УДК 517.87

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ С.Л.СОБОЛЕВА

Шадиметов Х.М.
д.ф.-м.н., профессор Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта,
тел.: +(99890) 620-20-84, e-mmail:shadimetov-@mail.ru

Жалолов И.Ф.
стажер Бухарского государственного университета,
тел.: + (99891) 409-49-01, e-mail: islom-jalolov@mail.ru

С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа. С.Л.Соболев, исследуя дискретную задачу типа Винера-Хопфа, доказал существование и единственность решения этой задачи и создал алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов кубатурных формул. В одномерном случае он свёл нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул при $P(x)=1$ в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ к решению системы из $2m-2$ уравнений. В статье в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная весовая квадратурная формула и вычислена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряженном пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$, а также найдена экстремальная функция для данной квадратурной формулы. Кроме того, для функционала погрешности квадратурной формулы типа Эрмита для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ получена оценка сверху и найдены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы типа Эрмита при $p(x)=1$ и $m=3(\alpha=0,1,2)$.

Ключевые слова: функция, пространство, норма, функционал погрешности, оптимальная квадратурная формула, экстремальная функция.

THE HERMITE TYPE OPTIMAL QUADRATURE FORMULA ON THE SOBOLEV SPACE

Shadimetov Kh.M., Jalolov I.F.

S.L. Sobolev considered the problem of constructing optimal lattice formulas over a space $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ and finding the optimal coefficients reduced to the solution of a discrete Wiener-Hopf problem. SL Sobolev, investigating a discrete Wiener-Hopf type problem, proved the existence and uniqueness of the solution of this problem and created an algorithm for finding the optimal coefficients of cubature formulas. In the one-dimensional case, he reduced the finding of the optimal coefficients of quadrature formulas $P(x)=1$ in space $L_2^{(m)}(R)$ to the solution of the system from $2m-2$ the equations. An optimal quadrature weight formula is constructed in the space of periodic functions $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ and the norm of the error functional of the constructed quadrature formula in the dual space $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ is calculated, and an extremal function for the given quadrature formula is found. In addition, for the error functional of a quadrature formula of Hermite type for class $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ functions, an upper bound is obtained and the optimal coefficients of a quadrature formula of Hermite type for $p(x)=1$ and $m=3(\alpha=0,1,2)$ are found.

Keywords: function, space, norm, functional error, optimal quadrature formula, extremal function.

S.L. SOBOLEVNING DAVRIY FUNKSIYALAR FAZOSIDA ERMIT TIPIDAGI OPTIMAL KBADRATUR FORMULA

Shadimetov X.M., Jalolov I.F.

S.L.Sobolev $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ fazoda panjarali optimal formulalarni qurish masalasini ko’rib chiqdi va optimal koeffisientlarni topishni Viner-Hopf tipidagi diskret masalani yechishga olib keldi. S.L. Sobolev Viner-Hopf tipidagi masalaning yechimini mavjudligi va yagonaligini isbotladi va kvadratur formulalar optimal koeffisientlarini topish algoritmini

berdi. Bir ulchovli holda $p(x)=1$ bo'lganda $L_2^{(m)}(R)$ fazoda kvadratur formulalarning optimal koeffisientlarini topishni $2m-2$ ta tenglamalar sistemasini yechishga olib keldi. Mazkur ishda S.L. Sobolevning $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ davriy funksiyalar fazosida optimal kvadratur formulalarning hatolik funksionali normasi hisoblangan va berilgan kvadratur formula uchun ekstremal funksiya topilgan. Hamda Ermit tipidagi kvadratur formula hatolik funksionali uchun $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ funksiyalar sinfida yuqoridan baho olingan va $p(x)=1$ va $m=3(\alpha=0,1,2)$ bo'lganda. Ermit tipidagi kvadratur formulaning optimal koeffisientlari topilgan.

Tayanch iboralar: funksiya, fazo, norma, funksional hatolik, optimal kvadratur formula, ekstremal funksiya.

1. Введение

Известно, что построение квадратурных формул, основанное на методах функционального анализа, было начато в работах А. Сарда [1] и С.М. Никольского [2] для кубатурных формул С.Л. Соболева [3]. С.Л.Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}(R^n)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа [1]. В одномерном случае, т.е. в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ непрерывная задача Винера-Хопфа решена З.Ж. Жамоловым [4]. Работы многих авторов посвящены построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул методом, предложенным С.Л. Соболевым [4-10].

