УДК 004.4

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

[1]***Халджигитов А. А.***, [2]***Бабаджанов М. Р.***, [2]***Худазаров Р. С.***
[1]akhald@mail.ru; [2]mum1975@mail.ru
[1] Самаркандский филиал Ташкентский университет информационных технологии ул. Шохрух Мирзо 47А, Самарканд, 140100, Узбекистан;
[2] Ташкентского университета информационных технологии ул. Амира Темура 108, Ташкент, 100200, Узбекистан;

Обычно для численного решения упругопластических краевых задач на основе деформационной теории пластичности используется метод упругих решений. Для численного решения упругопластических задач, основанных на теории течения, обычно применяются метод начальных напряжений и метод начальных деформаций. Основу методов начальных напряжений и начальных деформаций, также составляют метод упругих решений. В данной работе используется новый подход численного решения упругопластической задачи на основе деформационной теории. Основная идея этого подхода заключается в построении конечно-разностных уравнений отдельно для внутренних и граничных узлов рассматриваемой области, их разрешении относительно узловых перемещений и организации итерационного процесса. Решены некоторые упругопластические задачи для изотропного и трансверсально-изотропного параллелепипеда при различных краевых и граничных условиях. Результаты были сопоставлены с известными решениями и получено хорошая сходимость. Исследованы распространение зоны пластичности и влияние анизотропии на их распределение.

Ключевые слова: численный метод, метод упругих решений, упругопластическая краевая задача, деформационная теория, изотропный и трансверсально-изотропный материал.

Цитирование: *Халджигитов А. А., Бабаджанов М. Р., Худазаров Р. С.* Об одном подходе численного решения упругопластических краевых задач // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 3(21). — С. 75–86.

1 Введение

Основными методами решения упругопластических краевых задач являются метод конечных разностей [1, 2], метод вариационных разностей [3, 4], метод конечных элементов (МКЭ) [5], метод граничных элементов (МГЭ) [6], и другие. Можно обратить внимание, что эти методы отличаются друг от друга методами дискретизации указанной области. Когда область постановки краевых задач имеет сложную форму, удобно использовать методы МКЭ и МГЭ. Метод конечных элементов широко используется при решении различных прикладных задач. Были разработаны различные пакеты программного обеспечения, такие как ADINA, ANSYS, COSMOSM и другие, основанные на методе конечных элементов. Метод упругих решений был разработан А. А. Ильюшиным [7] вместе с деформационной теории пластичности стал более широко использоваться при численном решении упругопластических задач.

Для численного решения упругопластических краевых задач используется ряд методов, таких как метод начальных деформаций, метод начальных напряжений, основанный на теории пластического течения, но также основанный на методе упругих решений. Метод упругих решений позволяет свести упругопластическую краевую задачу к последовательности упругих задач с переменной правой частью в уравнениях.

В этой статье рассматривается модифицированный вариант метода упругих решений для решения упругопластических краевых задач. Для простоты рассмотрим упругопластические краевые задачи, основанной на деформационной теории для изотропного [7] и трансверсально-изотропного параллелепипеда [8].

Отметим, что аналогичные задачи в упругом и упругопластическом случае были решены в работах Филоненко-Бородича [9], Победри [3] и др. Упругопластическая краевая задача основанная на деформационной теории пластичности, обычно состоит из уравнения равновесия, теории пластичности, которая определяет связь между напряжением и деформацией, соотношения Коши, с соответствующими краевыми и граничными условиями. Задача может быть сведена к системе трех нелинейных уравнений относительно перемещений.

Если мы пренебрегаем нелинейными членами из этих уравнений, уравнение Ламе следует. Обычно, согласно методу упругих решений [7], в начальном приближении они считаются тривиальными, а последующие итерации нелинейных членов вычисляются по упругому решению. Нелинейные члены можно рассматривать как объёмные силы. Суть этого подхода заключается в построении конечно-разностных уравнений отдельно для внутренних узловых точек и граничных условий для данной области и их разрешении относительно узловых смещений, а также в организации итерационного процесса. В этом случае начальные значения перемещений считаются равными нулю. Этот подход был использован авторами для решения задач теории упругости и термоупругости [10–14], при различных граничных условиях.

