УДК 517.5

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,\mu}(R^2)$ И НЕКОТОРОЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Шабозов М.Ш., Джурахонов О.А.
shabozov@mail.ru; olim1974@mail.ru
Таджикский национальный университет,
734025, Таджикистан, Душанбе, пр.Рудаки, 17

В работе вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных обобщенными полиномами Фурье-Эрмита на классе функций $L^{(r)}_{2,\mu}(\mathcal{D})$ в пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$, где $\mathcal{D}$ – оператор Чебышева-Эрмита второго порядка. Получены точные неравенства, в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху посредством усредненных с весом значений обобщенных модулей непрерывности m-го порядка производной $\mathcal{D}^r f (r \in \mathbb{Z}_+)$ в метрике пространства $L_{2,\mu}(R^2)$.

Ключевые слова: среднеквадратичное приближение, обобщенный модуль непрерывности, двойной ряд Фурье-Эрмита, неравенство типа Колмогорова, оператор сдвига.

Цитирование: *Шабозов М.Ш., Джурахонов О.А.* Точные неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$ и некоторое их применение // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 2(20). — С. 79–87.

Пусть $L_2(R^2), R^2 := R \otimes R = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f(x, y)$ на всей плоскости R^2, а $L_{2,\mu}(R^2)$, где $\mu(x, y) = \exp\{-(x^2 + y^2)\}$, множество функций f, для которых $\mu^{1/2} f \in L_2(R^2)$. Вводя скалярное произведение по формуле

$$(f, g)_\mu := \iint_{(R^2)} \mu(x, y)f(x, y)g(x, y)dxdy,$$

определим норму функций в $L_{2,\mu}(R^2)$ равенством

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}} = \sqrt{(f, f,)_\mu} = \left\{\iint_{(R^2)} \mu(x, y)f^2(x, y)dxdy\right\}^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига [1]

$$F_h(f) := F_h f(x, y) = \frac{1}{\pi}\iint_{(R^2)} f\left(x\sqrt{1-h^2} + hu, y\sqrt{1-h^2} + h\vartheta\right)\mu(\upsilon, \vartheta)d\upsilon d\vartheta,$$

где $0 < h \leqslant 1$. Определим конечные разности первого и высших порядков функций $f \in L_{2,\mu}(R^2)$, пользуясь определением оператора $F_h(f)$:

$$\Delta^1_h(f) := \Delta^1_h(f; x, y) = F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E)f(x, y),$$

$$\Delta^k_h(f) := \Delta^1_h\big(\Delta^{k-1}_h(f); x, y\big) = (F_h - E)^k f(x, y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x,y). \qquad (1)$$

Здесь E - единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$;

$$F_h^0(f) = f; F_h^1(f) := F_h(f);\ F_h^i(f) := F_h\big(F_h^{i-1}(f)\big),\ i = \overline{1,k};\ k \in N.$$

Величину

$$\Omega_k(f,t) := \sup\{\|\Delta_h^k(f)\|_{2,\mu} : 0 < h \leqslant t\}, \qquad (2)$$

где $0 < t \leqslant 1$, будем называть обобщенным модулем k-го порядка функции $f \in L_{2,\mu}(R^2)$. Пусть $\{H_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ – ортонормированная система полиномов Эрмита (см., например, [2]) и

$$f(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) H_p(x) H_q(y) \qquad (3)$$

– двойной ряд Фурье-Эрмита функций $f \in L_{2,\mu}(R^2)$. Отметим, что в (3) равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\mu}(R^2)$,

$$c_{pq}(f) := \iint_{(R^2)} \mu(x,y) f(x,y) H_p(x) H_q(y) dxdy$$

– коэффициенты Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\mu}(R^2)$.

