

УДК 517.958+519.63

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Юлдашев Т.

д.т.н., ведущий научный сотрудник,
Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз,
тел.: (+99890) 326-88-59

Исомиддинов А.И.

соискатель кафедры ПО «Информатики и информационных технологий»,
Наманганский инженерно-строительный институт,
тел.: (+99897) 710-16-24, e-mail: isomiddinov_a@mail.ru

В работе приведены вычислительные алгоритмы прикладных задач описывающих системой дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. В качестве моделируемого объекта рассмотрены шпиндели уборочного аппарата при воздействии пространственно – динамическом нагружении. На основе вариационного принципа Остроградского - Гамильтона выведены уравнения колебаний стержней типа шпинделя при пространственном нагружении. Полученные уравнения колебаний описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с естественными граничными и начальными условиями. Разработанная математическая модель исследуемого объекта аппроксимируется на основе метода конечных разностей и описываются системами алгебраических уравнений с учетом граничных и начальных условий. На основе разработанного вычислительного алгоритма решена тестовая задача и определено напряженно-деформированное состояние шпинделя при воздействии динамических нагрузок. Полученные численные результаты приведены в виде таблиц и графиков.

Ключевые слова: уравнения равновесия, граничные и начальные условия, система дифференциальных уравнений с частными производными, метод конечных разностей, аппроксимация, центрально конечно-разностная схема, система алгебраических уравнений, матрица, вектор.

COMPUTING ALGORITHMS OF APPLIED TASKS DESCRIBING BY SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PRIVATE BY DERIVATIVE OF THE SECOND ORDER

Yuldashev T., Isomiddinov A.I.

In article the computing algorithms of applied tasks describing by system of the differential equations with private by derivative of the second order are given. In qualities of simulated object are considered of spindles of the harvest device at influence spatially - dynamic loadings. On the basis of a variation principle of Ostrogradsky-Hamilton's are deduced of the equations fluctuation of cores such as a spindle at spatial loadings. Received of the equations fluctuation is described by systems by the differential equations by private products of the second order with natural boundary and entry conditions. The developed mathematical model of researched object is approximating on the basis of a method of final differences and described by systems of the algebraic equations in view of boundary and entry conditions. On the basis of the developed computing algorithm are decided a test task and the condition of a spindle are determined is intense - deformed at influence dynamic loadings. The received numerical results are given as the tables and graphics.

Keywords: equation of balance, boundary and initial condition, system of the differential equations with private by derivative, method of final differences, approximation, central difference scheme, system of the algebraic equations, matrix, vector.

IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY XOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI ORQALI IFODALANUVCHI AMALIY MASALALARNI HISOBLASH ALGOROTMLARI

Yuldashev T., Isomiddinov A.I.

Maqolada ikkinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalar sistemasi orqali ifodalanuvchi amaliy masalalarni hisoblash algoritmlari keltirilgan. Modellastirish ob'ekti sifatida fazoviy dinamik yuklanishlar ta'siridagi teruvchi apparat shpindellari qaralgan. Ostrogradskiy-Gamilton variatsion tamoyili asosida shpindel tipidagi sterjenlarning

fazoviy yuklanishlardagi tebranishlarining tenglamalari keltirib chiqarilgan. Olingan tebranish tenglamalari tabiiy chegaraviy va boshlang'ich shartli ikkinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalar sistemasi ko'rinishida ifodalangan. Tadqiqot obyekti uchun ishlab chiqilgan matematik model chekli ayirmalar usuli asosida approksimatsiyalanib, chegaraviy va boshlang'ich shartlarni inobatga olgan holda algebraik tenglamalar sistemasi ko'rinishida ifodalangan. Ishlab chiqilgan hisoblash algoritmlari asosida test masala yechilib, fazoviy dinamik yuklanishlar ta'siridagi shpindelning kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holati aniqlangan. Olingan sonli natijalar jadval va grafik ko'rinishida keltirilgan.

Kalit so'zlar: muvozanat tenglamasi, chegaraviy va boshlang'ich shart, xususiy xosilali differensial tenglamalar sistemasi, chekli ayirmalar usuli, approksimatsiya, markaziy chekli-ayirmali sxema, algebraik tenglamalar sistemasi, matritsa, vektor.

1. Введение

Шпиндель считается основным рабочим органом и является ответственной и массовой деталью в уборочном аппарате. Надежность работы уборочных аппаратов в основном зависит от работоспособности основного рабочего органа – шпинделя.

В работах [1-7] исследованы технологические процессы уборочных аппаратов, предложены аналитические формулы и расчетные модели шпинделей. Составлены дифференциальные уравнение и выведены уравнения движения динамики захватывающего упругого звена составного шпинделя, воспользуясь уравнением Лагранжа. Выведены формулы определения переменного динамического момента инерции захватывающего элемента в зависимости от геометрических и динамических параметров конструкции составного шпинделя – автомата. Исследованы изгибных и крутильных колебаний стержня с сосредоточенными и распределенными параметрами. Для расчета составного шпинделя была составлена динамическая модель упругой системы вращающейся на двух шарнирных опорах. Получено дифференциальное уравнение четвертого порядка свободных изгибных колебаний составного шпинделя хлопкоуборочной машины. С аналитическими методами определены изгибного момента от нагрузки и произведен расчет на прочность стержня составного шпинделя.

Из обзора работ ведущих ученых видно, что до сих пор не рассмотрены и не решены связанные задачи динамики шпинделей при пространственном циклическом нагружении. Отсутствие обоснованной динамической теории шпинделей с учетом сложного взаимосвязанного напряженно-деформированного состояния не позволяет получить обоснованное суждение о его длительной динамической прочности, поэтому актуальным остается вопрос о долговечности шпинделей прямого и обратного вращения в режимах его работы при различной интенсивности. Таким образом, создание обоснованного математического обеспечения и вычислительного алгоритма является весьма актуальной задачей.

Многие прикладные задачи и их математические модели описываются в виде дифференциальных уравнений и их системой.