В качестве примера рассмотрим изотропный и трансверсально-изотропный упругопластический параллелепипед под действием куполообразной нагрузки, приложенной к противоположным граням, перпендикулярным оси OX. Результаты были сопоставлены с известными решениями и показана их достаточная близость. Исследованы распространение зоны пластичности и влияние анизотропии на их распределение.

2 Краевые задачи теории пластичности на основе деформационной теории для изотропных и трансверсально изотропных материалов

Упругопластическая краевая задача, основанная на деформационной теории пластичности, состоит из:

– Уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{1}$$

– Определяющего соотношения деформационной теории Ильюшина [7]

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij} \tag{2}$$

где

$$\sigma = (\lambda + \frac{2\mu}{3})\theta, \ \ \sigma_u = \sigma_u\left(\varepsilon_u\right) \tag{3}$$

– Соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{4}$$

– с начальными и краевами условиями

$$u_i|_{\sum} = u_i^0, \qquad \sigma_{ij} n_j|_{\sum} = S_i^0 \tag{5}$$

где λ, μ - коэффициенты Ляме, θ - девиатор тензора деформации, X_i - объемная сила, δ_{ij} - символ Кронекера. В уравнении (2) в случае кусочно-линейной диаграммы деформирования значение напряжения σ_{ij} может быть заменено выражением

$$\sigma_u = 2\mu\varepsilon_u - 2(\mu - \mu')(\varepsilon_u - \varepsilon_u^*) \tag{6}$$

где μ'– касательный модуль, σ_u, ε_u– интенсивности тензора напряжения и деформации. С учетом последнего соотношения (6) определяющие соотношения деформационной теории пластичности принимают вид:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} - 2(\mu - \mu^{'})(1 - \tfrac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{11} \\
\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} - 2(\mu - \mu^{'})(1 - \tfrac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{22} \\
\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} - 2(\mu - \mu^{'})(1 - \tfrac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{33} \\
\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} - 2(\mu - \mu^{'})(1 - \tfrac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{12} \\
\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} - 2(\mu - \mu^{'})(1 - \tfrac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{13} \\
\sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} - 2(\mu - \mu^{'})(1 - \tfrac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{23}
\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя уравнения (6) и уравнение (2) в уравнение (1) получаем

$$\begin{cases}
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) - F_1 = 0 \\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right) - F_2 = 0 \\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial z}\right) - F_3 = 0
\end{cases} \tag{8}$$

где F_i при $\varepsilon_u \geqslant \varepsilon_u^*$ имеет следующую форму:

$$F_i = 2(\mu - \mu^{'})\tfrac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}$$

Определяющее соотношение (2 - 3) в случае трансверсально-изотропных материалов принимают вид:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}\,(\delta_{ij} - \delta_{3i}\delta_{3j}) + \sigma_{33}\delta_{3i}\delta_{3j} + \frac{P_u}{p_u}p_{ij} + \frac{Q_u}{q_u}q_{ij} \tag{9}$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= (\lambda_1 + \lambda_2)\,\tilde{\theta} + \lambda_3\varepsilon_{33} \\
\tilde{\theta} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\
\sigma_{33} &= \lambda_3\tilde{\theta} + \lambda_4\varepsilon_{33} \\
P_u &= P_u\,(p_u) \\
Q_u &= Q_u\,(q_u)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

и представляет собой деформационную теорию для трансверсально-изотропных материалов. В уравнениях (9-10) P_u, Q_u и p_u, q_u интенсивности тензора напряжений и деформации, соответственно.

По аналогии с выражением (6), в случае кусочно-линейной диаграммы P_u, Q_u могут быть представлены следующем виде:

$$
\begin{aligned}
P_u &= 2\lambda_2 p_u - 2(\lambda_2 - {\lambda_2}')(p_u - p_u^*) \\
Q_u &= 2\lambda_5 q_u - 2(\lambda_5 - {\lambda_5}')(q_u - q_u^*)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где

$$
p_u = \sqrt{\frac{1}{2}p_{ij}p_{ij}},\;\; q_u = \sqrt{q_{ij}q_{ij}},
$$

$$
p_{11} = \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} = -p_{22},\;\; p_{12} = \varepsilon_{12},\;\; q_{13} = \varepsilon_{13},\;\; q_{23} = \varepsilon_{23}
$$

