

УДК 517.958+539.3(1)

# ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ТИПА ШПИНДЕЛЯ УБОРОЧНОГО АППАРАТА ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

**Юлдашев Т.**

д.т.н., ведущий научный сотрудник Института сейсмостойкости сооружений АН РУз,  
тел.: (+99890) 326-88-59

**Исомиддинов А.И.**

старший научный сотрудник-соискатель Наманганского инженерно-педагогического института,  
тел.: (+99891) 182-16-24, e-mail: isomiddinov\_a@mail.ru

На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона выведены уравнения колебаний стержней типа шпинделя при пространственном нагружении. В качестве объекта моделирования рассматривается стержень типа шпинделя со сложным поперечным сечением. Полученные уравнения колебаний описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с естественными граничными и начальными условиями.

**Ключевые слова:** перемещения, деформация, расчетная схема, вариационный принцип, вариации кинетической и потенциальной энергий, вариация работы внешней силы, шпиндель, математическая модель, краевая задача, система дифференциальных уравнений, граничные и начальные условия.

## CONCLUSION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS FLUCTUATION OF CORES SUCH AS A SPINDLE OF THE HARVEST DEVICE AT SPATIAL LOADINGS

Yuldashev T., Isomiddinov A.I.

In article on the basis of a variation principle of Ostrogradsky-Hamilton's are deduced of the equations fluctuation of cores such as a spindle at spatial loadings. As object of modeling, is considered of cores such as spindles with complex cross sections. Received of the equations fluctuation is described by systems by the differential equations by private products of the second order with natural boundary and entry conditions.

**Keywords:** moving, deformation, settlement circuit, variation principle, variations kinetically and potential energy, variation of job external forces, spindle, mathematical models, regional task, system of the differential equations, boundary and entry conditions.

## YIG'UVCHI APPARAT SHPINDELLARI TIPIDAGI STERJENLARNI FAZOVIIY YUKLANISHLARDAGI TEBRANISHLARINING DIFFERENSIAL TENGLAMALARINI KELTIRIB CHIQRISH

Yuldashev T., Isomiddinov A.I.

Maqolada Ostrogradskiy-Gamilton variatsion prinsipi asosida shpindel tipidagi sterjenlarning fazoviy yuklanishlardagi tebranishlarining tenglamalari keltirib chiqarilgan. Modellashtirish ob'yekti sifatida, murakkab ko'ndalang kesimli shpindellar tipidagi sterjenlar qaralgan. Olingan tebranish tenglamalari tabiiy chegaraviy va boshlang'ich shartli ikkinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalar sistemasi ko'rinishida ifodalangan.

**Tayanch iboralar:** ko'chish, deformatsiya, hisob sxemasi, variatsion tamoyil, kinetik va potensial energiya variatsiyasi, tashqi kuchlar ishi variatsiyasi, shpindel, matematik modellar, chegaraviy masala, differensial tenglamalar sistemasi, chegaraviy va boshlang'ich shart.

### 1. Введение

Узбекские ученые совместно с конструкторскими и производственными подразделениями сельхоз-машиностроения разработали эффективный рабочий орган – самоочищающийся составной шпиндель.

Шпиндель считается основным рабочим органом уборочных аппаратов. Поэтому от шпинделя,

главным образом, зависит количество и качество собираемого хлопка машиной. Шпинделю необходимо уделять особое внимание, так как он является ответственной и массовой деталью в уборочном аппарате. Надежность работы уборочных аппаратов в основном зависит от работоспособности основного рабочего органа – шпинделя [1].

Исследованию технологического процесса в уборочных аппаратах посвящены работы М.В.

Сабликова, А.П. Ковгана, А.И. Ишлинского, А.А. Каримова, Д.М. Шполенского, Х.Х. Усманходжаева, А.Д. Глушенко, В.А. Коростылева, Р.Д. Матчанова, А.С. Садриддинова, Х. Туранова, К.М. Иногамова, И.Х. Файзиева, М. Ташбалтаева, А.А. Ризаева, А.Д. Абдузимова и др. [1-9].

Под руководством Х.Х. Усманходжаева и с участием И.Х. Файзиева в работах К.М. Иногамова [3,4] на основе всестороннего изучения конструкций, эксплуатации нарезного шпинделя и теоретико-экспериментальных исследований в натуральных условиях была доказана возможность отделения зуба от тела шпинделя, в результате чего улучшаются агротехнические показатели машины и увеличивается производительность хлопкоуборочной машины за счет снижения зазеленений шпинделя. Найден такой способ крепления захватывающего элемента к стержню, при котором происходит самоочистка рабочей поверхности от зазеленения и намоток волокна.

Х.Х. Усманходжаевым изучены закономерности крутильных колебаний и установлены формы сечений элементов составного шпинделя, обеспечивающие высокую прочность и надежность работы. Им получено дифференциальное уравнение четвертого порядка свободных изгибных колебаний составного шпинделя хлопкоуборочной машины, а также определен изгибающий момент от технологических нагрузок и произведен расчет на прочность стержня составного шпинделя [4].