На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона с использованием соотношения Коши и связи между напряжениями и

деформациями выводится система дифференциальных уравнений с частными производными с естественными граничными и начальными условиями в векторной форме [8]:

$$T \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + B \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + C \vec{V} = D \vec{V} (Pq) \quad (1)$$

$$\left[\bar{A} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{B} \vec{V} + \bar{C} \vec{V}(\phi) \right] \delta \vec{V} \Big|_x = 0. \quad (2)$$

$$\left[\bar{T} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \delta \vec{V} \right]_t = 0 \quad (3)$$

где \vec{V} – искомый вектор функций:

$$\vec{V} = [u, v, w, \alpha_1, \alpha_2, \theta]^T,$$

здесь u, v и w – перемещения центральной линии стержня; α_1 и α_2 – углы наклона касательной к упругой линии при чистом изгибе; θ – угол закручивания;

$T, A, B, C, D, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ и \bar{T} – квадратные матрицы шестого порядка:

$$t_{1,1} = t_{2,2} = t_{3,3} = -1; \quad t_{4,4} = -\frac{I_y}{Fd^2}; \quad t_{5,5} = -\frac{I_z}{Fd^2};$$

$$t_{6,6} = -\frac{I_p}{Fd^2}; \quad a_{1,1} = 1; \quad a_{2,2} = a_{3,3} = \frac{1}{2(1+\mu)};$$

$$a_{4,4} = \frac{I_y}{Fd^2}; \quad a_{5,5} = \frac{I_z}{Fd^2}; \quad a_{6,6} = \frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)};$$

$$b_{4,3} = b_{5,2} = \frac{L}{2d(1+\mu)}; \quad b_{2,5} = b_{3,5} = -b_{4,3};$$

$$c_{4,5} = c_{5,5} = -\frac{L^2}{2d^2(1+\mu)}; \quad d_{4,4} = d_{5,5} = \frac{L^2}{EFd^2};$$

$$d_{1,1} = d_{2,2} = d_{3,3} = d_{6,6} = -d_{4,4}; \quad \bar{a}_{1,1} = -1;$$

$$\bar{a}_{2,2} = \bar{a}_{3,3} = -\frac{1}{2(1+\mu)}; \quad \bar{a}_{4,4} = -\frac{I_y}{Fd^2}; \quad \bar{a}_{5,5} = -\frac{I_z}{Fd^2};$$

$$\bar{a}_{6,6} = -\frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)}; \quad \bar{b}_{2,5} = \bar{b}_{3,5} = \frac{L}{2d(1+\mu)};$$

$$\bar{c}_{1,1} = \bar{c}_{2,2} = \bar{c}_{3,3} = \frac{L}{EFd}; \quad \bar{c}_{6,6} = \frac{L}{EFd^2};$$

$$\bar{c}_{4,4} = \bar{c}_{5,5} = -\bar{c}_{6,6}; \quad \bar{t}_{6,6} = \frac{t_0 I_p}{Fd^2}; \quad \bar{t}_{1,1} = \bar{t}_{2,2} = \bar{t}_{3,3} = t_0;$$

$$\bar{t}_{4,4} = \frac{t_0 I_y}{Fd^2}; \quad \bar{t}_{5,5} = \frac{t_0 I_z}{Fd^2},$$

здесь I_y, I_z и I_p – моменты инерции; d – диаметр; L – длина; F – площадь поперечного сечения шпинделя; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости;

$\vec{V}(Pq)$ – вектор объемных и поверхностных сил:

$$\vec{V}(Pq) = \begin{pmatrix} (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \\ (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \\ (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \\ (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \\ (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \\ (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \end{pmatrix},$$

здесь $N_x(P_1)$, $Q_{12}(P_2)$ и $Q_{13}(P_3)$ – объемные продольные и поперечные силы; $M_y(P_1)$, $M_z(P_1)$ и $M_x(P_2, P_3)$ – объемные изгибающие и крутящие моменты; $N_x(q_1)$, $Q_{12}(q_2)$ и $Q_{13}(q_3)$ – поверхностные продольные и поперечные силы; $M_y(q_1)$, $M_z(q_1)$ и $M_x(q_2, q_3)$ – поверхностные изгибающие и крутящие моменты;

$\vec{V}(\varphi)$ – вектор торцевых сил:

$$\vec{V}(\varphi) = \begin{pmatrix} N_x(\varphi_1) \\ Q_{12}(\varphi_2) \\ Q_{13}(\varphi_3) \\ M_y(\varphi_1) \\ M_z(\varphi_1) \\ M_x(\varphi_2, \varphi_3) \end{pmatrix},$$

здесь $N_x(\varphi_1)$, $Q_{12}(\varphi_2)$ и $Q_{13}(\varphi_3)$ – торцевые продольные и поперечные силы; $M_y(\varphi_1)$, $M_z(\varphi_1)$ и $M_x(\varphi_2, \varphi_3)$ – торцевые изгибающие и крутящие моменты.

В связи с широким применением компьютерных технологий становится ясным, что целесообразно разработать разностные схемы для решения различных задач. Такие универсальные разностные схемы должны, естественно, удовлетворять требованиям сходимости и устойчивости для любой последовательности сеток и для любой исходной задачи из рассматриваемого класса задач.

Теперь переходим к построению вычислительного алгоритма сформированной краевой задачи (1) – (3), применяя центрально конечно-разностные схемы метода конечных разностей с точностью второго порядка [9]:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{1}{\tau^2} (\vec{V}_{i,j+1} - 2\vec{V}_{i,j} + \vec{V}_{i,j-1}) + O(\tau^2);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{1}{h^2} (\vec{V}_{i+1,j} - 2\vec{V}_{i,j} + \vec{V}_{i-1,j}) + O(h^2);$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\tau} \left(\vec{V}_{i,j+\frac{1}{2}} - \vec{V}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + O(\tau^2);$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{h} \left(\vec{V}_{i+\frac{1}{2},j} - \vec{V}_{i-\frac{1}{2},j} \right) + O(h^2)$$

где $\bar{t} = j\tau$, $\bar{x} = ih$.

Точность разностной схемы зависит от порядка аппроксимации не только уравнения, но и дополнительных условий (граничных и начальных).