Подставляя выражение (9) в уравнения (9 - 10) получаем определяющие соотношения деформационной теории для трансверсально-изотропных материалов в случае кусочно-линейной диаграммы деформирования:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - 2(\lambda_2 - {\lambda_2}')(1 - \frac{p^*}{p_u})p_{ij} - 2(\lambda_5 - {\lambda_5}')(1 - \frac{q^*}{q_u})q_{ij} \\
\text{при } p_u \geqslant p^*,\;\; q_u \geqslant q^*,
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где p^*, q^* - пределы упругости, C_{ijkl} - трансверсально-изотропный тензор четвертого ранга:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1 = C_{2211},\;\; \lambda_2 = C_{1212},\;\; \lambda_3 = C_{1133},\;\; \lambda_4 = C_{3333}, \lambda_5 = C_{1313}, \\
C_{1111} = C_{2222} = \lambda_1 + 2\lambda_2, C_{2233} = \lambda_3, C_{2323} = \lambda_5.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Подставляя соотношения (13) и (12) в уравнение (1) получаем:

$$
\begin{cases}
C_{1111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{1212}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{1313}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{1122} + C_{1212})\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\
\quad +(C_{1133} + C_{1313})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - F_1 = 0 \\
C_{1212}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2222}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{2323}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{2211} + C_{1212})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
\quad +(C_{2233} + C_{2323})\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - F_2 = 0 \\
C_{1313}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{2323}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{3333}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{3311} + C_{1313})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \\
\quad +(C_{3322} + C_{2323})\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - F_3 = 0
\end{cases}
\tag{14}
$$

где F_i - представляют нелинейную часть в рассматриваемой уравнений в следующих формах:

$$F_i = 2(\lambda_2 - \lambda_2^{'})(1 - \tfrac{p^*}{p_u})p_{ij} - 2(\lambda_5 - \lambda_5^{'})(1 - \tfrac{q^*}{q_u})q_{ij}.$$

Отметим, что уравнения (8, 14) рассматриваются для изотропных и трансверсально-изотропных параллелепипедов $\{0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3\}$, соответственно. Боковые поверхности параллелепипеда свободны от нагрузок, а на противоположных сторонах параллелепипеда, перпендикулярных оси OX, применяется куполообразная нагрузка, т.е.

Для построения сеточных уравнений рассмотрим три набора $x_i = ih_1$ $(i = \overline{0, N_1})$, $y_j = jh_2$ $(j = \overline{0, N_2})$, $z_k = kh_3$ $(k = \overline{0, N_3})$, параллельных линий где $h_1 = l_1/N_1$, $h_2 = l_2/N_2$, $h_3 = l_3/N_3$. Тогда, заменив производные в (1-5) на соответствующие конечно-разностные коэффициенты, получим

$$\begin{gathered}
C_{1111}\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u^n_{i-1,j,k}}{h_1^2} + C_{1212}\frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h_2^2} + \\
+ C_{1313}\frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h_3^2} + \\
+ (C_{1122} + C_{1212})\frac{v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k} - v_{i+1,j-1,k} + v_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2} + \\
+ (C_{1133} + C_{1313})\frac{w_{i+1,j,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i+1,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1}}{4h_1h_3} - F1_{ijk} = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
C_{1212}\frac{v_{i+1,j,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i-1,j,k}}{h_1^2} + C_{2222}\frac{v_{i,j+1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{h_2^2} + \\
+ C_{2323}\frac{v_{i,j,k+1} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j,k-1}}{h_3^2} + \\
+ (C_{2211} + C_{1212})\frac{u_{i+1,j+1,k} - u_{i-1,j+1,k} - u_{i+1,j-1,k} + u_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2} + \\
+ (C_{2233} + C_{2323})\frac{w_{i,j+1,k+1} - w_{i,j-1,k+1} - w_{i,j+1,k-1} + w_{i,j-1,k-1}}{4h_2h_3} - F2_{ijk} = 0,
\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
C_{1313}\frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{h_1^2} + C_{2323}\frac{w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}}{h_2^2} + \\
+ C_{3333}\frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{h_3^2} + \\
+ (C_{3311} + C_{1313})\frac{u_{i+1,j,k+1} - u_{i-1,j,k+1} - u_{i+1,j,k-1} + u_{i-1,j,k-1}}{4h_1h_3} + \\
+ (C_{3322} + C_{2323})\frac{v_{i,j+1,k+1} - v_{i,j-1,k+1} - v_{i,j+1,k-1} + v_{i,j-1,k-1}}{4h_1h_2} - F3_{ijk} = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Разрешая уравнения (15-17) конечно-разностным методом относительно $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$,$w_{i,j,k}$ организуем следующий итерационный процесс:

$$
\begin{gathered}
u_{i,j,k}^{(n+1)} = [\tfrac{c_{1111}}{h_1^2}(u_{i+1,j,k}^{(n)} - u_{i-1,j,k}^{(n)}) + \tfrac{c_{1212}}{h_2^2}(u_{i,j+1,k}^{(n)} + u_{i,j-1,k}^{(n)}) + \\
+ \tfrac{c_{1313}}{h_3^2}(u_{i,j,k-1}^{(n)} + u_{i,j,k+1}^{(n)}) + \tfrac{c_{1122}+c_{1212}}{4h_1h_2}(v_{i+1,j+1,k}^{(n)} - v_{i+1,j-1,k}^{(n)} - v_{i-1,j+1,k}^{(n)} + v_{i-1,j-1,k}^{(n)}) + \\
+ \tfrac{c_{1133}+c_{1313}}{4h_1h_3}(w_{i+1,j,k+1}^{(n)} - w_{i+1,j,k-1}^{(n)} - w_{i-1,j,k+1}^{(n)} + w_{i-1,j,k-1}^{(n)}) - F1_{i,j,k}]/ \\
/(\tfrac{2c_{1111}}{h_1^2} + \tfrac{2c_{1212}}{h_2^2} + \tfrac{2c_{1313}}{h_3^2})
\end{gathered} \tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
v_{i,j,k}^{(n+1)} = [\tfrac{c_{1212}}{h_1^2}(v_{i+1,j,k}^{(n)} + v_{i-1,j,k}^{(n)}) + \tfrac{c_{2222}}{h_2^2}(v_{i,j+1,k}^{(n)} + v_{i,j-1,k}^{(n)}) + \\
\tfrac{c_{2323}}{h_3^2}(v_{i,j,k+1}^{(n)} + v_{i,j,k-1}^{(n)}) + \tfrac{c_{2211}+c_{1212}}{4h_1h_2}(u_{i+1,j+1,k}^{(n)} - u_{i+1,j-1,k}^{(n)} - u_{i-1,j+1,k}^{(n)} + u_{i-1,j-1,k}^{(n)}) + \\
\tfrac{c_{2233}+c_{2323}}{4h_2h_3}(w_{i,j+1,k+1}^{(n)} - w_{i,j-1,k+1}^{(n)} - w_{i,j+1,k-1}^{(n)} + w_{i,j-1,k-1}^{(n)}) - F2_{i,j,k}]/ \\
/(\tfrac{2c_{1212}}{h_1^2} + \tfrac{2c_{2222}}{h_2^2} + \tfrac{2c_{1313}}{h_3^2})
\end{gathered} \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
w_{i,j,k}^{(n+1)} = [\tfrac{c_{1313}}{h_1^2}(w_{i+1,j,k}^{(n)} + w_{i-1,j,k}^{(n)}) + \tfrac{c_{2323}}{h_2^2}(w_{i,j+1,k}^{(n)} + w_{i,j-1,k}^{(n)}) + \\
+ \tfrac{c_{3333}}{h_3^2}(w_{i,j,k+1}^{(n)} + w_{i,j,k-1}^{(n)}) + \tfrac{c_{3311}+c_{1313}}{4h_1h_3}(u_{i+1,j,k+1}^{(n)} - u_{i+1,j,k-1}^{(n)} - u_{i-1,j,k+1}^{(n)} + \\
+ u_{i-1,j,k-1}^{(n)}) + \tfrac{c_{3322}+c_{2323}}{4h_2h_3}(v_{i,j+1,k+1}^{(n)} - v_{i,j-1,k+1}^{(n)} - v_{i,j+1,k-1}^{(n)} + v_{i,j-1,k-1}^{(n)}) - F3_{i,j,k}]/ \\
/(\tfrac{2c_{1313}}{h_1^2} + \tfrac{2c_{2323}}{h_2^2} + \tfrac{2c_{3333}}{h_3^2}).
\end{gathered} \tag{20}
$$

Следует отметить, что соотношения (18,20) рассматривается во внутренних точках параллелепипеда. Пусть боковые поверхности параллелепипеда свободны от нагрузок, а куполообразная нагрузка приложена вдоль противоположных сторон перпендикулярных к оси OX. Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена в упругой формулировке в работах [3, 9, 13, 15]. В упругопластической формулировке, рассмотрен в работе [8].