В [5] рассмотрены задачи динамики механизмов привода шпинделей уборочных аппаратов серийных и перспективных хлопкоуборочных машин. Для решения задач динамики приводов шпинделей использован принцип Гамильтона - Остроградского, обоснованы способы осреднения коэффициентов дифференциальных уравнений и их решения получены соответственно методами Бубнова-Галеркина и операционным исчислением по двум переменным.

В работе [6] рассмотрены вопросы динамики узлов вращения уборочных аппаратов (шпинделей, шпиндельных барабанов, съемников и т.д.) многорядных хлопкоуборочных машин. Изложены приближенные решения уравнений различных видов колебаний шпинделей, съемников и приводов узлов вращения. Выделены изгибные, маятниковые, крутильные и осевые виды колебаний шпинделей во время вращений. Разработаны математические модели расчета с учетом допущений и введенных функционала Гамильтона-Остроградского, функции Лагранжа и работы внешних сил для отдельных видов колебаний шпинделей. Получены системы нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных с переменными коэффициентами. Приближенные аналитические решения данных моделей авторами [6] получены с использованием рядов Фурье.

В [7] изложены результаты исследований по моделированию вероятностных процессов динамических систем. Также предложены модели и алгоритмы для численного исследования с использованием ЭВМ.

Х.Т. Турановым впервые рассмотрены и обобщены вопросы влияния колебаний и нагруженности основных деталей составных валов на динамическую прочность конструкций барабанного типа хлопковых машин. Расчетные модели – изгибные, продольные и крутильные колебания вала шпиндельного барабана – рассмотрены отдельно в работе [8]. Для составления уравнений колебаний вала использован вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, в котором рассматриваются только вынужденные колебания без учета начальных условий. На основе принципа Даламбера записаны продольные колебания вала. С учетом принятых допущений и расчетных схем описаны только крутильные колебания вала.

Из обзора работ ведущих узбекских ученых видно, что до сих пор не рассмотрены и не решены связанные задачи динамики шпинделей при пространственном нагружении. Отсутствие обоснованной динамической теории шпинделей с учетом сложного взаимосвязанного напряженно-деформированного состояния не позволяет получить обоснованное суждение о его длительной динамической прочности, поэтому актуальным остается вопрос о долговечности шпинделей прямого и обратного вращения в режимах его работы при различной интенсивности. Таким образом, создание обоснованного математического обеспечения шпинделей на основе динамики технологического процесса в уборочном аппарате под действием реальных силовых взаимодействий «шпиндель – привод – кусты хлопчатника – съемник» является весьма актуальной задачей.

## 2. Постановка задачи

С точки зрения механики деформируемого твердого тела шпиндель уборочного аппарата является сложным по структуре объектом и находится под действием ряда внешних динамических циклических воздействий.

В процессе моделирования работы шпинделя надо обратить внимание на характер основных внешних нагрузок, геометрические соотношения его размеров, а также кинематические параметры, описывающие его деформации.

При построении расчетных схем шпинделя рассматриваются различные виды воздействующих нагрузок на разных участках (открытые зоны, зоны ремней и зоны колодок) при холостом и рабочем ходе уборочного аппарата. На рис.1 показаны расчетные схемы шпинделей для открытых зон при холостом ходе. Здесь  $V_m$  – скорость направления движения уборочного аппарата;  $\Omega$  – угловая скорость барабана;  $R$  – радиус барабана;  $\omega$  – угловая скорость шпинделя;  $L$  и  $b$  – рабочая и консольная часть шпинделя;  $m'_1$ ,  $m''_1$ ,  $m'''_1$  и  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  – соответственно сосредоточенные массы и расстояния консольной части шпинделя относительно центра подшипника;  $\Phi_n$  – нормальная или центробежная

сила инерции;  $R_A, R_B$  – силы реакций на подшипнике (точки  $A$ ) и на нижнем конце шпинделя (точки  $B$ );  $x_0$  – центр тяжести шпинделя относительно точки  $O$ .

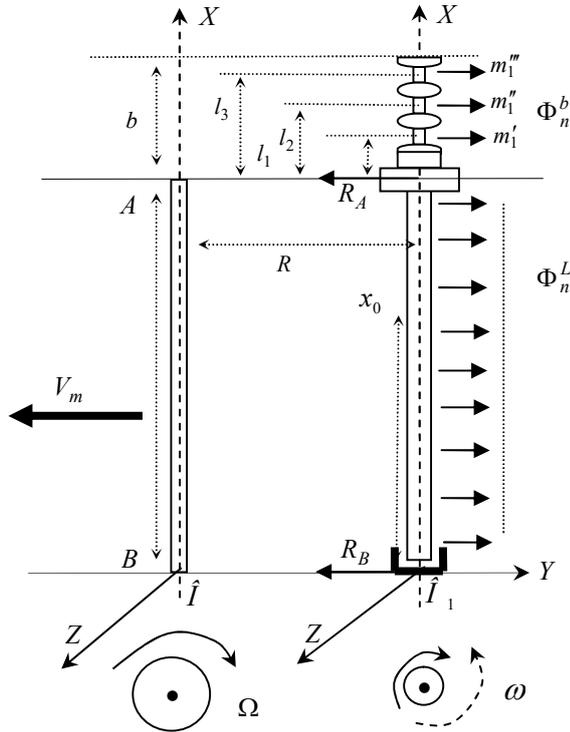


Рис. 1. Расчетная схема шпинделей

Для определения силы реакций составим систему двух уравнений с двумя переменными ( $R_A$  и  $R_B$ ):