В работе [10] на шаг по времени ставится ограничение $0 < \tau < \frac{h^2}{4}$, это соответствует условию

$\tau = rh^2$, $r \leq \frac{1}{2}$, поставленному в [11], другое

ограничение $c_{\max} \tau < \frac{1}{n} h_{\min}^2$, $n \geq 2$, также удовлетворяет условию устойчивости.

При разработке вычислительного алгоритма дробные шаги сетки создают своеобразные затруднения. Поэтому дробные шаги сетки преобразуем в целые шаги сетки по формулам:

$$\vec{V}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{i,j+1} + \vec{V}_{i,j}); \quad \vec{V}_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{i,j} + \vec{V}_{i,j-1});$$

$$\vec{V}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{i+1,j} + \vec{V}_{i,j}); \quad \vec{V}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{i,j} + \vec{V}_{i-1,j});$$

тогда

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2\tau} (\vec{V}_{i,j+1} - \vec{V}_{i,j-1}); \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2h} (\vec{V}_{i+1,j} - \vec{V}_{i-1,j})$$

2. Аппроксимация векторного уравнения движения

Используя вышеприведенные конечно-разностные схемы, аппроксимируем сформированного векторного уравнения движения (1) второго порядка точности $O(h^2)$:

$$\frac{T}{\tau^2} (\vec{V}_{i,j+1} - 2\vec{V}_{i,j} + \vec{V}_{i,j-1}) + \frac{A}{h^2} (\vec{V}_{i+1,j} - 2\vec{V}_{i,j} + \vec{V}_{i-1,j}) + \frac{B}{2h} (\vec{V}_{i+1,j} - \vec{V}_{i-1,j}) + C\vec{V}_{i,j} = D\vec{V}_{i,j}(Pq) \quad (4)$$

Уравнение (4) делим на $\frac{T}{\tau^2}$ и приводим подобные слагаемые

$$\vec{V}_{i,j+1} - \left(2E + 2\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - C\tau^2 T^{-1} \right) \vec{V}_{i,j} + \tau^2 T^{-1} \left(\frac{A}{h^2} + \frac{B}{2h} \right) \vec{V}_{i+1,j} + \tau^2 T^{-1} \left(\frac{A}{h^2} - \frac{B}{2h} \right) \vec{V}_{i-1,j} + \vec{V}_{i,j-1} = D\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,j}(Pq) \quad (5)$$

здесь E – единичная матрица шестого порядка.

Теперь вводим следующие обозначения:

$$A_1 = 2E + 2\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - C\tau^2 T^{-1}; \quad B_1 = \tau^2 T^{-1} \left(\frac{A}{h^2} + \frac{B}{2h} \right);$$

$$C_1 = \tau^2 T^{-1} \left(\frac{A}{h^2} - \frac{B}{2h} \right); \quad D_1 = D \tau^2 T^{-1} \quad (6)$$

С учетом вышеприведенных обозначений (6) переписем уравнение (5).

$$\vec{V}_{i,j+1} - A_1 \vec{V}_{i,j} + B_1 \vec{V}_{i+1,j} + C_1 \vec{V}_{i-1,j} + \vec{V}_{i,j-1} = D_1 \vec{V}_{i,j} (Pq)$$

или

$$\vec{V}_{i,j+1} + B_1 \vec{V}_{i+1,j} - A_1 \vec{V}_{i,j} + C_1 \vec{V}_{i-1,j} + \vec{V}_{i,j-1} = D_1 \vec{V}_{i,j} (Pq) \quad (7)$$

Векторное алгебраическое уравнение (7) решается относительно искомой функции $\vec{V}_{i,j+1}$

$$\vec{V}_{i,j+1} = -B_1 \vec{V}_{i+1,j} + A_1 \vec{V}_{i,j} - C_1 \vec{V}_{i-1,j} - \vec{V}_{i,j-1} + D_1 \vec{V}_{i,j} (Pq) \quad (8)$$

Уравнение (8) еще не учитывает граничные и начальные условия (и при $j=0$ начальные условия также не определены). Для замыкания задачи надо учитывать граничные (2) и начальные условия (3).

3. Аппроксимация граничных условий

Нижняя часть шпинделя закреплена во втулке, а верхняя часть закреплена посредством подшипника.

Теперь аппроксимируем граничные условия (2), для этого принимаем $i=0$ (нижняя часть) аппроксимацию шагом вперед и при $i=N$ (верхняя часть) аппроксимацию шагом назад:

при $i=0$,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{1}{2h} (-3\vec{V}_{0,j} + 4\vec{V}_{1,j} - \vec{V}_{2,j}) \quad (9)$$

при $i=N$,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{1}{2h} (3\vec{V}_{N,j} - 4\vec{V}_{N-1,j} + \vec{V}_{N-2,j}) \quad (10)$$

при $i=0$ аппроксимации граничных условий (2) имеет вид:

$$\bar{A} \frac{1}{2h} (-3\vec{V}_{0,j} + 4\vec{V}_{1,j} - \vec{V}_{2,j}) + \bar{B} \vec{V}_{0,j} + \bar{C} \vec{V}_{0,j}(\phi) = 0 \quad (11)$$

Приводим подобные слагаемые и определяем $\vec{V}_{0,j}$

$$\left(-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right) \vec{V}_{0,j} = -\bar{A} \frac{2}{h} \vec{V}_{1,j} + \bar{A} \frac{1}{2h} \vec{V}_{2,j} - \bar{C} \vec{V}_{0,j}(\phi);$$

отсюда

$$\begin{aligned} \vec{V}_{0,j} = & - \left[-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{2}{h} \vec{V}_{1,j} + \\ & + \left[-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{1}{2h} \vec{V}_{2,j} - \\ & - \left[-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{C} \vec{V}_{0,j}(\phi) \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 = & - \left[-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{2}{h}; \\ \bar{B}_0 = & \left[-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{1}{2h}; \\ \bar{C}_0 = & \left[-\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{C} \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (13) переписем уравнение (12).