В [1] доказано, что для $f \in L_{2,\mu}(R^2)$, имеющих разложение (3), оператор $F_h(f)$ представим в виде двойного ряда

$$F_h f(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) \big(1-h^2\big)^{(p+q)/2} H_p(x) H_q(y), \qquad (4)$$

где равенства понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(R^2)$. Из (3) и (4) следует, что

$$\Delta_h^1(f;x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) \left((1-h^2)^{(p+q)/2} - 1\right) H_p(x) H_q(y). \qquad (5)$$

Применяя последовательно формулу (5) для любого $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\Delta_h^k(f;x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left((1-h^2)^{(p+q)/2} - 1\right)^k H_p(x) H_q(y), \qquad (6)$$

где равенство в формуле (6) также понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\mu}(R^2)$. Учитывая (6), приходим к явному выражению для специального модуля непрерывности k-го порядка (2)

$$\Omega_k^2(f;t)_{2,\mu} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(1 - (1-t^2)^{(p+q)/2}\right)^{2k} c_{pq}^2(f). \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение оператор второго порядка Чебышева-Эрмита [1]:

$$\mathcal{D} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим через $L^{(r)}_{2,\mu}(R^2),\ r\in\mathbb{N}$ – класс функций $f\in L_{2,\mu}(R^2)$, имеющих обобщенные частные производные

$$\partial^m f/\partial x^k\partial y^l,\ k+l=m: m=1,\cdots,2r,$$

принадлежащие пространству $L_{2,\mu}(R^2)$. При этом далее полагаем

$$\mathcal{D}^0 f:=f,\ \mathcal{D}^r f:=\mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)\in L_{2,\mu}(R^2).$$

В [1] доказано, что если $f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)$, то для его коэффициентов Фурье-Эрмита справедлива формула

$$c_{pq}(f):=(-1)^r\frac{1}{2^r(p+q)^r}c_{pq}(\mathcal{D}^r f),\ p,q\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

пользуясь которой из равенства (7) имеем:

$$\Omega_k^2(\mathcal{D}^r(f);t)_{2,\mu}:=2^{2r}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\big(1-(1-t^2)\big)^{(p+q)/2}\big)^{2k}(p+q)^{2r}c^2_{pq}(f). \tag{9}$$

Следуя [2], через $L_{2,\tilde{\mu}(x)}(R)$, обозначим множество измеримых функций f таких, что функции $\tilde{\mu}^{1/2}f$ интегрируемы с квадратом на всей действительной оси R. Пусть $L_{2,\tilde{\mu}(x)}(R)$ есть пространство $L_{2,\tilde{\mu}}(R)$, в случае когда в качества R выступает ось абсцисс OX. Аналогично, $L_{2,\tilde{\mu}(y)}(R)$ есть пространство $L_{2,\tilde{\mu}}(R)$, когда в качестве R выступает ось ордината OY. Полагаем, что $\mathfrak{M}_{n+1}\subset L_{2,\tilde{\mu}(x)}(R)$ и $\mathfrak{N}_{m+1}\subset L_{2,\mu(\tilde{y})}(R)$ есть конечномерные подпространства с соответствующими базисами $\{H_p(x)\}_{p=0}^n$ и $\{H_q(y)\}_{q=0}^m$. В пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$ рассмотрим множество функций

$$G\left(\mathfrak{M}_{n+1},\mathfrak{N}_{m+1}\right):=L_{2,\tilde{\mu}(y)}(R)\otimes\mathfrak{M}_{n+1}\oplus L_{2,\tilde{\mu}(x)}(R)\otimes\mathfrak{N}_{m+1}, \tag{10}$$

где символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (10) имеют вид

$$g_{n,m}(x,y):=\sum_{p=0}^{n}\varphi_p(y)H_p(x)+\sum_{q=0}^{m}\psi_q(x)H_q(y), \tag{11}$$

где $\{\varphi_p\}_{p=0}^n\subset L_{2,\tilde{\mu}(y)}(R)$ и $\{\psi_q\}_{q=0}^m\subset L_{2,\tilde{\mu}(y)}(R)$ есть произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (11) называют "углами" или квазиполиномами [3–5]. Для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}(R^2)$ равенством

$$\mathcal{E}_{n,m}(f)_{2,\mu}:=\inf\{\|f-q_{n,m}\|_{2,\mu}: q_{n,m}\in G(\mathfrak{M}_{n+1},\mathfrak{N}_{m+1})\}$$

обозначим ее наилучшее приближение элементами множества (10) в метрике пространства $L_{2,\mu}(R^2)$. Функцию

$$\sigma_{n,m}(f;x,y)=\sum_{p=o}^{n}\sum_{q=0}^{\infty}c_{pq}(f)H_p(x)H_q(y)+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{m}c_{pq}(f)H_p(x)H_q(y)-\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}c_{pq}(f)H_p(x)H_q(y) \tag{12}$$

называют обобщенным полиномом Фурье-Эрмита функций $f \in L_{2,\mu}(R^2)$ порядка n по x и порядка m по y .