Теперь граничные условия запишем в конечно разностной форме. Следует отметить, что в граничных условиях первые производные перемещения заменяются правыми и левыми конечно-разностными соотношениями в зависимости от расположения узловых точек на границе. В качестве примера рассмотрим граничные условия на гранях, где приведены куполообразные нагрузки. Тогда дискретный аналог граничных условий на гранях, перпендикулярных оси OX (18), имеет вид:

$$\sigma_{11}\big|_{x=0}=\left.\begin{bmatrix} C_{1111}\frac{u(1,j,k)-u(0,j,k)}{h_1}+ \\ +C_{1122}\frac{v(0,j+1,k)-v(0,j-1,k)}{2h_2}+ \\ +C_{1133}\frac{w(0,j,k+1)-w(0,j,k-1)}{2h_3}- \\ -2(\lambda_2-\lambda_2{}')(1-\frac{p^*}{p_u})p_{11} \end{bmatrix}\right|_{x=0}=S$$

$$\sigma_{12}\big|_{x=0}=\begin{bmatrix} C_{1212}\left(\frac{u(0,j+1,k)-u(0,j-1,k)}{2h_2}+\frac{v(1,j,k)-v(0,j,k)}{h_1}\right)- \\ -2(\lambda_2-\lambda_2{}')(1-\frac{p^*}{p_u})p_{12} \end{bmatrix}_{x=0}=0 \qquad (21)$$

$$\sigma_{13}\big|_{x=0}=\begin{bmatrix} C_{1313}\left(\frac{u(0,j,k+1)-u(0,j,k-1)}{2h_3}+\frac{w(1,j,k)-w(0,j,k)}{h_1}\right)- \\ -2(\lambda_5-\lambda_5{}')(1-\frac{q^*}{q_u})q_{13} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11}\big|_{x=l_1}=\left.\begin{bmatrix} C_{1111}\frac{u(N_1,j,k)-u(N_1-1,j,k)}{h_1}+ \\ +C_{1122}\frac{v(N_1,j+1,k)-v(N_1,j-1,k)}{2h_2}+ \\ +C_{1133}\frac{w(N_1,j,k+1)-w(N_1,j,k-1)}{2h_3}- \\ -2(\lambda_2-\lambda_2{}')(1-\frac{p^*}{p_u})p_{11} \end{bmatrix}\right|_{x=l_1}=-S$$

$$\sigma_{12}\big|_{x=l_1}=\begin{bmatrix} C_{1212}\begin{pmatrix} \frac{u(N_1,j+1,k)-u(N_1,j-1,k)}{2h_2}+ \\ -\frac{v(N_1,j,k)-v(N_1-1,j,k)}{h_1} \end{pmatrix}- \\ -2(\lambda_2-\lambda_2{}')(1-\frac{p^*}{p_u})p_{12} \end{bmatrix}_{x=l_1}=0 \qquad (22)$$

$$\sigma_{13}\big|_{x=l_1}=\begin{bmatrix} C_{1313}\begin{pmatrix} \frac{u(N_1,j,k+1)-u(N_1,j,k-1)}{2h_3}+ \\ +\frac{w(N_1,j,k)-w(N_1-1,j,k)}{h_1} \end{pmatrix}- \\ -2(\lambda_5-\lambda_5{}')(1-\frac{q^*}{q_u})q_{13} \end{bmatrix}_{x=l_1}=0.$$

Граничные условия для перемещений не вызывают особых усилий. Начальное приближение итерационного процесса считается тривиальным. На основе описанного алгоритма разработан программное обеспечение на языке C ++ где упругие константы имели следующие значения:

$$\mathrm{C}_{1111}{=}\mathrm{C}_{2222}{=}6.00,\quad C_{1122}=0.21,\quad C_{1133}=0.19,\quad \mathrm{C}_{2233}=\mathrm{C}_{3311}= \\ =0.19, C_{3333}{=}5.35,\quad \mathrm{C}_{1212}=2.735,\quad C_{1313}=C_{2323}=2.39.$$

В таблице 1 приведены точные и приближенные решения задачи о сжатие параллелепипеда. В таблице 2 приведены значения компонентов тензора напряжений в некоторых точках параллелепипеда полученных методом упругих решений.