$$\vec{V}_{0,j} = \bar{A}_0 \vec{V}_{1,j} + \bar{B}_0 \vec{V}_{2,j} + \bar{C}_0 \vec{V}_{0,j}(\phi). \quad (14)$$

Уравнение (8) при $i=1$ получает вид:

$$\vec{V}_{1,j+1} = -B_1 \vec{V}_{2,j} + A_1 \vec{V}_{1,j} - C_1 \vec{V}_{0,j} - \vec{V}_{1,j-1} + D_1 \vec{V}_{1,j} (Pq) \quad (15)$$

Подставляя выражение (14) к уравнению (15) получим:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1,j+1} = & (A_1 - C_1 \bar{A}_0) \vec{V}_{1,j} - (B_1 + C_1 \bar{B}_0) \vec{V}_{2,j} - \\ & - \vec{V}_{1,j-1} - C_1 \bar{C}_0 \vec{V}_{0,j}(\phi) + D_1 \vec{V}_{1,j} (Pq) \end{aligned} \quad (16)$$

при $i=N$ аппроксимации граничных условий (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{A} \frac{1}{2h} (3\vec{V}_{N,j} - 4\vec{V}_{N-1,j} + \vec{V}_{N-2,j}) + \\ + \bar{B} \vec{V}_{N,j} + \bar{C} \vec{V}_{N,j}(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Приводим подобные слагаемые

$$\left(\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right) \vec{V}_{N,j} = \bar{A} \frac{2}{h} \vec{V}_{N-1,j} - \bar{A} \frac{1}{2h} \vec{V}_{N-2,j} - \bar{C} \vec{V}_{N,j}(\phi)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N,j} = & \left[\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{2}{h} \vec{V}_{N-1,j} - \\ & - \left[\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{1}{2h} \vec{V}_{N-2,j} - \\ & - \left[\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{C} \vec{V}_{N,j}(\phi) \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{A}_N = & \left[\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{2}{h}; \\ \bar{B}_N = & - \left[\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{A} \frac{1}{2h}; \\ \bar{C}_N = & - \left[\bar{A} \frac{3}{2h} + \bar{B} \right]^{-1} \bar{C} \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (19) переписем уравнение (18).

$$\vec{V}_{N,j} = \bar{A}_N \vec{V}_{N-1,j} + \bar{B}_N \vec{V}_{N-2,j} + \bar{C}_N \vec{V}_{N,j}(\phi) \quad (20)$$

Уравнение (8) при $i=N-1$ получает вид:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N-1,j+1} = & -B_1 \vec{V}_{N,j} + A_1 \vec{V}_{N-1,j} - C_1 \vec{V}_{N-2,j} - \\ & - \vec{V}_{N-1,j-1} + D_1 \vec{V}_{N-1,j} (Pq) \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя выражение $\vec{V}_{N,j}$ из (20) к уравнению (21) получим:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N-1,j+1} = & -B_1 (\bar{A}_N \vec{V}_{N-1,j} + \bar{B}_N \vec{V}_{N-2,j} + \bar{C}_N \vec{V}_{N,j}(\phi)) + \\ & + A_1 \vec{V}_{N-1,j} - C_1 \vec{V}_{N-2,j} - \vec{V}_{N-1,j-1} + D_1 \vec{V}_{N-1,j} (Pq) \end{aligned} \quad (22)$$

Приводим подобные слагаемые

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N-1,j+1} = & (-B_1 \bar{A}_N + A_1) \vec{V}_{N-1,j} - \\ & - (B_1 \bar{B}_N + C_1) \vec{V}_{N-2,j} - \\ & - \vec{V}_{N-1,j-1} - B_1 \bar{C}_N \vec{V}_{N,j}(\phi) + D_1 \vec{V}_{N-1,j} (Pq) \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, с учетом граничных условий получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \vec{V}_{1,j+1} = (A_1 - C_1 \bar{A}_0) \vec{V}_{1,j} - (B_1 + C_1 \bar{B}_0) \vec{V}_{2,j} - \\ - \vec{V}_{1,j-1} - C_1 \bar{C}_0 \vec{V}_{0,j}(\phi) + D_1 \vec{V}_{1,j}(Pq); \\ \vec{V}_{i,j+1} = -B_1 \vec{V}_{i+1,j} + A_1 \vec{V}_{i,j} - C_1 \vec{V}_{i-1,j} - \\ - \vec{V}_{i,j-1} + D_1 \vec{V}_{i,j}(Pq); \\ \vec{V}_{N-1,j+1} = (-B_1 \bar{A}_N + A_1) \vec{V}_{N-1,j} - \\ - (B_1 \bar{B}_N + C_1) \vec{V}_{N-2,j} - \vec{V}_{N-1,j-1} - \\ - B_1 \bar{C}_N \vec{V}_{N,j}(\phi) + D_1 \vec{V}_{N-1,j}(Pq) \end{cases} \quad (24)$$

В системе уравнений (24) еще не учитывается начальные условия. Для замыкания задачи необходимо учитывать начальные условия (3).

4. Аппроксимация начальных условий

Из начальных условий (3) имеем

$$\bar{T} \left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \vec{\alpha}; \quad \vec{V} \Big|_{t=t_0} = \vec{\beta} \quad (25)$$

где $\vec{\alpha}$ – скорость, $\vec{\beta}$ – перемещение.

Перепишем выражения (25) в конечно-разностном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}}{2\tau} (\vec{V}_{i,j+1} - \vec{V}_{i,j-1}) \Big|_{t=t_0} &= \vec{\alpha}_{i,j}; \\ \vec{V}_{i,j} \Big|_{t=t_0} &= \vec{\beta}_{i,j} \end{aligned} \quad (26)$$

так как $t=0$ соответствует $j=0$, тогда из разностных уравнений (26) получим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}}{2\tau} (\vec{V}_{i,1} - \vec{V}_{i,-1}) &= \vec{\alpha}_{i,0}; \\ \vec{V}_{i,-1} = \vec{V}_{i,1} - 2\tau \cdot \bar{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{i,0}; \quad \vec{V}_{i,0} &= \vec{\beta}_{i,0} \end{aligned} \quad (27)$$

В дальнейшем для формирования задачи Коши для уравнений движения шпинделей на основе метода конечных разностей используется соотношения (27).