$$\begin{cases} \sum M_A = \Phi_n^{L+b}(L-x_0) - R_B L = 0; \\ \sum M_B = -\Phi_n^{L+b}x_0 + R_A L = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B = \frac{\Phi_n^{L+b}(L-x_0)}{L}; \\ R_A = \frac{\Phi_n^{L+b}x_0}{L}. \end{cases}$$

Здесь рассматривается составной шпиндель уборочных аппаратов со сложным сечением, длина которого  $L$ . В данной статье нами разрабатывается математический аппарат для расчета составного шпинделя на прочность и определяется напряженно-деформированное состояние при динамическом пространственном нагружении.

### 3. Вывод дифференциальных уравнений колебаний стержней типа шпинделя уборочного аппарата

Рассмотрим цилиндрические координаты  $x, r, \gamma$ :

$$x = x, \quad y = r \cos \gamma, \quad z = r \sin \gamma. \quad (1)$$

На основе допущений, приведенных в работе [10], выражения для перемещений точек стержня при продольных, поперечных и крутильных колебаниях представим в виде

$$u_1 = u - z\alpha_1 - y\alpha_2, \quad u_2 = v + z\theta, \quad u_3 = w - y\theta,$$

где  $u, v, w$  – перемещения центральной линии стержня;

$\alpha_1, \alpha_2$  – углы наклона касательной к упругой линии при чистом изгибе;

$\theta$  – угол закручивания.

Учитывая (1), перемещения точек стержня в цилиндрических координатах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1(x, r, \gamma, t) &= u(x, t) - \alpha_1(x, t)r \sin \gamma - \alpha_2(x, t)r \cos \gamma, \\ u_2(x, r, \gamma, t) &= v(x, t) + \theta(x, t)r \sin \gamma, \\ u_3(x, r, \gamma, t) &= w(x, t) - \theta(x, t)r \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь, согласно формуле Коши, с учетом формул (2) вычисляем компоненты деформации:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1(x, r, \gamma, t)}{\partial x} = \\ &= \frac{du(x, t)}{dx} - \frac{d\alpha_1(x, t)}{dx}r \sin \gamma - \frac{d\alpha_2(x, t)}{dx}r \cos \gamma, \\ \epsilon_{12} &= \frac{\partial u_2(x, r, \gamma, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x, r, \gamma, t)}{\partial y} = \\ &= \frac{dv(x, t)}{dx} + \frac{d\theta(x, t)}{dx}r \sin \gamma - \alpha_2(x, t), \\ \epsilon_{13} &= \frac{\partial u_3(x, r, \gamma, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x, r, \gamma, t)}{\partial z} = \\ &= \frac{dw(x, t)}{dx} - \frac{d\theta(x, t)}{dx}r \cos \gamma - \alpha_1(x, t), \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{33} = \epsilon_{23} = 0. \end{aligned}$$

Компоненты напряжений и деформаций при упругом состоянии стержня (закон Гука) связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E\epsilon_{11} = E \frac{\partial u_1(x, r, \gamma, t)}{\partial x} = \\ &= E \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) - \alpha_1(x, t)r \sin \gamma - \alpha_2(x, t)r \cos \gamma) = \\ &= E \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1(x, t)}{\partial x}r \sin \gamma - \frac{\partial \alpha_2(x, t)}{\partial x}r \cos \gamma \right), \\ \sigma_{12} &= G\epsilon_{12} = G \left( \frac{\partial u_2(x, r, \gamma, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x, r, \gamma, t)}{\partial y} \right) = \\ &= G \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}r \sin \gamma - \alpha_2(x, t) \right), \\ \sigma_{13} &= G\epsilon_{13} = G \left( \frac{\partial u_3(x, r, \gamma, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x, r, \gamma, t)}{\partial z} \right) = \\ &= G \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}r \cos \gamma - \alpha_1(x, t) \right), \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вариации кинетической энергии  $\delta T$ :

$$\begin{aligned} \int_t \delta T dt &= \int_t \int_V \left[ \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} \right] dV dt. \end{aligned}$$

Здесь выполним операции интегрирования по частям:

$$\int_t \delta T dt = \int_V \left[ \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta u_1 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta u_2 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta u_3 \right] dV \Big|_t - \int_t \int_V \left[ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u_1 + \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \delta u_2 + \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 \right] dV dt. \quad (3)$$