Заметим что, задача является симметричной и свое максимальное значения достигается в середине параллелепипеда, в граничных узлах значения перемещения равно нулю. Предел текучести равна 0,1. Ниже приводятся значения перемешений (табл. 3-5) и напряжений по сечениям.

Исследованы распространение зоны пластичности и влияние анизотропии на их распределение (табл. 6-8).

Таблица 1 Значения перемещений в задаче о сжатие параллелепипеда.

Методы	U(3.4.3)	V(3.2.1)	W(3.5.4)
Одноступенчатый метод	4.79-02	-8.05-03	-7.55-04
Двухступенчатый метод	4.80-02	-8.19-03	-7.56-04
Метод упругих решений	4.79-02	-8.03-03	-7.55-04
В нашем случае	4.55-02	-8.09-03	-7.36-04
Приближённое решение	1.18-01	-2.48-02	-3.02-03
Точное решение	1.21-01	-2.53-02	-2.99-03

Таблица 2 Значения компонентов тензора напряжений.

I.J.K	$\sigma_{11}(1,5,5)$	$\sigma_{22}(1,3,5)$	$\sigma_{33}(1,3,4)$
Метод упругих решений	-3.76	-0.578	-0.765
Одноступенчатый метод	-3.76	-0.578	-0.776
Двухступенчатый метод	-3.75	-0.582	-0.765
Упругое решение	-3.77	-0.489	-0.642
В нашем случае	-3.75	-0.3974	-0.5218

Таблица 3 Значения функции u(y,z) при $\varepsilon = 0.001$.

	z=0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1
y=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0	0,0365	0,132	0,25	0,3455	0,382	0,3455	0,25	0,132	0,0365	0
y=0.2	0	0,132	0,4775	0,9045	1,25	1,382	1,25	0,9045	0,4775	0,132	0
y=0.3	0	0,25	0,9045	1,7135	2,368	2,618	2,368	1,7135	0,9045	0,25	0
y=0.4	0	0,3455	1,25	2,368	3,27257	3,618	3,2725	2,368	1,25	0,3455	0
y=0.5	0	0,382	1,382	2,618	3,618	4	3,618	2,618	1,382	0,382	0
y=0.6	0	0,3455	1,25	2,368	3,2725	3,618	3,2725	2,368	1,25	0,3455	0
y=0.7	0	0,25	0,9045	1,7135	2,368	2,618	2,368	1,7135	0,9045	0,25	0
y=0.8	0	0,132	0,4775	0,9045	1,25	1,382	1,25	0,9045	0,4775	0,132	0
y=0.9	0	0,0365	0,132	0,25	0,3455	0,382	0,3455	0,25	0,132	0,0365	0
y=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4 Значения функции v(y,z) при $\varepsilon = 0.001$.

	z=0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1
y=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0	-0,019	-0,0434	-0,0709	-0,0928	-0,1011	-0,0928	-0,0709	-0,0434	-0,019	0
y=0.2	0	-0,0322	-0,0756	-0,1246	-0,1636	-0,1784	-0,1636	-0,1246	-0,0756	-0,0322	0
y=0.3	0	-0,0329	-0,0779	-0,1288	-0,1692	-0,1845	-0,1692	-0,1288	-0,0779	-0,0329	0
y=0.4	0	-0,0205	-0,0488	-0,0807	-0,106	-0,1156	-0,106	-0,0807	-0,0488	-0,0205	0
y=0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y=0.6	0	0,0205	0,0488	0,0807	0,106	0,1156	0,106	0,0807	0,0488	0,0205	0
y=0.7	0	0,0329	0,0779	0,1288	0,1692	0,1845	0,1692	0,1288	0,0779	0,0329	0
y=0.8	0	0,0322	0,0756	0,1246	0,1636	0,1784	0,1636	0,1246	0,0756	0,0322	0
y=0.9	0	0,019	0,0434	0,0709	0,0928	0,1011	0,0928	0,0709	0,0434	0,019	0
y=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 5 Значения функции w(y,z) при $\varepsilon = 0.001$.