Из конечно-разностного уравнения (4) при $j=0$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{T}{\tau^2} (\vec{V}_{i,1} - 2\vec{V}_{i,0} + \vec{V}_{i,-1}) + \frac{A}{h^2} (\vec{V}_{i+1,0} - 2\vec{V}_{i,0} + \vec{V}_{i-1,0}) + \\ + \frac{B}{2h} (\vec{V}_{i+1,0} - \vec{V}_{i-1,0}) + C\vec{V}_{i,0} = D\vec{V}_{i,0}(Pq) \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнение (28) делится на $\frac{T}{\tau^2}$:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{i,1} - 2\vec{V}_{i,0} + \vec{V}_{i,-1}) + \frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} (\vec{V}_{i+1,0} - 2\vec{V}_{i,0} + \vec{V}_{i-1,0}) + \\ + \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} (\vec{V}_{i+1,0} - \vec{V}_{i-1,0}) + C\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,0} = \\ = D\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,0}(Pq) \end{aligned}$$

При $j=0$ принимаются так, $\vec{V}_{i,0} = \vec{\beta}_{i,0}$ здесь $\vec{\beta}_{i,0}$ получаются из начальных условий (27).

$$\begin{aligned} 2\vec{V}_{i,1} = & \left(\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} + \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} \right) \vec{\beta}_{i+1,0} + \\ & + \left(2E + \frac{2A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - C\tau^2 T^{-1} \right) \vec{\beta}_{i,0} - \\ & - \left(\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} \right) \vec{\beta}_{i-1,0} + \\ & + 2\tau \bar{T}^{-1} \vec{\alpha}_{i,0} + D\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,0}(Pq) \end{aligned} \quad (29)$$

где E – единичная матрица шестого порядка.

Теперь вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} + \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} \right); \\ \bar{B} &= \left(2E + \frac{2A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - C\tau^2 T^{-1} \right); \\ \bar{C} &= \left(\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} \right); \\ \bar{D} &= 2\tau \cdot \bar{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{i,0} + D\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,0}(Pq). \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом выше приведенных обозначений (30) перепишем уравнение (29).

$$2\vec{V}_{i,1} = -\bar{A}\vec{\beta}_{i+1,0} + \bar{B}\vec{\beta}_{i,0} - \bar{C}\vec{\beta}_{i-1,0} + \bar{D}$$

или

$$\vec{V}_{i,1} = \frac{1}{2} \left[-\bar{A}\vec{\beta}_{i+1,0} + \bar{B}\vec{\beta}_{i,0} - \bar{C}\vec{\beta}_{i-1,0} + \bar{D} \right]$$

Теперь перепишем уравнение (4) при $j=1$

$$\begin{aligned} \frac{T}{\tau^2} (\vec{V}_{i,2} - 2\vec{V}_{i,1} + \vec{V}_{i,0}) + \frac{A}{h^2} (\vec{V}_{i+1,1} - 2\vec{V}_{i,1} + \vec{V}_{i-1,1}) + \\ + \frac{B}{2h} (\vec{V}_{i+1,1} - \vec{V}_{i-1,1}) + C\vec{V}_{i,1} = D\vec{V}_{i,1}(Pq) \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнение (31) делится на $\frac{T}{\tau^2}$:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{i,2} - 2\vec{V}_{i,1} + \vec{V}_{i,0}) + \frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} (\vec{V}_{i+1,1} - 2\vec{V}_{i,1} + \vec{V}_{i-1,1}) + \\ + \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} (\vec{V}_{i+1,1} - \vec{V}_{i-1,1}) + C\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,1} = \\ = D\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,1}(Pq) \end{aligned} \quad (32)$$

Как видно, при $j=1$ в уравнении (32) участвует $\vec{V}_{i,0}$. Заменяя этот параметр с $\vec{\beta}_{i,0}$ перепишем уравнение (32):

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{i,2} - 2\vec{V}_{i,1} + \vec{\beta}_{i,0}) + \frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} (\vec{V}_{i+1,1} - 2\vec{V}_{i,1} + \vec{V}_{i-1,1}) + \\ + \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h} (\vec{V}_{i+1,1} - \vec{V}_{i-1,1}) + C\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,1} = \\ = D\tau^2 T^{-1} \vec{V}_{i,1}(Pq) \end{aligned} \quad (33)$$

Из уравнения (33) определяем $\vec{V}_{i,2}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i,2} = & -\left(\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} + \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h}\right)\vec{V}_{i+1,1} + \\ & + \left(2E + \frac{2A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - C\tau^2 T^{-1}\right)\vec{V}_{i,1} - \\ & - \left(\frac{A\tau^2 T^{-1}}{h^2} - \frac{B\tau^2 T^{-1}}{2h}\right)\vec{V}_{i-1,1} - (\vec{\beta}_{i,0} - D\tau^2 T^{-1}\vec{V}_{i,1}(Pq)) \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь вводим следующее обозначение:

$$\vec{D} = \vec{\beta}_{i,0} - D\tau^2 T^{-1}\vec{V}_{i,1}(Pq). \quad (35)$$

С учетом вышеприведенного обозначения (30) и (35) перепишем систему уравнений (34).

$$\vec{V}_{i,2} = -\vec{A}\vec{V}_{i+1,1} + \vec{B}\vec{V}_{i,1} - \vec{C}\vec{V}_{i-1,1} - \vec{D}$$

Остальные значения $\vec{V}_{i,j}$ при $j \geq 2$ определяются с помощью рекуррентной формулы (8).