Подставим выражения  $u_i$  из (2) в вариации кинетической энергии (3). После выполнения операции варьирования и приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{aligned} \int_t dT dt = \int_V & \left[ \rho \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) - \alpha_1(x,t) r \sin \gamma - \right. \\ & - \alpha_2(x,t) r \cos \gamma) \delta u - \\ & - \rho r \sin \gamma \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) - \alpha_1(x,t) r \sin \gamma - \\ & - \alpha_2(x,t) r \cos \gamma) \delta \alpha_1 - \\ & - \rho r \cos \gamma \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) - \alpha_1(x,t) r \sin \gamma - \\ & - \alpha_2(x,t) r \cos \gamma) \delta \alpha_2 + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial t} (v(x,t) + \theta(x,t) r \sin \gamma) \delta v + \\ & + \rho r \sin \gamma \frac{\partial}{\partial t} (v(x,t) + \theta(x,t) r \sin \gamma) \delta \theta + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial t} (w(x,t) - \theta(x,t) r \cos \gamma) \delta w - \\ & \left. - \rho r \cos \gamma \frac{\partial}{\partial t} (w(x,t) - \theta(x,t) r \cos \gamma) \delta \theta \right] dV \Big|_t - \\ & - \int_t \int_V \left[ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u(x,t) - \alpha_1(x,t) r \sin \gamma - \right. \\ & - \alpha_2(x,t) r \cos \gamma) \delta u - \\ & - \rho r \sin \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u(x,t) - \alpha_1(x,t) r \sin \gamma - \\ & - \alpha_2(x,t) r \cos \gamma) \delta \alpha_1 - \\ & - \rho r \cos \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u(x,t) - \alpha_1(x,t) r \sin \gamma - \\ & - \alpha_2(x,t) r \cos \gamma) \delta \alpha_2 + \\ & + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v(x,t) + \theta(x,t) r \sin \gamma) \delta v + \\ & + \rho r \sin \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v(x,t) + \theta(x,t) r \sin \gamma) \delta \theta + \\ & + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w(x,t) - \theta(x,t) r \cos \gamma) \delta w - \\ & + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w(x,t) - \theta(x,t) r \cos \gamma) \delta w - \\ & \left. - \rho r \cos \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w(x,t) - \theta(x,t) r \cos \gamma) \delta \theta \right] dV dt. \end{aligned}$$

Выделим интеграл по сечениям стержня. Тогда вариации кинетической энергии запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \int_t dT dt = \int_x & \left\{ \left[ \rho F(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \right. \right. \\ & - \rho S_y(x,t) \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial t} - \rho S_z(x,t) \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial t} \Big] \delta u - \\ & - \left[ \rho S_y(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \rho I_y(x,t) \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial t} - \right. \\ & - \rho I_{yz}(x,t) \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial t} \Big] \delta \alpha_1 - \\ & - \left[ \rho S_z(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \rho I_{yz}(x,t) \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial t} - \right. \\ & - \rho I_z(x,t) \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial t} \Big] \delta \alpha_2 + \\ & + \left[ \rho F(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \rho S_y(x,t) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right] \delta v + \\ & + \left[ \rho S_y(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \rho I_y(x,t) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right] \delta \theta + \\ & + \left[ \rho F(x,t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \rho S_z(x,t) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right] \delta w - \\ & \left. - \left[ \rho S_z(x,t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \rho I_z(x,t) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right] \delta \theta \right\} dx \Big|_t - \\ & - \int_t \int_x \left\{ \left[ \rho F(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \rho S_y(x,t) \frac{\partial^2 \alpha_1(x,t)}{\partial t^2} - \right. \right. \\ & - \rho S_z(x,t) \frac{\partial^2 \alpha_2(x,t)}{\partial t^2} \Big] \delta u - \\ & - \left[ \rho S_y(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \rho I_y(x,t) \frac{\partial^2 \alpha_1(x,t)}{\partial t^2} - \right. \\ & - \rho I_{yz}(x,t) \frac{\partial^2 \alpha_2(x,t)}{\partial t^2} \Big] \delta \alpha_1 - \\ & - \left[ \rho S_z(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \rho I_{yz}(x,t) \frac{\partial^2 \alpha_1(x,t)}{\partial t^2} - \right. \\ & - \rho I_z(x,t) \frac{\partial^2 \alpha_2(x,t)}{\partial t^2} \Big] \delta \alpha_2 + \\ & + \left[ \rho F(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \rho S_y(x,t) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right] \delta v + \\ & + \left[ \rho S_y(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \rho I_y(x,t) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right] \delta \theta + \\ & + \left[ \rho F(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \rho S_z(x,t) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right] \delta w - \\ & \left. - \left[ \rho S_z(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \rho I_z(x,t) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right] \delta \theta \right\} dx dt. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 F(x,t) &= \int_F r dr d\gamma, \quad S_z(x,t) = \int_F r^2 \cos \gamma dr d\gamma, \\
 I_y(x,t) &= \int_F r^3 \sin^2 \gamma dr d\gamma, \\
 I_{yz}(x,t) &= \int_F r^3 \cos \gamma \sin \gamma dr d\gamma, \\
 S_y(x,t) &= \int_F r^2 \sin \gamma dr d\gamma, \\
 I_z(x,t) &= \int_F r^3 \cos^2 \gamma dr d\gamma. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вариации потенциальной энергии  $\delta\Pi$ :