	z=0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1
y=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0	-0,019	-0,032	-0,0326	-0,0203	0	0,0203	0,0326	0,032	0,019	0
y=0.2	0	-0,0418	-0,0724	-0,0745	-0,0465	0	0,0465	0,0745	0,0724	0,0418	0
y=0.3	0	-0,067	-0,1173	-0,1209	-0,0757	0	0,0757	0,1209	0,1173	0,067	0
y=0.4	0	-0,087	-0,1527	-0,1577	-0,0987	0	0,0987	0,1577	0,1527	0,087	0
y=0.5	0	-0,0946	-0,1662	-0,1717	-0,1075	0	0,1075	0,1717	0,1662	0,0946	0
y=0.6	0	-0,087	-0,1527	-0,1577	-0,0987	0	0,0987	0,1577	0,1527	0,087	0
y=0.7	0	-0,067	-0,1173	-0,1209	-0,0757	0	0,0757	0,1209	0,1173	0,067	0
y=0.8	0	-0,0418	-0,0724	-0,0745	-0,0465	0	0,0465	0,0745	0,0724	0,0418	0
y=0.9	0	-0,019	-0,032	-0,0326	-0,0203	0	0,0203	0,0326	0,032	0,019	0
y=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 6 Значение интенсивности деформации в изотропном случае.

Слои	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ε_u	0.1	0.25	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.25	0.1

Таблица 7 Значение интенсивности деформации по p_u (трансверсально-изотропный случай, где $p_u^* = 0.1$).

Слои	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_u	0.3-0.4	0.3-0.4	0.2-0.25	0.14-0.15	0.03-0.04	0.14-0.15	0.2-0.25	0.3-0.4	0.3-0.4

Таблица 8 Значение интенсивности деформации по q_u (трансверсально-изотропный случай, где $q_u^* = 0.001$).

Слои	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_u	0.06	0.04	0.04	0.03-0.04	0.02-0.03	0.03-0.04	0.04	0.04	0.06

3 Вывод

Сформулированы упругопластические краевые задачи для трансверсально-изотропных и изотропных параллелепипедов. Нелинейные конечно-разностные уравнения строятся и решаются относительно центральных и граничных узловых перемещений и решается итерационным методом. Для численного решения дискретных уравнений используется известный метод упругих решений. Нелинейные члены дискретных уравнений рассчитываются на основе упругих решений. В качестве примера приведена краевая задача о равновесии упругопластического трансверсально-изотропного и изотропного параллелепипеда под действием куполообразной и равномерно распределенной нагрузки. Результаты были сопоставлены с известными решениями и получена хорошая сходимость.

Литература

[1] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

[2] *Зубчанинов В.Г.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1990. – 368 с.

[3] *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: МГУ, 1996. – 343 с.

[4] *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

[5] *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

[6] *Бреббия К., Телес Ж., Вроубел А.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

[7] *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

[8] *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

[9] *Филоненко-Бородич М.М.* Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // ПММ. – 1951. – Т. 15, №. 2. – С. 37-48.

[10] *Nik Long N.M.A., Khaldjigitov A.A., Adambaev U.* On the constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, Issues 14–15. – P. 7726-7740.

[11] *Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik Long N.M.A., Eshquvatov Z.* Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems // International journal of modern physics. – 2012. – Vol. 9. – P. 503-510.

[12] *Халджигитов А. А., Худазаров Р. С., Сагдуллаева Д. А.* Теории пластичности и термопластичности анизотропных тел. – Т.: Фан ва технология, 2015. – 320 с.

[13] *Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Юсупов Ю.С., Сагдуллаева Д.А.* Численное моделирование одномерной связанной термопластической задачи для изотропных тел // Вестник ТУИТ. – 2013. – № 1-2. – С. 76-82.

[14] *Халджигитов А.А., Каландаров А.А.* Новый подход к численному решению задач теории упругости // Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизации и программирования. – Ташкент, 2018. – С. 546-550.