Многие работы [11-14] посвящены квадратурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не только значения функции $f(x)$ в точках x на T_1, но и значения её производных некоторых порядков, то, естественно, что при правильном использовании всех этих данных можно ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функций.

В связи с этим рассмотрим весовую квадратурную формулу типа Эрмита:

$$\int_{T_1} P(x)f(x)dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}c_{\lambda}^{\alpha}f^{(\alpha)}\left(x^{(\lambda)}\right) \qquad (1)$$

в пространстве С.Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, где соответственно c_{λ}^{α} и $x^{(\lambda)}$ являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)\in\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины, равной единице, $P(x)$ - весовая функция и α - порядок производных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций, заданных на одномерном торе T_1 и имеющих все обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме [1]:

$$\left\|f/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2=\left(\int_{T_1} f(x)dx\right)^2+\sum_{k\neq 0}|2\pi k|^{2m}\left|\hat{f}_k\right|^2 \qquad (2)$$

со скалярным произведением

$$<f(x),\phi(x)> =$$

$$\int_{T_1} f^{(m)}(x)\phi^{(m)}(x)dx+\left(\int_{T_1} f(x)dx\right)\left(\int_{T_1}\phi(x)dx\right), \qquad (3)$$

где $\hat{f}_k$ - коэффициенты Фурье, т.е.

$$\hat{f}_k=\int_{T_1} f(x)e^{-2\pi ikx}dx.$$

Разность между интегралом и квадратурной суммой

$$\int_{T_1} P(x)f(x)dx-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}c_{\lambda}^{\alpha}f^{(\alpha)}\left(x^{(\lambda)}\right)=$$

$$=\int_{T_1}\left[P(x)\varepsilon_{T_1}(x)-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}c_{\lambda}^{\alpha}\delta^{(\alpha)}\left(x-x^{(\lambda)}\right)\right]f(x)dx=$$

$$=<\ell_N^{(\alpha)}(x),f(x)>$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1), и этой разности соответствует обобщённая функция

$$\ell_N^{(\alpha)}(x)=P(x)\varepsilon_{T_1}(x)-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}c_{\lambda}^{\alpha}\delta^{(\alpha)}\left(x-x^{(\lambda)}\right), \qquad (4)$$

и назовём её функционалом погрешности квадратурной формулы (1).

Здесь $\varepsilon_{T_1}(x)-$ характеристическая функция T_1, а $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

2. Постановка задачи

Известно, что задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^*, или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|=\inf_{c_{\lambda}^{\alpha},x^{(\lambda)}}\sup_{\|f(x)\|\neq 0}\frac{\left|<\ell_N^{(\alpha)}(x),f(x)>\right|}{\left\|f/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|}, \qquad (5)$$

где $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$ - сопряжённое пространство к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (4) данной квадратурной формулы, т.е. сначала вычислить норму $\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|$ функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, а потом, если требуется построить оптимальную квадратурную формулу, варьируя c_λ^α и $x^{(\lambda)}$ $\left(\lambda=1,\overline{N}\right)$, необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти такие значения c_λ^α и $x^{(\lambda)}$, чтобы выполнялось равенство (5).

В настоящей работе займёмся решением первой и второй задач для квадратурной формулы типа Эрмита вида (1), т.е. вычислением нормы $\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x)/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|$ функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ квадратурной формулы (1) и ее минимизацией. Отметим, что задача 2 решена при $\alpha=0$ [15].