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta\Pi dt &= \iint_V \left( \sum_{j=1}^3 \sigma_{1j} \delta \varepsilon_{1j} \right) dV dt, \\
 \int_t \delta\Pi dt &= \iint_V \left( \sum_{j=1}^3 \sigma_{1j} \delta \varepsilon_{1j} \right) dV dt = \iint_V \left[ \sigma_{11} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\
 &+ \sigma_{12} \delta \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left. \sigma_{13} \delta \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right] dV dt. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения  $u_i$  из (2) в вариации потенциальной энергии (5), получаем

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta\Pi dt &= \iint_V \left[ \sigma_{11} \delta \left( \frac{du(x,t)}{dx} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{d\alpha_1(x,t)}{dx} r \sin \gamma - \frac{d\alpha_2(x,t)}{dx} r \cos \gamma \right) + \right. \\
 &+ \sigma_{12} \delta \left( \frac{dv(x,t)}{dx} + \frac{d\theta(x,t)}{dx} r \sin \gamma - \alpha_2(x,t) \right) + \\
 &\left. + \sigma_{13} \delta \left( \frac{dw(x,t)}{dx} - \frac{d\theta(x,t)}{dx} r \cos \gamma - \alpha_1(x,t) \right) \right] dV dt.
 \end{aligned}$$

Выполним операции интегрирования по частям уравнения (5), но прежде выделим интеграл по сечению стержня:

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta\Pi dt &= \iint_V \left[ \int_{t,x} r \sigma_{11} dr d\gamma \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \right. \\
 &\left. - \int_F r^2 \sin \gamma \sigma_{11} dr d\gamma \delta \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial x} - \right. \\
 &\left. - \int_F r^2 \cos \gamma \sigma_{11} dr d\gamma \delta \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial x} + \right. \\
 &+ \int_F r \sigma_{12} dr d\gamma \delta \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \int_F r^2 \sin \gamma \sigma_{12} dr d\gamma \delta \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} - \\
 &\left. - \int_F r \sigma_{12} dr d\gamma \delta \alpha_2(x,t) + \int_F r \sigma_{13} dr d\gamma \delta \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \right. \\
 &\left. - \int_F r^2 \cos \gamma \sigma_{13} dr d\gamma \delta \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} - \right. \\
 &\left. - \int_F r \sigma_{13} dr d\gamma \delta \alpha_1(x,t) \right] dx dt = \\
 &= \int_t \left[ N_x \delta u(x,t) - M_y \delta \alpha_1(x,t) - M_z \delta \alpha_2(x,t) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ Q_{12} \delta v(x,t) + M_x \delta \theta(x,t) + Q_{13} \delta w(x,t) \left. \right] dt \Big|_x - \\
 &- \iint_{t,x} \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u(x,t) - \frac{\partial M_y}{\partial x} \delta \alpha_1(x,t) - \frac{\partial M_z}{\partial x} \delta \alpha_2(x,t) + \right. \\
 &+ \frac{\partial Q_{12}}{\partial x} \delta v(x,t) + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \theta(x,t) + \frac{\partial Q_{13}}{\partial x} \delta w(x,t) + \\
 &\left. + Q_{12} \delta \alpha_2(x,t) + Q_{13} \delta \alpha_1(x,t) \right] dx dt. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_F r \sigma_{11} dr d\gamma, \quad M_y = \int_F r^2 \sin \gamma \sigma_{11} dr d\gamma, \\
 M_z &= \int_F r^2 \cos \gamma \sigma_{11} dr d\gamma, \quad Q_{12} = \int_F r \sigma_{12} dr d\gamma, \\
 M_x &= \int_F (r^2 \sin \gamma \sigma_{12} - r^2 \cos \gamma \sigma_{13}) dr d\gamma, \\
 Q_{13} &= \int_F r \sigma_{13} dr d\gamma.
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вариации работы внешних сил  $\delta A$ :

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta A dt &= \iint_V \sum_{i=1}^3 P_i \delta u_i dV dt + \iint_{t,S} \sum_{i=1}^3 q_i \delta u_i dS dt + \\
 &+ \iint_{t,S_1} \sum_{i=1}^3 \phi_i \delta u_i dS_1 dt \Big|_x = \iint_V [P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 + P_3 \delta u_3] dV dt + \\
 &+ \iint_{t,S} [q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3] dS dt + \\
 &+ \iint_{t,S_1} [\phi_1 \delta u_1 + \phi_2 \delta u_2 + \phi_3 \delta u_3] dS_1 dt \Big|_x;
 \end{aligned}$$

здесь  $P_i$  - составляющие объемных сил, отнесенные к единице объема;  $q_i$  - поверхностные силы, отнесенные к единице площади поверхности стержней;  $\phi_i$  - торцевые силы, действующие на торцах стержня.