В [5] доказано, что среди всех элементов $g_{n-1,m-1}$ вида (10), принадлежащих множеству $G(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_m)$, наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}(R^2)$ доставляет ее обобщенный полином Фурье-Эрмита $\sigma_{n-1,m-1}(f)$ порядка $n-1$ по x и $m-1$ по y . При этом

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} := \|f - \sigma_{n-1,m-1}(f)\| = \left\{\sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

Заменяя в (13) функцию f на $\mathcal{D}^r f$ и пользуясь формулой (8), получаем равенство

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(\mathcal{D}^r f) = \sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(\mathcal{D}^r f) = 2^{2r}\sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty}(p+q)^{2r} c_{pq}^2(f). \tag{14}$$

Условимся, далее при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)$ предполагается, что $f \neq const$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} = \frac{1}{2^r(n+m)^r},\ \ n,m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Доказательство. В самом деле, учитывая равенство (14), из (13) получаем

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(f)_{2,\mu} = \sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f) = \sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty}(p+q)^{-2r}\cdot(p+q)^{2r}c_{pq}^2(f) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-2r}(n+m)^{-2r}\cdot 2^{2r}\sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty}(p+q)^{2r}c_{pq}^2(f) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-2r}(n+m)^{-2r}\mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(\mathcal{D}^{(r)}f)_{2,\mu}, \tag{16}$$

откуда следует, что

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} \leqslant \frac{1}{2^r(n+m)^r} \tag{17}$$

и таким образом оценка сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (15), получена. С целью получения оценки снизу той же экстремальной характеристики, рассмотрим функцию $f_0(x,y) := H_n(x)H_m(y)$, которая очевидно принадлежит классу $L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)$. В силу (13) имеем $c_{n,m}(f_0) \equiv 1$, а потому

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_0)_{2,\mu} = \|f_0\|_{2,\mu} = 1, \tag{18}$$

и так как $\mathcal{D}^r f_0 = (-1)^r 2^r (n+m)^r c_{n,m}(f_0) = (-1)^r 2^r (n+m)^r$, то

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f_0) = 2^r(n+m)^r. \tag{19}$$

Пользуясь теперь соотношениями (18) и (19), получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} \geqslant \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_0)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu}} = \frac{1}{2^r(n+m)^r}. \tag{20}$$

Сопоставляя оценку сверху (17) с оценкой снизу (20), получаем требуемое равенство (15). Теорема 1 доказана.

В следующей теореме получено неравенство типа Колмогорова для промежуточных последовательностей операторов $\mathcal{D}^s f$ $(1 \leqslant s \leqslant r-1,\ s,r\in\mathbb{N})$.

Теорема 2. *Пусть $r,s\in\mathbb{N}, 1\leqslant s\leqslant r$. Тогда для произвольной $f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)$ имеет место следующее неравенство типа Колмогорова*

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu} \leqslant \|f\|_{2,\mu}^{1-\frac{s}{r}}\cdot\|\mathcal{D}^s f\|^{\frac{s}{r}}. \tag{21}$$

Неравенство (21) точное в том смысле, что существует функция $f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Пусть $s\in[1,r]$ и $f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)$. Применяя оператор $\mathcal{D}^s$ к равенству (3) и пользуясь формулой (8), запишем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^s f(x,y) &= \textstyle\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty c_{pq}(\mathcal{D}^s f)H_p(x)H_q(y) = \\ &= (-1)^s 2^s \textstyle\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty (p+q)^s c_{pq}(f)H_p(x)H_q(y).\end{aligned} \tag{22}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (22), будем иметь

$$\|\mathcal{D}^s f\|^2_{2,\mu} = 2^{2s}\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty (p+q)^{2s}c^2_{pq}(f).$$