3. Норма и экстремальная функция функционала погрешности весовых квадратурных формул типа Эрмита в периодическом пространстве С.Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Для нахождения нормы функционала погрешности (4) в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$ используется его экстремальная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\psi_\ell(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell_N^{(\alpha)}$, если

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell(x) >= \left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|\cdot\left\|\psi_\ell/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|.$$

Так как пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ со скалярным произведением (3) становится гильбертовым, то на основании теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала [1] существует единственная функция $\psi_\ell(x)\in\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, для которой

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), f(x) >=< \psi_\ell(x), f(x) > \tag{6}$$

и

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\| = \left\|\psi_\ell/\tilde{W}_2^{(m)}(x)\right\|.$$

В частности, из (6) при $f(x)=\psi_\ell(x)$ имеем

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell(x) >=< \psi_\ell(x), \psi_\ell(x) >=$$
$$= \|\psi_\ell\|^2 = \|\psi_\ell\|\cdot\left\|\ell_N^{(\alpha)}\right\| = \left\|\ell_N^{(\alpha)}\right\|^2. \tag{7}$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Квадрат нормы функционала погрешности (4) весовой квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2 = \left|\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2 +$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{K^{2m}}, \tag{8}$$

где c_λ^α - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы (1) и $\hat{P}_k$ - коэффициенты Фурье-функции $P(x)$.

Доказательство. Известно [3], что для функции $f(x)\in\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{2\pi i k x} = \sum_k \hat{f}_k e^{2\pi i k x}, \tag{9}$$

где $\hat{f}_k =< f(x), e^{-2\pi i k x} >= \int_{T_1} f(x) e^{-2\pi i k x}dx$, т.е. коэффициенты Фурье.

Таким образом, имеем

$$< \ell_N^{(\alpha)}, f(x) >=< \ell_N^{(\alpha)}(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{2\pi i k x} >=$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k < \ell_N^{(\alpha)}(x), e^{2\pi i k x} > = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k \hat{\ell}_k^{(\alpha)} =$$
$$= \hat{f}_0\hat{\ell}_0^{(\alpha)} + \sum_{k\neq 0}\hat{f}_k\hat{\ell}_k^{(\alpha)}. \tag{10}$$

Здесь $\hat{\ell}_0^{(\alpha)} = \int_{T_1}\ell_N^{(\alpha)}(x)dx$, $\hat{\ell}_k^{(\alpha)} = \int_{T_1}\ell_N^{(\alpha)}(x)e^{-2\pi i k x}dx$.

Теперь последовательно вычисляем значения коэффициентов Фурье $\hat{\ell}_0^{(\alpha)}$ и $\hat{\ell}_k^{(\alpha)}$:

$$\hat{\ell}_0^{(\alpha)} = \int_{T_1}\ell_N^{(\alpha)}(x)dx = \int_{T_1}\left[P(x)\varepsilon_{T_1}(x)\right]dx -$$
$$- \int_{T_1}\left[\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(x-x^{(\lambda)}\right)\right]dx =$$
$$= \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}, \tag{11}$$

$$\hat{\ell}_k^{(\alpha)} =< \ell_N^{(\alpha)}(x), e^{2\pi ikx} >=$$
$$=< P(x)\varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(x - x^{(\lambda)}\right),$$
$$e^{2\pi ikx} >=< P(x)\varepsilon_{T_1}(x), e^{2\pi ikx} > -$$
$$- < \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(x - x^{(\lambda)}\right), e^{2\pi ikx} >=$$
$$= \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}(-2\pi ik)^\alpha e^{2\pi ikx^{(\lambda)}},$$

т.е.

$$\hat{\ell}_k = \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}(-2\pi ik)^\alpha e^{-2\pi ikx^{(\lambda)}}. \quad (12)$$

Применяя к правой части (10) неравенство Шварца, получаем следующую оценку:

$$\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f(x) > \right| = \left| \hat{f}_0\, \hat{\ell}_0^{(\alpha)} + \sum_{k\neq 0} \hat{f}_k\, \hat{\ell}_k^{(\alpha)} \right| \le \left| \hat{f}_0\, \hat{\ell}_0^{(\alpha)} \right| +$$
$$+ \left| \sum_{k\neq 0} \hat{f}_k\, \hat{\ell}_k^{(\alpha)} (2\pi ik)^m \cdot \frac{1}{(2\pi ik)^m} \right| \le \left| \hat{f}_0\, \hat{\ell}_0^{(\alpha)} \right| +$$
$$+ \sum_{k\neq 0} \left| \hat{f}_k \right| \left| \hat{\ell}_k^{(\alpha)} \right| \left| (2\pi ik)^m \right| \frac{1}{\left| (2\pi ik)^m \right|} \le$$
$$\le \left\{ \left| \hat{f}_0 \right|^2 + \sum_{k\neq 0} \left| \hat{f}_k \right|^2 |2\pi ik|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \left| \hat{\ell}_0^{(\alpha)} \right|^2 + \sum_{k\neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_k^{(\alpha)} \right|^2}{|2\pi K|^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\| f \big/ \widetilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| \times$$
$$\times \left\{ \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_k^{(\alpha)} \right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Принимая во внимание (2), (12) и (13), получаем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \big/ \widetilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 \le \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq o} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}. \quad (14)$$