Выделим интеграл по сечению стержня, используя соотношение (2):

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta A dt &= \iint_V \left[ \int_{t,x} r P_1 dr d\gamma \delta u(x,t) - \right. \\
 &- \int_F r^2 \sin \gamma P_1 dr d\gamma \delta \alpha_1(x,t) - \int_F r^2 \cos \gamma P_1 dr d\gamma \delta \alpha_2(x,t) + \\
 &+ \int_F r P_2 dr d\gamma \delta v(x,t) + \int_F r^2 \sin \gamma P_2 dr d\gamma \delta \theta(x,t) + \\
 &+ \int_F r P_3 dr d\gamma \delta w(x,t) - \int_F r^2 \cos \gamma P_3 dr d\gamma \delta \theta(x,t) \left. \right] dx dt + \\
 &+ \iint_{t,x} \left[ \int_l r q_1 d\gamma \delta u(x,t) - \int_l r^2 \sin \gamma q_1 d\gamma \delta \alpha_1(x,t) - \right. \\
 &- \int_l r^2 \cos \gamma q_1 d\gamma \delta \alpha_2(x,t) + \int_l r q_2 d\gamma \delta v(x,t) + \\
 &+ \int_l r^2 \sin \gamma q_2 d\gamma \delta \theta(x,t) + \\
 &+ \left. \int_l r q_3 d\gamma \delta w(x,t) - \int_l r^2 \cos \gamma q_3 d\gamma \delta \theta(x,t) \right] dx dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_l r^2 \sin \gamma q_2 d\gamma \delta \theta(x, t) + \int_l r q_3 d\gamma \delta w(x, t) - \\
 & - \int_l r^2 \cos \gamma q_3 d\gamma \delta \theta(x, t) \Big] dx dt + \int_t \left[ \int_{S_1} r \phi_1 dr d\gamma \delta u(x, t) - \right. \\
 & \quad - \int_{S_1} r^2 \sin \gamma \phi_1 dr d\gamma \delta \alpha_1(x, t) - \\
 & \quad - \int_{S_1} r^2 \cos \gamma \phi_1 dr d\gamma \delta \alpha_2(x, t) + \\
 & \quad + \int_{S_1} r \phi_2 dr d\gamma \delta v(x, t) + \int_{S_1} r^2 \sin \gamma \phi_2 dr d\gamma \delta \theta(x, t) + \\
 & \quad \left. + \int_{S_1} r \phi_3 dr d\gamma \delta w(x, t) - \int_{S_1} r^2 \cos \gamma \phi_3 dr d\gamma \delta \theta(x, t) \right] dt \Big|_x.
 \end{aligned}$$

Здесь введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 N_x(P_1) &= \int_F r P_1 dr d\gamma, \quad M_y(P_1) = \int_F r^2 \sin \gamma P_1 dr d\gamma, \\
 M_z(P_1) &= \int_F r^2 \cos \gamma P_1 dr d\gamma, \quad Q_{12}(P_2) = \int_F r P_2 dr d\gamma, \\
 M_x(P_2, P_3) &= \int_F (r^2 \sin \gamma P_2 - r^2 \cos \gamma P_3) dr d\gamma, \\
 & + \frac{\partial Q_{13}}{\partial x} + (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \Big] \delta w \Big] dx dt + \\
 Q_{13}(P_3) &= \int_F r P_3 dr d\gamma, \quad N_x(q_1) = \int_l r q_1 d\gamma, \\
 M_y(q_1) &= \int_l r^2 \sin \gamma q_1 d\gamma, \quad M_z(q_1) = \int_l r^2 \cos \gamma q_1 d\gamma, \\
 Q_{12}(q_2) &= \int_l r q_2 d\gamma, \quad Q_{13}(q_3) = \int_l r q_3 d\gamma, \\
 M_x(q_2, q_3) &= \int_l (r^2 \sin \gamma q_2 - r^2 \cos \gamma q_3) d\gamma, \\
 N_x(\phi_1) &= \int_{S_1} r \phi_1 dr d\gamma, \quad M_y(\phi_1) = \int_{S_1} r^2 \sin \gamma \phi_1 dr d\gamma, \\
 M_z(\phi_1) &= \int_{S_1} r^2 \cos \gamma \phi_1 dr d\gamma, \quad Q_{12}(\phi_2) = \int_{S_1} r \phi_2 dr d\gamma, \\
 M_x(\phi_2, \phi_3) &= \int_{S_1} (r^2 \sin \gamma \phi_2 - r^2 \cos \gamma \phi_3) dr d\gamma, \\
 Q_{13}(\phi_3) &= \int_{S_1} r \phi_3 dr d\gamma. \tag{7}
 \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений (7) перепишем вариации работы внешних сил  $\delta A$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta A dt &= \int_t \left[ \int_x [(N_x(P_1) + N_x(q_1)) \delta u(x, t) - \right. \\
 & \quad - (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \delta \alpha_1(x, t) - \\
 & \quad - (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \delta \alpha_2(x, t) + \\
 & \quad + (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \delta \theta(x, t) + \\
 & \quad \left. + (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \delta w(x, t) \right] dx + \\
 & + \left[ (N_x(\phi_1) \delta u(x, t) - M_y(\phi_1) \delta \alpha_1(x, t) - \right. \\
 & \quad \left. - M_z(\phi_1) \delta \alpha_2(x, t) + Q_{12}(\phi_2) \delta v(x, t) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + M_x(\phi_2, \phi_3) \delta \theta(x, t) + Q_{13}(\phi_3) \delta w(x, t) \right] dx \Big] dt. \tag{8}$$