Полученное равенство перепишем в следующем виде

$$\|\mathcal{D}^s f\|^2_{2,\mu} = \sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty (c^2_{pq}(f))^{1-s/r}\cdot(2^{2r}(p+q)^{2r}c^2_{pq}(f))^{s/r}$$

и применим к двойному ряду в правой части неравенства Гельдера для сумм. В результате получаем

$$\|\mathcal{D}^s f\|^2_{2,\mu} \leqslant \left(\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty c^2_{pq}(f)\right)^{1-s/r}\cdot\left(2^{2r}\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty (p+q)^{2r}c^2_{pq}(f)\right)^{s/r} = \|f\|_{2,\mu}^{2(1-\frac{s}{r})}\cdot\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{2\frac{s}{r}},$$

откуда сразу вытекает неравенство (21). Покажем неулучшаемость неравенства (21). Для этого снова рассмотрим ту же функцию

$$f_0(x,y) = H_n(x)H_m(y)\in L_{2,\mu}(R^2),$$

на которой установили точность утверждения теоремы 1. Имеем

$$\mathcal{D}^s f_0 = (-1)^s 2^s (n+m)^s H_n(x)H_m(y),\ \|\mathcal{D}^s f_0\|_{2,\mu} = 2^s(n+m)^s,\ \|f_0\|_{2,\mu}=1.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$\|\mathcal{D}^s f_0\|^2_{2,\mu} = 2^{2s}(n+m)^{2s} = (1)^{1-\frac{s}{r}}\left(2^{2r}(n+m)^{2r}\right)^{\frac{s}{r}} = \|f_0\|_{2,\mu}^{2(1-\frac{s}{r})}\cdot\|\mathcal{D}^r f_0\|_{2,\mu}^{2\frac{s}{r}},$$

что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана. Аналогичным образом доказывается

Теорема 3. *Пусть* $s, r \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s \leqslant r$. *Тогда для произвольной функций* $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)$ *имеет место неравенство типа Колмогоров*

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leqslant \left(\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1-s/r} \cdot \left(\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\right)^{s/r}, \tag{23}$$

которое является точным в указанном ранее смысле.

Пусть $W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)$ – множество функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)$, у которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \leqslant 1$. Имеет место

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}\big(W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)\big)_{2,\mu} =$$

$$= \sup\left\{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} : f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)\right\} = 2^{-2r}(n+m)^{-r}. \tag{24}$$

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)$ в силу определения класса $W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)$ имеем

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \leqslant \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \leqslant 1. \tag{25}$$

Но тогда из неравенства (16) следует, что

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}\big(W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)\big)_{2,\mu} = \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)} \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} \leqslant 2^{-r}(n+m)^{-r}. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f_1(x,y) = 2^{-r}(n+m)^{-r} H_n(x) H_m(y),$$

для которой

$$\mathcal{D}^r f_1 = 2^{-r}(n+m)^r \mathcal{D}^r \big(H_n(x) \cdot H_m(y)\big) = (-1)^r H_n(x) H_m(y),$$

а значит $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} = 1$, а потому $f_1 \in L_{2,\mu}^{(r)}(R^2)$. Но так как

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_1)_{2,\mu} = 2^{-r}(n+m)^{-r},$$

то имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}\big(W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)\big)_{2,\mu} \geqslant \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_1)_{2,\mu} = 2^{-r}(n+m)^{-r}. \tag{27}$$

Равенство (24) является следствием сопоставления оценок сверху (26) и снизу (27). Теорема 4 доказана. Теорема 4 позволяет решать следующую экстремальную задачу: требуется найти точное значение величины

$$A_{m,n}(r,s)_{2,\mu} := \sup_{f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)} \left\{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)\right\}.$$

Теорема 5. *При всех* $n, m \in \mathbb{N}, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+, \quad n+m \geqslant r+s$ *имеет место равенство*

$$A_{m,n}(r,s)_{2,\mu} = 2^{-(r-s)}(n+m)^{-(r-s)}. \tag{28}$$

Доказательство. В самом деле, учитывая равенство (24) и неравенство (25), из соотношения (23) получаем