Таким образом, с учетом начальных условий при $j = 0$:

$$\vec{V}_{i,1} = \frac{1}{2} \left[-\vec{A}\vec{\beta}_{i+1,0} + \vec{B}\vec{\beta}_{i,0} - \vec{C}\vec{\beta}_{i-1,0} + \vec{D} \right] \quad (36)$$

при $j = 1$:

$$\vec{V}_{i,2} = -\vec{A}\vec{V}_{i+1,1} + \vec{B}\vec{V}_{i,1} - \vec{C}\vec{V}_{i-1,1} - \vec{D} \quad (37)$$

при $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i,j+1} = & -B_1\vec{V}_{i+1,j} + A_1\vec{V}_{i,j} - C_1\vec{V}_{i-1,j} - \vec{V}_{i,j-1} + \\ & + D_1\vec{V}_{i,j}(Pq) \end{aligned} \quad (38)$$

В системе уравнений (24) еще не учитываются начальные условия. Для замыкания задачи необходимо учитывать начальные условия (3). Тогда, при $j = 0$:

$$\begin{cases} \vec{V}_{1,1} = (A_1 - C_1\vec{A}_0)\vec{V}_{1,0} - (B_1 + C_1\vec{B}_0)\vec{V}_{2,0} - \\ - \vec{V}_{1,-1} - C_1\vec{C}_0\vec{V}_{0,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{1,0}(Pq); \\ \vec{V}_{i,1} = -B_1\vec{V}_{i+1,0} + A_1\vec{V}_{i,0} - C_1\vec{V}_{i-1,0} - \\ - \vec{V}_{i,-1} + D_1\vec{V}_{i,0}(Pq); \\ \vec{V}_{N-1,1} = (-B_1\vec{A}_N + A_1)\vec{V}_{N-1,0} - \\ - (B_1\vec{B}_N + C_1)\vec{V}_{N-2,0} - \vec{V}_{N-1,-1} - \\ - B_1\vec{C}_N\vec{V}_{N,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{N-1,0}(Pq) \end{cases} \quad (39)$$

Используя равенства (26) имеем:

$$\vec{V}_{i,-1} = \vec{V}_{i,1} - 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{i,0}.$$

При этом,

$$\begin{cases} \vec{V}_{1,1} = (A_1 - C_1\vec{A}_0)\vec{V}_{1,0} - (B_1 + C_1\vec{B}_0)\vec{V}_{2,0} - \\ - (\vec{V}_{1,1} - 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{1,0}) - C_1\vec{C}_0\vec{V}_{0,0}(\varphi) + \\ + D_1\vec{V}_{1,0}(Pq); \\ \vec{V}_{i,1} = -B_1\vec{V}_{i+1,0} + A_1\vec{V}_{i,0} - C_1\vec{V}_{i-1,0} - \\ - (\vec{V}_{i,1} - 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{i,0}) + D_1\vec{V}_{i,0}(Pq); \\ \vec{V}_{N-1,1} = (-B_1\vec{A}_N + A_1)\vec{V}_{N-1,0} - \\ - (B_1\vec{B}_N + C_1)\vec{V}_{N-2,0} - (\vec{V}_{N-1,1} - 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{N-1,0}) - \\ - B_1\vec{C}_N\vec{V}_{N,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{N-1,0}(Pq) \end{cases} \quad (40)$$

Приведем подобные слагаемые и получим:

$$\begin{cases} \vec{V}_{1,1} = ((A_1 - C_1\vec{A}_0)\vec{\beta}_{1,0} - (B_1 + C_1\vec{B}_0)\vec{\beta}_{2,0} + \\ + 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{1,0} - C_1\vec{C}_0\vec{V}_{0,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{1,0}(Pq))/2; \\ \vec{V}_{i,1} = (-B_1\vec{\beta}_{i+1,0} + A_1\vec{\beta}_{i,0} - C_1\vec{\beta}_{i-1,0} + \\ + 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{i,0} + D_1\vec{V}_{i,0}(Pq))/2; \\ \vec{V}_{N-1,1} = ((-B_1\vec{A}_N + A_1)\vec{\beta}_{N-1,0} - \\ - (B_1\vec{B}_N + C_1)\vec{\beta}_{N-2,0} + 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{N-1,0} - \\ - B_1\vec{C}_N\vec{V}_{N,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{N-1,0}(Pq))/2 \end{cases} \quad (41)$$

Теперь перепишем систему уравнений (24) при $j = 1$:

$$\begin{cases} \vec{V}_{1,2} = (A_1 - C_1\vec{A}_0)\vec{V}_{1,1} - (B_1 + C_1\vec{B}_0)\vec{V}_{2,1} - \\ - \vec{\beta}_{1,0} - C_1\vec{C}_0\vec{V}_{0,1}(\varphi) + D_1\vec{V}_{1,1}(Pq); \\ \vec{V}_{i,2} = -B_1\vec{V}_{i+1,1} + A_1\vec{V}_{i,1} - C_1\vec{V}_{i-1,1} - \\ - \vec{\beta}_{i,0} + D_1\vec{V}_{i,1}(Pq); \\ \vec{V}_{N-1,2} = (-B_1\vec{A}_N + A_1)\vec{V}_{N-1,1} - \\ - (B_1\vec{B}_N + C_1)\vec{V}_{N-2,1} - \vec{\beta}_{N-1,0} - \\ - B_1\vec{C}_N\vec{V}_{N,1}(\varphi) + D_1\vec{V}_{N-1,1}(Pq) \end{cases} \quad (42)$$

5. Этапы вычислений

Таким образом, получим следующие конечно-разностные уравнения движения шпинделей при пространственно – динамическом нагружении: при $i = 1, j = 0$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1,1} = & ((A_1 - C_1\vec{A}_0)\vec{\beta}_{1,0} - (B_1 + C_1\vec{B}_0)\vec{\beta}_{2,0} + \\ & + 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{1,0} - C_1\vec{C}_0\vec{V}_{0,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{1,0}(Pq))/2 \end{aligned} \quad (43)$$

при $i = i, j = 0$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i,1} = & (-B_1\vec{\beta}_{i+1,0} + A_1\vec{\beta}_{i,0} - C_1\vec{\beta}_{i-1,0} + \\ & + 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{i,0} + D_1\vec{V}_{i,0}(Pq))/2 \end{aligned} \quad (44)$$

