. Способ расчета физического испарения с поверхности почвы представлен выше.

Перепишем соотношение (49) как:

$$P_1^{j+1} \left(1 + \frac{\tau k_2^{j+1/2}}{4h^2 \mu_1^{j+1/2}} \right) = P_1^j \left(1 - \frac{\tau k_2^{j+1/2}}{4h^2 \mu_1^{j+1/2}} \right) + \frac{\tau k_2^{j+1/2}}{4h^2 \mu_1^{j+1/2}} (P_3^{j+1} + P_3^j - 4h) + \frac{(q_{up})^{j+1/2}}{h \mu_1^{j+1/2}} - \frac{\tau (f_e^w)_1^{j+1/2}}{\mu_1^{j+1/2}}.$$

Далее приведем его к виду

$$P_1^{j+1} = \chi_1 P_2^{j+1} + v_1, \tag{49a}$$

где $\chi_1 = 0$; $v_1 = (q^* + r^*) / p^*$, $p^* = 1 + \frac{\tau k_2^{j+1/2}}{4h^2 \mu_1^{j+1/2}}$, $q^* = P_1^j \left(1 - \frac{\tau k_2^{j+1/2}}{4h^2 \mu_1^{j+1/2}} \right)$,

$$r^* = \frac{\tau k_2^{j+1/2}}{4h^2 \mu_1^{j+1/2}} (P_3^{j+1} + P_3^j - 4h) + \frac{\tau (q_{up})^{j+1/2}}{h \mu_1^{j+1/2}} - \frac{\tau (f_e^w)_1^{j+1/2}}{\mu_1^{j+1/2}}, j=1,2,\dots, N_T.$$

Алгоритм решения разностной краевой задачи, формулируемой уравнениями (47) – (49), основан на методе потоковой прогонки с итерациями [10]. Согласно этому методу выполняется следующая последовательность вычислений.

I. Рассчитываются: $\alpha_2 = a_2(1 - \chi_1)$, $\chi_2 = a_2 v_1$.

II. Для $i = 2, 3, \dots, N_S$ последовательно вычисляются:

$$(\alpha_i + d) \times \left(1 + \frac{\alpha_i + d_i}{a_{i+1}} \right)^{-1}, a_{i+1} \geq 1$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{a_{i+1}(\alpha_i + d_i)}{a_{i+1} + (\alpha_i + d_i)}, a_{i+1} < 1;$$

$$(y_i + f_i) \times \left(1 + \frac{\alpha_i + d_i}{a_{i+1}} \right)^{-1}, a_{i+1} \geq 1$$

$$y_{i+1} = \frac{a_{i+1}(y_i + f_i)}{a_{i+1} + (\alpha_i + d_i)}, a_{i+1} < 1.$$

III. Определяются искомые значения:

$$\left(v_2 + y_{N_S+1} \frac{\chi_2}{a_{N_S+1}} \right) \times \left(1 - \chi_2 + \chi_2 \frac{\alpha_{N_S+1}}{a_{N_S+1}} \right)^{-1}, a_{N_S+1}$$

$$\geq 1$$

$$P_{N_S+1}^{j+1} = \frac{a_{N_S+1} v_2 + y_{N_S+1} \chi_2}{a_{N_S+1} (1 - \chi_2) + \chi_2 \frac{\alpha_{N_S+1}}{a_{N_S+1}}}, a_{N_S+1} < 1$$

$$(y_{N_S+1} (1 - \chi_2) - \alpha_{N_S+1} v_2) \times \left(1 - \chi_2 + \chi_2 \frac{\alpha_{N_S+1}}{a_{N_S+1}} \right)^{-1}, a_{N_S+1} \geq 1$$

$$w_{N_S+1} = \frac{y_{N_S+1} (1 - \chi_2) a_{N_S+1} - \alpha_{N_S+1} v_2 a_{N_S+1}}{a_{N_S+1} (1 - \chi_2) + \chi_2 \alpha_{N_S+1}}, a_{N_S+1} < 1$$

IV. Для $i = N_S, N_S - 1, \dots, 2$ вычисляются

$$\left\{ \begin{aligned} w_i &= \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} w_{i+1} + \frac{d_i y_i - \alpha_i f_i}{\alpha_i + d_i}; \\ \left(1 - \frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1}} \right) P_{i+1}^{j+1} + \frac{y_{i+1}}{a_{i+1}}, a_{i+1} &\geq 1 \\ P_i^{j+1} &= \\ \frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i} P_{i+1}^{j+1} + \frac{y_{i+1} + f_i}{a_{i+1} \alpha_i + d_i} &a_{i+1} < 1, j = 1, 2, \dots, N_T. \end{aligned} \right.$$

Итерационный процесс решения краевой задачи, формулируемой уравнениями (47), (48) и (49a), выполняется согласно следующим шагам:

– на первом итерационном шаге коэффициенты этих уравнений вычисляются по значениям вектора начального состояния;

– на последующих шагах используются полу суммы соответствующих значений векторов состояния последнего и предпоследнего итерационных шагов.

Критерием сходимости процесса является уменьшение суммы квадратов разностей соответствующих значений векторов состояния последней и предпоследней итераций. Критерием окончания итерационного процесса является достижение этой суммой заданного малого значения δ_{it} .

4. Заключение

Представленная в данной статье модель биопродуктивности была апробирована на примере озимой пшеницы для условий Сырдарьинской области Узбекистана. Отсутствие систематических данных наблюдений (измерений) состояния посева с момента всходов до полного созревания значительно усложнило задачу корректной оценки результатов моделирования динамики биопродуктивности пшеницы. Поэтому оценка выполнялась с использованием данных дистанционного зондирования, на основании которых был рассчитан индекс листовой поверхности LAI на всех этапах вегетативного периода. Поскольку индекс LAI рассчитывается и в модели, оказалось возможным получить их невязки. В целом модель достаточно точно воспроизводит динамику развития пшеницы на всех фазах вегетативного периода.

Литература

[1] Балабанов В.И., Железова, С.В., Березовский и др. Навигационные системы в сельском хозяйстве. Координатное земледелие. / под общ. ред. проф. В.И. Балабанова. – М.: РГАУ–МСХА им. К.А. Тимирязева, 2013. – 143 с.

[2] Angström A. Solar and terrestrial radiation // Quart. J. Roy. Met.Soc. 50, 1924. – P. 121-125.

[3] Prescott J.A. Evaporation from a water surface in relation to solar radiation // Tran. R. Soc. S., 1940. – P. 114-118.

[4] Агрогидрологические свойства почв: справочник. – Л.: Гидрометеиздат. – 1979. – 109 с.

-
- [5] *Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Тонаж А.Г.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. – СПб. – 2006. – 199 с.
- [6] *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through porous media // *Physics*, № 1. – 1931. – P. 95-112.
- [7] *Полуэктов Р.А.* Динамические модели агроэкосистемы. – Л.: Гидрометеоздат, 1991. – 312 с.
- [8] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
- [9] *Демьянов А.Ю., Чижиков Д.В.* Неявная гибридная монотонная разностная схема второго порядка точности// *Электронный журнал «Исследовано в России»*, 2003. – С. 2484-2487.
- [10] *Самарский А.А.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука –1978. – 298с.
- [11] *Hanks J., Ritchie J.T.* Modelling plant and soil Systems. Agronomy (A Series of Monographs). – Madison, Wisconsin USA: SSSAI Publishers. – 1991, 544pp.