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leqslant (\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu})^{s/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\mathcal{E}_{n-1,m-1}\big(W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2)\big)\right\}^{1-s/r} \leqslant \big(2^{-r}(n+m)^{-r}\big)^{1-s/r} = 2^{-(r-s)}(n+m)^{-(r-s)}. \quad (29)$$

С целью получении оценки снизу заметим, что для функции

$$f_1(x,y) = 2^{-r}(n+m)^{-r}H_n(x)H_m(y) \in W^{(r)}L_{2,\mu}(R^2),$$

для которой $\mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} := 2^{-(r-s)}(n+m)^{-(r-s)}$, имеет место оценка

$$A_{m,n}(r,s)_{2,\mu} \geqslant \mathcal{E}_{n-1,m-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = 2^{-(r-s)}(n+m)^{-(r-s)}. \quad (30)$$

Равенство (28) вытекает из сопоставления неравенств (29) и (30), чем и завершаем доказательство теоремы 5.

В работе [6] С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком доказана следующая

Теорема (С.Б-М.Б.). *Пусть* $n,m,k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+;\ 0 < \eta \leqslant 1,$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,k\mu}(R^2)} \frac{2^r(n+m)^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\displaystyle\int_0^\eta \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}dt\right)^k} = \left(\int_0^\eta \big(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\big)\,dt\right)^{-k}.$$

В следующей нижеприведенной теореме доказано более сильное утверждение

Теорема 6. *Пусть* $n,m,k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+;\ 0 < \eta \leqslant 1, 1 \leqslant \nu \leqslant \infty, q(t) \geqslant 0$ - *произвольная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0,\eta]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)} \frac{2^r(n+m)^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\displaystyle\int_0^\eta \Omega_k^{\nu}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}q(t)dt\right)^{1/\nu}} = \left(\int_0^\eta \big(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\big)^{k\nu} q(t)dt\right)^{-1/\nu}. \quad (31)$$

Доказательство. Пользуясь равенством (9), запишем

$$\Omega_k^2(\mathcal{D}^r(f);t)_{2,\mu} := 2^{2r}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\big(1-(1-t^2)\big)^{(p+q)/2}\big)^{2k}(p+q)^{2r}c_{pq}^2(f) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2r}\sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty}\big(1-(1-t^2)^{(p+q)/2}\big)^{2k}(p+q)^{2r}c_{pq}^2(f) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2r}\big(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\big)^{2k}\cdot(n+m)^{2k}\sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=m}^{\infty}c_{pq}^2(f) =$$

$$= 2^{2r}\big(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\big)^{2k}\cdot(n+m)^{2r}\mathcal{E}^2_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}$$

или что то же

$$\Omega_k(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu} \geqslant 2^r\big(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\big)^k\cdot(n+m)^r\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}. \quad (32)$$

Возведя обе стороны неравенства (32) в степень ν $(1\leqslant\nu\leqslant\infty)$, умножив на весовую функцию $q(t)\geqslant 0$ $(0<t\leqslant\eta)$ и интегрируя по переменному t от 0 до η $(0<\eta\leqslant 1)$, будем иметь

$$\int_0^\eta \Omega_k^\nu(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}q(t)dt\geqslant 2^{r\nu}(m+n)^{r\nu}\mathcal{E}^\nu_{n-1,m-1}\int_0^\eta\left(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\right)^{k\nu}q(t)dt, \quad (33)$$

откуда и вытекает оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (31):

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)}\frac{2^r(n+m)^r\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\displaystyle\int_0^\eta\Omega_k^\nu(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}q(t)dt\right)^{1/\nu}}\leqslant\frac{1}{\left(\displaystyle\int_0^\eta\left(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\right)^{k\nu}q(t)dt\right)^{1/\nu}}. \quad (34)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим ту же функцию $f_0\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)$, введенную нами в конце доказательства теоремы 1, для которой в силу равенства (9) имеем

$$\Omega_k(\mathcal{D}^r f_0;t)_{2,\mu}=2^r(n+m)^r\left(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\right)^k. \quad (35)$$

В силу равенств (18) и (35) запишем оценку снизу указанной величины:

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)}\frac{2^r(n+m)^r\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\displaystyle\int_0^\eta\Omega_k^\nu(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}q(t)dt\right)^{1/\nu}}\geqslant\frac{2^r(n+m)^r\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\displaystyle\int_0^\eta\Omega_k^\nu(\mathcal{D}^r f_0;t)_{2,\mu}q(t)dt\right)^{1/\nu}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\displaystyle\int_0^\eta\left(1-(1-t^2)^{(n+m)/2}\right)^{k\nu}q(t)dt\right)^{1/\nu}}. \quad (36)$$

Сопоставляя оценки сверху (34) и снизу (36), получаем требуемое равенство (31), чем и завершаем доказательство теоремы 6. Из теоремы 6 вытекает

Следствие. *Если в условиях теоремы 6 полагать*

$$q(t)=(n+m)t(1-t^2)^{(n+m)/2-1},\ n+m\in\mathbb{N},0<t\leqslant 1,$$

то получаем

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)}\frac{2^r(n+m)^r\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left((n+m)\displaystyle\int_0^\eta\Omega_k^\nu(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}t(1-t^2)^{(n+m)/2-1}dt\right)^{1/\nu}}=$$

$$=\left(\frac{k\nu+1}{\left(1-(1-\eta^2)^{(n+m)/2}\right)^{k\nu+1}}\right)^{1/\nu},\ 1\leqslant\nu\leqslant\infty. \quad (37)$$

В частности, полагая в (37) $\eta=\sqrt{\dfrac{2}{(n+m)}}$ *и переходя к верхней грани по всем* $n,m\in\mathbb{N}$, *будем иметь*

$$\sup_{n+m\in\mathbb{N}}\ \sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}(R^2)}\frac{2^r(n+m)^r\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left((n+m)\displaystyle\int_0^{\sqrt{2/(n+m)}}\Omega_k^\nu(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}t(1-t^2)^{(n+m)/2-1}dt\right)^{1/\nu}}=$$

$$= \left\{ ((k\nu + 1)(1 - e^{-1})^{-(k\nu+1)} \right\}^{1/\nu}. \qquad (38)$$

Литература

[1] *Abilov V.A., Abilov M.V.* Certain problems of the approximation of functions in two variables by Fourier-Hermite sums in the space $L_2(R^2, e^{-x^2-y^2})$ // Analysis mathematica, 2006. Vol. 32. No. 3. P. 163–171.

[2] *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

[3] *Ржавинская Е.В.* О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p с весом : дис. канд. физ.-мат. наук. —М., 1980. 126 с.

[4] *Потапов М.К.* О приближении «углом» // Proc. Of the Conf. on Constructive Theory of Functions. —Budapest, 1972. P. 371–399.

[5] *Вакарчук С.Б. Швачко А.В.* О наилучшем приближении «углом» среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита // Збірник праць Інституту математики НАН Украіни, 2014. Т. 11. №3. С. 35–46.

[6] *Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.* Точные неравенствах типа Джексона в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика, 2014. Вып.19. С. 17–23.

Поступила в редакцию 22.01.2019

UDC 517.5

SHARP INEQUALITIES OF KOLMOGOROV TYPE IN THE WEIGHTED SPACE $L_{2,\mu}(R^2)$ AND SOME APPLICATION

Shabozov M.Sh, Jurakhonov O.A.
shabozov@mail.ru; olim1974@mail.ru
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe, 734025 Tajikistan

The sharp upper bounds approximation of functions of two variables by generalized Fourier-Hermit polynomial on the classes of functions $L_{2,\mu}^{(r)}(\mathcal{D})$ in the space $L_{2,\mu}(R^2)$ were calculated and where $\mathcal{D}$ is Tchebychev-Hermit operator of second order. The sharp inequalities for the magnitude of the best approximation which are estimated by averaged with weights and module of continuity of mth order with derivative order $\mathcal{D}^r f (r \in \mathbb{Z}_+)$ in the space $L_{2,\mu}(R^2)$ were obtained.

Keywords: mean-squared approximation, generalized module of continuity, Fourier-Hermit double series, Kolmogorov type inequality, translated operator.

Citation: Shabozov M.Sh, Jurakhonov O.A. 2019. Sharp inequalities of Kolmogorov type in the weighted space $L_{2,\mu}(R^2)$ and some application. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(20): 79–87.