Существует такая функция из $\widetilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, что в неравенстве (14) равенство достигается. Действительно, рассмотрим следующую функцию $u(x)$:

$$u(x) = \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} e^{-2\pi kix}}{k^{2m}}.$$

Вычисляем значение функционала $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ для функции $u_\ell(x)$:

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), u(x) >=$$
$$=< \ell_N^{(\alpha)}(x), \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} > +$$
$$+ < \ell_N^{(\alpha)}(x), \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} e^{-2\pi ikx}}{(2\pi)^{2m} k^{2m}} >=$$
$$= \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} \hat{\ell}_k^{(\alpha)}}{k^{2m}} =$$
$$= \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_k^{(\alpha)} \right|^2}{k^{2m}}. \quad (15)$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Квадрат нормы функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$ равен

$$\left\| u \big/ \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq o} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}. \quad (16)$$

Доказательство леммы. Так как для всех функций $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет место равенство (9), то отсюда следует, что в том числе для нормы функции $u(x)$ справедливо равенство

$$\left\| u \big/ \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int_{T_1} u(x)\,dx \right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k_1|^{2m} \left| \hat{u}_{k_1} \right|^2, \quad (17)$$

где $k_1 \in z$ и $\hat{u}_{k_1}$ - коэффициенты Фурье.

Таким образом, вычисляем норму функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ по формуле (17).

В (17) для каждого слагаемого производим отдельное вычисление:

1. $$\left(\int_{T_1} u(x)\,dx \right)^2 =$$
$$= \left(\int_{t_1} \left[\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} e^{-2\pi kix}}{k^{2m}} \right] dx \right)^2 =$$
$$= \left(\left[\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right] \int_{T_1} dx + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} \int_{T_1} e^{-2\pi ikx}\,dx}{k^{(2m)}} \right)^2. \quad (18)$$

Так как $\int_{T_1} e^{-2\pi kx}dx = 0$ и $\int_{T_1} dx = 1$, то (18) принимает следующий вид:

$$\left(\int_{T_1} u(x)\,dx\right)^2 =$$

$$=\left(\left[\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right]\right)^2. \quad (19)$$

2. Теперь вычисляем значение $\hat{u}_{k_1}$:

$$\hat{u}_{k_1} = \int_{T_1} u(x) e^{2\pi i k_1 x} dx =$$

$$=\int_{t_1}\left[\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} e^{2\pi kix}}{k^{2m}}\right] e^{-2\pi i k_1 x}dx =$$

$$=\left[\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right]\int_{T_1} e^{-2\pi ikx}dx +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)}\int_{T_1} e^{-2\pi i k_1 x} e^{2\pi ikx}dx}{k^{(2m)}}. \quad (20)$$

Вычисляем

$$\int_{T_1} e^{-2\pi i k_1 x} e^{2\pi ikx}dx = \int_{T_1} e^{2\pi i(k-k_1)x}dx = \{1, \text{ если } k = k_1 \quad ,0,$$

если

$$k \neq k_1. \quad (21)$$

Имея в виду (21), из (20) получаем

$$\hat{u}_k = \hat{u}_{k_1} = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)}}{k^{(2m)}}. \quad (22)$$

Подставляя (19) и (22) в правую часть (17), имеем

$$\left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 =$$

$$\left|\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2 + \sum_{k\neq o}(2\pi)^{2m} k^{2m}\frac{\left|\ell_k^{(\alpha)}\right|^2}{(2\pi)^{4\pi} k^{4m}}. \quad (23)$$

Таким образом, после некоторых сокращений из (23) следует

$$\left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 =$$

$$=\left|\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq o}\frac{\left|\ell_k^{(\alpha)}\right|^2}{k^{2m}}. \quad (24)$$

Учитывая (12), из (24) следует доказательство леммы.