при $i = N - 1, j = 0$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N-1,1} = & ((-B_1\vec{A}_N + A_1)\vec{\beta}_{N-1,0} - \\ & - (B_1\vec{B}_N + C_1)\vec{\beta}_{N-2,0} + 2\tau \cdot \vec{T}^{-1} \cdot \vec{\alpha}_{N-1,0} - \\ & - B_1\vec{C}_N\vec{V}_{N,0}(\varphi) + D_1\vec{V}_{N-1,0}(Pq))/2 \end{aligned} \quad (45)$$

при $i = 1, j = 1$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1,2} = & (A_1 - C_1\vec{A}_0)\vec{V}_{1,1} - (B_1 + C_1\vec{B}_0)\vec{V}_{2,1} - \\ & - \vec{\beta}_{1,0} - C_1\vec{C}_0\vec{V}_{0,1}(\varphi) + D_1\vec{V}_{1,1}(Pq) \end{aligned} \quad (46)$$

при $i = i, j = 1$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i,2} = & -B_1\vec{V}_{i+1,1} + A_1\vec{V}_{i,1} - C_1\vec{V}_{i-1,1} - \\ & - \vec{\beta}_{i,0} + D_1\vec{V}_{i,1}(Pq) \end{aligned} \quad (47)$$

при $i = N - 1, j = 1$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N-1,2} = & (-B_1\vec{A}_N + A_1)\vec{V}_{N-1,1} - \\ & - (B_1\vec{B}_N + C_1)\vec{V}_{N-2,1} - \vec{\beta}_{N-1,0} - \\ & - B_1\vec{C}_N\vec{V}_{N,1}(\varphi) + D_1\vec{V}_{N-1,1}(Pq) \end{aligned} \quad (48)$$

при $i = 1, j \geq 2$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1,j+1} = & (A_1 - C_1 \bar{A}_0) \vec{V}_{1,j} - \\ & -(B_1 + C_1 \bar{B}_0) \vec{V}_{2,j} - \\ & -\vec{V}_{1,j-1} - C_1 \bar{C}_0 \vec{V}_{0,j}(\phi) + \\ & + D_1 \vec{V}_{1,j}(Pq) \end{aligned} \quad (49)$$

при $i = i, j \geq 2$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i,j+1} = & -B_1 \vec{V}_{i+1,j} + \\ & + A_1 \vec{V}_{i,j} - C_1 \vec{V}_{i-1,j} - \\ & -\vec{V}_{i,j-1} + D_1 \vec{V}_{i,j}(Pq) \end{aligned} \quad (50)$$

при $i = N - 1, j \geq 2$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{N-1,j+1} = & (-B_1 \bar{A}_N + A_1) \vec{V}_{N-1,j} - \\ & -(B_1 \bar{B}_N + C_1) \vec{V}_{N-2,j} - \vec{V}_{N-1,j-1} - \\ & -B_1 \bar{C}_N \vec{V}_{N,j}(\phi) + D_1 \vec{V}_{N-1,j}(Pq) \end{aligned} \quad (51)$$

В общем виде компьютерная реализация разработанного вычислительного алгоритма выполняется на основе следующих этапов вычислений:

1. Вводятся исходные данные
2. $j = 0$
3. Решаются уравнения (43), (44) и (45)
4. $j = 1$
5. Решаются уравнения (46), (47) и (48)
6. $j = j + 1$
7. $j < M$ если условие выполняется, то переходит на 8, иначе к пункту 10
8. Решаются уравнения (49), (50) и (51)
9. Перейти к пункту 6
10. Конец.

6. Тестовая задача

В качестве примера решаем краевую задачу элементов конструкций, типа шпинделей уборочного аппарата при пространственно – динамическом нагружении.

Нижняя часть шпинделя закреплена во втулке, а верхняя часть закреплена посредством подшипника. При этом элементы вектора перемещений \vec{V} в границах принимаются так:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} \neq 0; u|_{x=N} = 0; \\ \theta|_{x=0} \neq 0; \theta|_{x=N} \neq 0; \end{aligned}$$

значения остальных элементов вектора перемещений \vec{V} равняются нулю.

Краевая задача (1) – (3) решается при следующих исходных данных:

- геометрические и механические характеристики шпинделя: длина $L = 63,5 \text{ см}$; внешний радиус $R = 1,15 \text{ см}$; внутренний радиус $r = 0,75 \text{ см}$; модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$;
- вектор объемных и поверхностных сил:

$$\vec{V}(Pq) = \begin{pmatrix} N_x(P_1) \\ Q_{12}(P_2) \\ Q_{13}(P_3) \\ M_y(P_1) \\ M_z(P_1) \\ M_x(P_2, P_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P^{sh} \cdot L \cdot \bar{x} \\ \left(\Phi_n^{L+b} \cdot F \cdot L \cdot \bar{x} \right) \cdot \cos \alpha \\ \left(\Phi_n^{L+b} \cdot F \cdot L \cdot \bar{x} \right) \cdot \sin \alpha \\ -R_B \cdot L \cdot \bar{x} \cdot \cos \alpha + \Phi_n^{L+b} \cdot F \cdot L^2 \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} \cdot \cos \alpha \\ -R_B \cdot L \cdot \bar{x} \cdot \sin \alpha + \Phi_n^{L+b} \cdot F \cdot L^2 \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

- вектор торцевых сил (при $x = 0$):

$$\vec{V}_0(\phi) = \begin{pmatrix} N_x(\phi_1) \\ Q_{12}(\phi_2) \\ Q_{13}(\phi_3) \\ M_y(\phi_1) \\ M_z(\phi_1) \\ M_x(\phi_2, \phi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \cdot \cos \alpha \\ R_B \cdot \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- вектор торцевых сил (при $x = N$):

$$\vec{V}_N(\phi) = \begin{pmatrix} P^{sh} \\ R_A \cdot \cos \alpha \\ R_A \cdot \sin \alpha \\ \left(-R_B \cdot L + \Phi_n^{L+b} \cdot F \cdot \frac{L^2}{2} \right) \cos \alpha \\ \left(-R_B \cdot L + \Phi_n^{L+b} \cdot F \cdot \frac{L^2}{2} \right) \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

где

P^{sh} – удельный вес;

R_A, R_B – силы реакций:

$$\begin{cases} R_B = \frac{\Phi_n^{L+b}(L - x_0)}{L}; \\ R_A = \frac{\Phi_n^{L+b} x_0}{L}; \end{cases}$$

x_0 – центр тяжести; а нормальная или центробежная сила инерции $-\Phi_n^{L+b}$ определяется так [12]:

$$\bar{\Phi}_n = -m \bar{a}_n;$$

здесь \bar{a}_n – нормальное ускорение, m – масса тела.