[15] *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

Поступила в редакцию 20.03.2019

UDC 004.4

ON ONE APPROACH TO THE NUMERICAL SOLUTION OF ELASTOPLASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

[1]*Khaldjigitov A. A.* [2]*Babadjanov M. R.*, [2]*Khudazarov R. S.*
[1]akhald@mail.ru; [2]mum1975@mail.ru
[1]Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies 47A, Shohruh Mirzo Str., Samarkand, 140100, Uzbekistan;
[2]Tashkent University of Information Technologies 108, Amir Temur Str., Tashkent, 100200 Uzbekistan

Usually, for the numerical solution of elastoplastic boundary value problems based on deformation theory of plasticity is used an elastic solutions method. For the numerical solution of elastoplastic problems based on ow theories usually, an initial stress and initial strain methods are applied. The base of the initial stress and initial strain methods also consist the elastic solutions method. In this paper, the elastic solutions method is used for the numerical solution of the elastoplastic problem based on deformation theory in a new manner. The main idea of this approach consists in constructing

nite-dierence equations separately for internal and boundary points of the considered area, and resolving them relative to nodal displacements, and organizing an iterative process. Some elastoplastic problems for isotropic and transversely isotropic parallelepipeds under the dierent boundary conditions are solved. The results were compared with known solutions and received a good convergence. The propagation of the plasticity zone and the in uence of anisotropy on their distribution are investigated.

Keywords: numerical method, elastic solutions method, elastoplastic boundary value problems, deformation theory, isotropic and transversaly-isotropic material.

Citation: Viktorova N. B., Ozhigov Yu. I., Isupova A. O. 2019. On one approach to the numerical solution of elastoplastic boundary value problems. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 3(21): 75–86.

References

[1] Samara A.A., Nikolaev E.S. 1978. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods for solving grid equations.] Moscow: Science. 592 p. (In Russian)

[2] Zubchaninov V.G. 1990. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity.] Moscow: Higher. Shk. 368 p. (In Russian)

[3] Pobedrya B.E. 1996. *Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity.] Moscow: MSU. 343 p. (In Russian)

[4] Rectoris K. 1985. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike* [Variational methods in mathematical physics and technology.] Moscow: Mir. 590 p. (In Russian)

[5] Segerlind L. 1979. *Primenenie metoda konechnykh elementov* [Application of the finite element method.] Moscow: Mir. 392 p. (In Russian)

[6] Brebbia K., Teles J., Vroubel A. 1987. *Metody granichnykh elementov* [Methods of boundary elements.] Moscow: Mir. 524 p. (In Russian)

[7] Ilyushin A.A. 1948. *Plastichnost* [Plasticity]. Moscow: Gostekhizdat. 376 p.

[8] Pobedrya B.E. 1984. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials.] Moscow: MSU Publishing House. (In Russian)

[9] Filonenko-Borodich M.M. 1951. Zadacha o ravnovesii uprugogo parallelepipeda pri zadannykh nagruzkakh na ego granyakh [The problem of equilibrium of an elastic parallelepiped at given loads on its faces.] *PMM*. 15(2):37-48. (In Russian)

[10] Nik Long N.M.A., Khaldjigitov A.A., Adambaev U. 2012. Ob opredelyayushchikh sootnosheniyakh dlya izotropnykh i poperechno-izotropnykh materialov [On the constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials.] *Applied Mathematical Modeling*. 37(14/15):726-7740. (In Russian)

[11] Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik Long N.M.A., Eshquvatov Z. 2002. Chislennoe reshenie odnomernykh i dvumernykh termouprugikh svyazannykh zadach [Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems.] *International journal of modern physics*. 9:503-510. (In Russian)

[12] Khaljigitov A. A., Khudazarov R.,S., Sagdullaeva D. A. 2015. *Teorii plastichnosti i termoplastichnosti anizotropnykh tel*. [Theories of plasticity and thermoplasticity of anisotropic bodies.] Tashkent: Fan va tehnologiya, 320 p. (In Russian)

[13] Khaljigitov A.A., Kalandarov A.A., Yusupov Yu.S., Sagdullaeva D.A. 2013. Chislennoe modelirovanie odnomernoy svyazannoy termoplasticheskoy zadachi dlya izotropnykh tel [Numerical simulation of a one-dimensional coupled thermoplastic problem for isotropic bodies.] *Bulletin of TUIT*. Tashkent. 1/2:76-82. (In Russian)

[14] Haljigit A.A., Kalandarov A.A. 2018. Novyy podkhod k chislennomu resheniyu zadach teorii uprugosti [A new approach to the numerical solution of problems in the theory of elasticity.] *Actual problems of mathematical modeling, algorithms and programming*. Tashkent: P. 546-550. (In Russian)

[15] Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. 1979. *Mekhanika plasticheskikh sred* [Plastic mechanics.] Moscow: Mir. 302 p. (In Russian)

Received March 20, 2019