Сопоставляя правые части (14) и (24), получаем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2 \leq \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2. \quad (25)$$

Учитывая леммы для правых частей (15), имеем

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), u(x) >= \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \cdot \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|. \quad (26)$$

Для погрешности квадратурной формулы (1) на функциях $u(x)$ справедливо

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), u(x) >\leq \left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \cdot \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|. \quad (27)$$

Подставляя правую часть (26) в левую часть (27), имеем

$$\left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \cdot \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \leq \left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \times$$

$$\times \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|. \quad (28)$$

После сокращений из (28) следует

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \geq \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|. \quad (29)$$

Из (25) и (29) получаем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| = \left\| u / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|. \quad (30)$$

Если принимать во внимание (30), то можем записать следующее:

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), u(x) >=< u(x), u(x) >. \quad (31)$$

Равенство (31) свидетельствует о существовании $u(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ и, таким образом, оно является экстремальной функцией для квадратурной формулы (1), т.е. $u(x) = \psi_\ell(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, для которой выполняется равенство

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell(x) >= \left\| \psi_\ell / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\| \times$$

$$\times \left\| \psi_\ell / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|. \quad (32)$$

Тогда (31) принимает следующий вид:

$$< \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell(x) >=< \psi_\ell(x), \psi_\ell(x) >. \quad (33)$$

Это означает, что выполняются все условия теоремы Рисса [3].

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Равенства (15), (31) и (32) подтверждают, что

$$u(x) = \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k^{(\alpha)} e^{-2\pi kix}}{k^{2m}}$$

является экстремальной функцией для квадратурной формулы (1) и $u(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Таким образом, учитывая (23), (30) и условия леммы для квадрата нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1), имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2 =$$

$$=\left|\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2 + \quad (34)$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{\alpha}(2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}},$$

что и требовалось доказать.

На основании этой теоремы функционал погрешности квадратурной формулы (1) для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет оценку

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)}, f(x)>\right| \le$$

$$\le \left\{ \left|\hat{f}_0\right|^2 + \sum_{k\ne 0} \left|\hat{f}_k\right|^2 |2\pi k|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{ \left|\hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k\ne 0} \frac{\left|\hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

4. Минимизация нормы функционала погрешности квадратурной формулы типа Эрмита в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Из (34) видно, что качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по c_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача исследования функции на экстремум. Значения c_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют наилучшую квадратурную формулу.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 3. Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m=3$ и $\alpha=\overline{0,1,2}$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)}=\frac{\lambda}{N}$, $\lambda=1,2,...,N$ и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = \overset{o}{c}$, $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = ... = c_N^{(1)} = \dot{c}^{(1)}$ и $c_1^{(2)} = c_2^{(2)} = ... = c_N^{(2)} = \dot{c}^{(2)}$, которые выражаются формулами

$$c' = \frac{\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^2}}{N\left[\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(2\pi)^6 N^6}\left(\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^2}\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^6} - \left(\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^4}\right)^2\right)\right]},$$

$$c'^{(1)} = 0$$

и

$$c'^{(2)} =$$

$$= \frac{\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^4}}{(2\pi)^2 N^3\left[\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(2\pi)^6 N^6}\left(\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^2}\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^6} - \left(\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^4}\right)^2\right)\right]}. \quad (36)$$

Доказательство. Пусть в равенстве (34) $m=3$, тогда $\alpha=\overline{0,1,2}$, и в этом случае (34) принимает следующий вид:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x) \middle/ \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2 =$$

$$= \left(1-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^6}\times$$

$$\times \sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^6}\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i x^{(\lambda)}} - \right.$$

$$-(2\pi)^2 k^2 \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(2)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}} +$$

$$\left. +(2\pi i)\ k \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2. \quad (37)$$

Теперь произведем некоторое преобразование над вторым слагаемым в равенстве (37).