На основе выше приведенного вычислительного алгоритма и компьютерная реализации решается тестовая задача при первом обороте шпиндельного барабана в первой открытой зоне. Полученные результаты приводятся в виде таблиц и графиков.

Таблица 1.

Численные результаты элементов вектора перемещений при $t = 0.01667c$

По длине шпинделя (x)	u	v	w
0,0	0,000018482	0,000000000	0,000000000
0,1	0,000027680	0,005357191	0,003095529
0,2	0,000055276	0,005773856	0,003335892
0,3	0,000082914	0,005774024	0,003335949
0,4	0,000110552	0,005774024	0,003335948
0,5	0,000138190	0,005774024	0,003335948
0,6	0,000165828	0,005774024	0,003335948
0,7	0,000193467	0,005774027	0,003335952
0,8	0,000221171	0,005777259	0,003339021
0,9	0,000277673	0,005924153	0,003230220
1,0	0,000000000	0,000000000	0,000000000

На основе полученных численных результатов построены эпюры перемещений u , v и w по длине шпинделя при $t = 0.01667c$ (рис. 1).

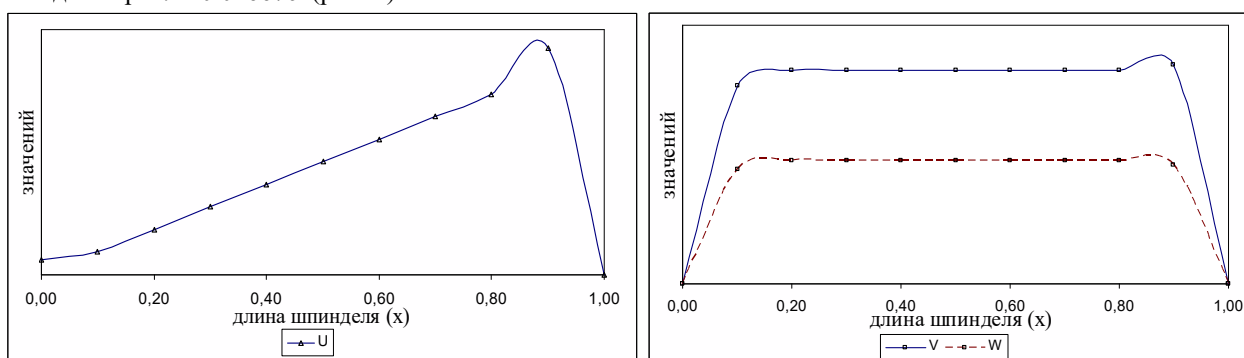


Рис.1. Кинетика изменений напряженно – деформированного состояния шпинделя при пространственно динамическом нагружении. U – продольное перемещение; V, W – поперечные перемещения

7. Заключение

Итак, рассматриваемая задача сформулирована в виде алгебраических уравнений. При этом начальные условия участвуют в алгебраических уравнениях (43)-(48). От влияния начальных условий освобождаемся при подходе к уравнениям (49)-(51). Здесь внутренним циклом является параметр i (i – координаты поперечного сечения относительно оси OX), а внешним циклом – j (время).

Разработанные алгебраические уравнения (43)-(51) являются общей аналогией математической

модели динамического расчета шпинделей уборочных аппаратов при сложных нагружениях.

В дальнейших исследованиях на основе краевой задача (43)-(51) будут выполнены динамические расчеты шпинделей уборочных аппаратов в «холостом» и «рабочем» ходе движений, при этом в (43)-(51) будут учитываться разные виды нагружений шпинделей: давление, трение ремней и колодок, процесс реверсии, сопротивление кустов хлопчатника и давление съемника с различными значениями при $k = 1, 2, \dots, N$ -м рабочем цикле.

Работа выполнена в рамках межведомственного фундаментального проекта БФ–1–023 (2017-2020 гг.).

Литература

- [1] Сабликов М.В. Хлопкоуборочные машины. – М.: Агропромиздат, 1985. – 152 с.
- [2] Иногамов К.М. Исследование геометрии шпинделей хлопкоуборочных машин. Автореферат канд. дисс. – Т.: 1969. – 20 с.
- [3] Глуценко А.Д. Динамика механизмов привода шпинделей уборочных аппаратов хлопкоуборочных машин – Т.: Фан, 1985. – 154 с.
- [4] Глуценко А.Д., Ташиболтаев М.Т. Динамика узлов вращения уборочных аппаратов хлопкоуборочных машин. – Т.: Фан, 1990. – 138 с.
- [5] Глуценко А.Д., Ризаев А.А. Моделирование динамических взаимодействий долек хлопка и шпинделей в хлопкоуборочных аппаратах. – Т.: Фан, 1995. – 131 с.
- [6] Туранов Х.Т. Колебания и нагруженность составных валов барабанного типа некоторых хлопковых машин. – Т.: Фан, 1982. – 168 с.

- [7] *Коростылев В.А.* Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. к.т.н., Оптимизация захватывающего элемента составного шпинделя хлопкоуборочной машины по критерию минимального веса с учетом динамических характеристик рабочего процесса. – Т.: 1983. – 20 с.
- [8] *Юлдашев Т., Исомиддинов А.И.* Вывод дифференциальных уравнений колебания стержней типа шпинделя уборочного аппарата при пространственном нагружении. // Журнал. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – №1 (7). – С. 74-85.
- [9] *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 532 с.
- [10] *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы (Введение в теорию). – М.: Наука, 1977. – 440 с.
- [11] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
- [12] *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики: Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец вузов. – 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.