Пусть $\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \ne 0$, тогда умножая числитель и знаменатель второго слагаемого на величину $\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2$, получаем

$$\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^6}\times$$

$$\times\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^6}\times =$$

$$\times\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i x^{(\lambda)}} - (2\pi)^2 k^2 \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(2)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}} + \right.$$

$$\left. +(2\pi i)\ k \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2 =$$

$$= \left(1-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{k\ne 0}\frac{1}{k^6}\times$$

$$\times\left|\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta} - \right.$$

$$-(2\pi)^2\ k^2\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(2)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(2)}} +$$

$$\left. +(2\pi i)\ k \left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}}\right|^2 =$$

$$= \left(1-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\left|\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}-\right.$$

$$-(2\pi)^2k^2\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(21)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(21)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}+ \qquad (38)$$

$$\left.+(2\pi i)\;k\;\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2,$$

где

$$c'_\lambda=\frac{c_\lambda}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta},\quad c'^{(1)}_\lambda=\frac{c_\lambda^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}}\ \text{ и }\ c'^{(2)}_\lambda=\frac{c_\lambda^{(2)}}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(2)}}. \qquad (39)$$

Очевидно, что

$$\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda=1,\quad \sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)'}=1\ \text{ и }\ \sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(2)'}=1. \qquad (40)$$

Учитывая (39) и (40), равенство (38) перепишем в виде

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x)\big/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\left|\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}-\right.$$

$$-(2\pi)^2k^2\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(2)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}+ \qquad (41)$$

$$\left.+(2\pi i)\;k\;\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2.$$

Отсюда получаем

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x)\big/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\left(\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}-(2\pi)^2k^2\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(21)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(21)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}+(2\pi i)k\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)^2\right|}{k^6}. \qquad (42)$$

Обозначая левую часть (42) через $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=x_1$, $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=x_2$ и $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(2)}=x_3$, после некоторых преобразований равенство (42) перепишем в виде полинома второй степени по x_1, x_2 и x_3:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x)\big/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\times$$

$$\times\left|\left(x_1\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}-(2\pi)^2k^2x_3\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)^2+\right. \qquad (43)$$

$$\left.+(2\pi)^2k^2x_2^2\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)^2\right|,$$

или

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x)\big/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^6}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)^2}{k^6}-$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}2x_1x_3\sum_{k\neq 0}\frac{\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}}{k^4}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}x_3^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)^2}{k^2}+ \qquad (44)$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^4}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)^2}{k^4}.$$

Имея в виду условия (40) в равенстве (44) и используя результаты работ [16, 17], получаем

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}(x)\big/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$+\frac{1}{(2\pi N)^6}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\frac{1}{(2\pi N)^4}2x_1x_3\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}+ \qquad (45)$$

$$+\frac{1}{(2\pi N)^2}x_3^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(2\pi N)^4}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}.$$

Здесь мы учитывали, что суммы

$$\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^6},\quad \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}\ \text{ и }$$

$$\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^2}$$

достигают своего наименьшего значения, равного соответственно

$$\frac{1}{N^6}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6},\ \frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\ \text{ и }\ \frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2},$$

когда узлы $x^{(\lambda)}$ квадратурной формулы (1) равноотстоящие и все коэффициенты c'_λ равны между собой:

$$c'_\lambda=\frac{1}{N}\ \text{ и }\ x^{(\lambda)}=\frac{\lambda}{N},\ \lambda=\overline{1,N}. \qquad (46)$$

Теперь правую часть (45) будем рассматривать, как функцию от трех переменных x_1, x_2, x_3 и обозначим ее через $y(x_1,x_2,x_3)$:

$$y(x_1,x_2,x_3)=\left(1-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$\frac{1}{(2\pi N)^6}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\frac{1}{(2\pi N)^4}2x_1x_3\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}+$$
$$+\frac{1}{(2\pi N)^2}x_3^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(2\pi N)^4}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}. \qquad (47)$$

Тогда из необходимого условия экстремума из (47) получаем систему уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и x_3:

$$y'(x_1,x_2,x_3)_{x_1}=-2(1-x_1)+$$
$$\frac{2}{(2\pi N)^6}x_1\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\frac{1}{(2\pi N)^4}2x_1\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}=0,$$

$$y'(x_1,x_2,x_3)_{x_2}=-2(1-x_1)+\frac{1}{(2\pi N)^4}2x_2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}=0,$$

$$y'(x_1,x_2,x_3)_{x_3}=$$
$$-\frac{2}{(2\pi N)^4}x_1\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}+\frac{1}{(2\pi N)^2}2x_3\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}=0. \qquad (48)$$

После некоторых упрощений из (48) получаем

$$x_1\left(1+\frac{1}{(2\pi N)^6}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\right)-\frac{1}{(2\pi N)^4}x_3\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}=1,$$
$$x_2=0,$$
$$x_3\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(2\pi N)^4}x_1\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}. \qquad (49)$$

Решая систему (49) и введя некоторые преобразования, последовательно находим x_1, x_2 и x_3:

$$x_1=\frac{\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}{\left[\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(2\pi)^6N^6}\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right)^2\right)\right]},$$
$$x_2=0$$

и

$$x_3=\frac{\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}}{(2\pi)^2N^2}\times$$
$$\times\frac{1}{\left[\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(2\pi)^6N^6}\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right)^2\right)\right]}. \qquad (50)$$

Пусть $c'_\lambda=\frac{1}{N}$, $\lambda=\overline{1,N}$, тогда из (36) и (46) следует

$$c_1=c_2=...=c_N=\dot{c},\ c_1^{(1)}=c_2^{(1)}=...=c_N^{(1)}=\dot{c}^{(1)}\ \text{и}$$
$$c_1^{(2)}=c_2^{(2)}=...=c_N^{(2)}=\dot{c}^{(2)},$$

откуда имеем

$$x_1=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=N\dot{c},\ x_2=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=N\dot{c}^{(1)}\ \text{и}$$
$$x_3=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(2)}=N\dot{c}^{(2)}. \qquad (51)$$

Подставляя (50) в (51), находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1):

$$c'=\frac{\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}{N\left[\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(2\pi)^6N^6}\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right)^2\right)\right]},$$
$$c'^{(1)}=0$$

и

$$c'^{(2)}=\frac{\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}}{(2\pi)^2N^3}\times$$
$$\times\frac{1}{\left[\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(2\pi)^6N^6}\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}-\left(\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right)^2\right)\right]},$$

что и требовалось доказать.

Литература

[1] *Sard A.* Integral representations of remainders, Duke Math J. - 1948. – V 15. – Pp. 333-345.

[2] *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи математических наук. – 1950. - Т.5, вып 2 (36). - С. 165-177.

[3] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.

[4] *Жамолов З.Ж., Солихов Г.Н., Шарипов Т.Х.* Приближенное интегрирование гладких функций // Математический анализ и смежные вопросы математики. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1978.

[5] *Шодиметов Х.М.* О вычислении коэффициентов оптимальных квадратурных формул // Докл. АН СССР. – Москва, 1980. - № 4.

[6] *Рамазанов М.Д., Шадиметов Х.М.* Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева // Докл. РАН. - Москва, 1999. - Т. 358, № 4. - С. 453-455.

[7] *Шадиметов Х.М.* Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева: Дис… докт. физ.-мат. наук. - Ташкент, 2002. – 218 с.

[8] *Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р.* Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2004. - № 3. - С. 80-98.

[9] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$ // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 235, (2011). – Pp. 1114-1128.

[10] *Hayotov A.R., Milovanovi G.V., Shadimetov Kh.M.* On an optimal quadrature formula in the sense of Sard. Numerical Algorithms, (Accepted, 6 December, 2010).

[11] *Лушпай Н.Е.* Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1969. - 6. - Вып. 4. - С. 475-480.

[12] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1979. - 256 с.

[13] *Шайнжуров Ц.Б.* Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой зависящей и ее производных: Дис… докт. физ.- мат. наук. - Новосибирск.

[14] *Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.F.* Optimization quadrature formulas witd derivatives // Problems of computational and applied matematics. - Tashkent, 2015. - № 1. - Pp. 61-70.

[15] *Жалолов И.И.* Наилучшая квадратурная формула над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$ // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб.науч.тр. – Ташкент: ИК АН УзССР, 1985. - Вып. 77. – С. 80-92.

[16] *Женсыкбаев А.А.* О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^r L_p$ // Докл. АН СССР. – 1976. - № 2. - С. 277-279.

[17] *Женсыкбаев А.А.* Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1977. – 41. - № 5. - С. 1110-1124.