Вариации кинетической (4) и потенциальной (6) энергий и работы внешних сил (8) подставляем в вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [10]:

$$\begin{aligned}
 \int_t (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt &= 0, \\
 \int_t (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt &= \int_t \int_x \left\{ \left[ -\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho S_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad + \rho S_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \Big] \delta u + \\
 & \quad + \left[ \rho S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \right. \\
 & \quad - \frac{\partial M_y}{\partial x} + Q_{13} - (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \Big] \delta \alpha_1 + \\
 & \quad + \left[ \rho S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \right. \\
 & \quad - \frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_{12} - (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \Big] \delta \alpha_2 + \\
 & \quad + \left[ -\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_{12}}{\partial x} + (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \right] \delta v + \\
 & \quad + \left[ -\rho S_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \right. \\
 & \quad + \frac{\partial M_x}{\partial x} + (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \Big] \delta \theta + \\
 & \quad + \left[ -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial Q_{13}}{\partial x} + (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \right] \delta w \Big] dx dt + \\
 & + \int_t \left[ (-N_x + N_x(\phi_1)) \delta u + (M_y - M_y(\phi_1)) \delta \alpha_1 + \right. \\
 & \quad + (M_z - M_z(\phi_1)) \delta \alpha_2 + (-Q_{12} + Q_{12}(\phi_2)) \delta v + \\
 & \quad \left. + (-M_x + M_x(\phi_2, \phi_3)) \delta \theta + (-Q_{13} + Q_{13}(\phi_3)) \delta w \right] dx \Big] dt + \\
 & + \int_x \left[ \left( \rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \rho S_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta u + \right. \\
 & \quad + \left( -\rho S_y \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta \alpha_1 + \\
 & \quad + \left( -\rho S_z \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \rho I_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta \alpha_2 + \\
 & \quad + \left( \rho F \frac{\partial v}{\partial t} + \rho S_y \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \delta v + \\
 & \quad + \left( \rho S_y \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (I_y + I_z) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta \theta + \\
 & \quad \left. + \left( \rho F \frac{\partial w}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \delta w \right] dx = 0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Используя закон Гука, формируем внутренние усилия и моменты стержня:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_F r \sigma_{11} dr d\gamma = \int_F r E \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial x} r \sin \gamma - \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial x} r \cos \gamma \right) dr d\gamma = \\
 &= EF \frac{\partial u}{\partial x} - ES_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - ES_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}; \\
 M_y &= \int_F r^2 \sin \gamma \sigma_{11} dr d\gamma = \int_F r^2 \sin \gamma E \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial x} r \sin \gamma - \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial x} r \cos \gamma \right) dr d\gamma = \\
 &= ES_y \frac{\partial u}{\partial x} - EI_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}; \\
 M_z &= \int_F r^2 \cos \gamma \sigma_{11} dr d\gamma = \int_F r^2 \cos \gamma E \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1(x,t)}{\partial x} r \sin \gamma - \frac{\partial \alpha_2(x,t)}{\partial x} r \cos \gamma \right) dr d\gamma = \\
 &= ES_z \frac{\partial u}{\partial x} - EI_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}; \\
 Q_{12} &= \int_F r \sigma_{12} dr d\gamma = \int_F r G \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} r \sin \gamma - \alpha_2(x,t) \right) dr d\gamma = \\
 &= GF \frac{\partial v}{\partial x} + GS_y \frac{\partial \theta}{\partial x} - GF \alpha_2; \\
 M_x &= \int_F \left( r^2 \sin \gamma \sigma_{12} - r^2 \cos \gamma \sigma_{13} \right) dr d\gamma = \\
 &= \int_F \left( r^2 \sin \gamma G \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} r \sin \gamma - \alpha_2(x,t) \right) - \right. \\
 &\left. - r^2 \cos \gamma G \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} r \cos \gamma - \alpha_1(x,t) \right) \right) dr d\gamma = \\
 &= G \left( S_y \frac{\partial v}{\partial x} + I_y \frac{\partial \theta}{\partial x} - S_y \alpha_2 - S_z \frac{\partial w}{\partial x} + I_z \frac{\partial \theta}{\partial x} + S_z \alpha_1 \right) = \\
 &= G \left( S_y \frac{\partial v}{\partial x} + I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} - S_z \frac{\partial w}{\partial x} - S_y \alpha_2 + S_z \alpha_1 \right); \\
 Q_{13} &= \int_F r \sigma_{13} dr d\gamma = \int_F r G \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} r \cos \gamma - \alpha_1(x,t) \right) dr d\gamma = \\
 &= GF \frac{\partial w}{\partial x} - GS_z \frac{\partial \theta}{\partial x} - GF \alpha_1. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Подставим выражения внутренних усилий и моменты (10) в вариационные уравнения (9). Таким образом, (9) в перемещениях принимает следующий вид:

$$\int_t (\delta \Gamma - \delta \Pi + \delta A) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_t \int_x \left\{ \left[ -\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho S_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - ES_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - ES_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \right] \delta u + \right. \\
 &\left. + \left[ \rho S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - ES_y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + EI_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + EI_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + GF \frac{\partial w}{\partial x} - GS_z \frac{\partial \theta}{\partial x} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - GF \alpha_2 - (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \right] \delta \alpha_1 + \right. \\
 &\left. + \left[ \rho S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - ES_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + EI_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + EI_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + GF \frac{\partial v}{\partial x} + GS_y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - GF \alpha_2 - (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \right] \delta \alpha_2 + \right. \\
 &\left. + \left[ -\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + GF \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + GS_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - GF \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \right] \delta v + \right. \\
 &\left. + \left[ -\rho S_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + GS_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - GS_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GS_y \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + GS_z \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \right] \delta \theta + \right. \\
 &\left. + \left[ -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + GF \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GS_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - GF \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \right] \delta w \right\} dx dt + \\
 &+ \int_t \left\{ \left[ -EF \frac{\partial u}{\partial x} + ES_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + ES_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + N_x(\phi_1) \right] \delta u + \right. \\
 &\left. + \left[ ES_y \frac{\partial u}{\partial x} - EI_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - M_y(\phi_1) \right] \delta \alpha_1 + \right. \\
 &\left. + \left[ ES_z \frac{\partial u}{\partial x} - EI_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - M_z(\phi_1) \right] \delta \alpha_2 + \right. \\
 &\left. + \left[ -GF \frac{\partial v}{\partial x} - GS_y \frac{\partial \theta}{\partial x} + GF \alpha_2 + Q_{12}(\phi_2) \right] \delta v + \right. \\
 &\left. + \left[ -GS_y \frac{\partial v}{\partial x} - GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} + GS_z \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + GS_y \alpha_2 - GS_z \alpha_1 + M_x(\phi_2, \phi_3) \right] \delta \theta + \left[ -GF \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + GS_z \frac{\partial \theta}{\partial x} + GF \alpha_2 + Q_{13}(\phi_3) \right] \delta w \right\} dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_x \left[ \left( \rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \rho S_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta u + \right. \\
 & + \left( -\rho S_y \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta \alpha_1 + \\
 & + \left( -\rho S_z \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \rho I_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta \alpha_2 + \\
 & \quad + \left( \rho F \frac{\partial v}{\partial t} + \rho S_y \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \delta v + \\
 & + \left( \rho S_y \frac{\partial v}{\partial t} + \rho I_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta \theta + \\
 & \left. + \left( \rho F \frac{\partial w}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \delta w \right] dx = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

В симметричном поперечном сечении шпинделя статические моменты  $S_z$ ,  $S_y$  и центробежные моменты инерции  $I_{yz}$  равняются нулю. Тогда вариационное уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \int_t (\delta \Gamma - \delta \Pi + \delta A) dt = \\
 & = \iint_{t,x} \left\{ \left[ -\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \right] \delta u + \right. \\
 & + \left[ -\rho I_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + GF \frac{\partial w}{\partial x} - \right. \\
 & \quad \left. - GF \alpha_2 - (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \right] \delta \alpha_1 + \\
 & + \left[ -\rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + GF \frac{\partial v}{\partial x} - \right. \\
 & \quad \left. - GF \alpha_2 - (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \right] \delta \alpha_2 + \\
 & + \left[ -\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + GF \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right) + (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \right] \delta v + \\
 & + \left[ -I_p \left( \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \right] \delta \theta + \\
 & + \left[ -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + GF \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \right] \delta w \Big\} dx dt + \\
 & + \int_t \left[ \left( -EF \frac{\partial u}{\partial x} + N_x(\phi_1) \right) \delta u + \right. \\
 & + \left( -EI_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_y(\phi_1) \right) \delta \alpha_1 + \\
 & + \left( -EI_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - M_z(\phi_1) \right) \delta \alpha_2 + \\
 & + \left( -GF \frac{\partial v}{\partial x} + GF \alpha_2 + Q_{12}(\phi_2) \right) \delta v + \\
 & \left. + \left( -GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} + M_x(\phi_2, \phi_3) \right) \delta \theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( -GF \frac{\partial W}{\partial x} + GF \alpha_2 + Q_{13}(\phi_3) \right) \delta w \Big] dt + \\
 & + \int_x \left[ \left( \rho F \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u + \left( \rho I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right) \delta \alpha_1 + \right. \\
 & + \left( \rho I_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \delta \alpha_2 + \left( \rho F \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta v + \\
 & + \left( \rho I_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \delta \theta + \left( \rho F \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \Big] dx = 0. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 u &= d \cdot \bar{u}; \quad v = d \cdot \bar{v}; \quad w = d \cdot \bar{w}; \\
 x &= L \cdot \bar{x}; \quad t = t_0 \cdot \bar{t},
 \end{aligned}$$

а также обозначения  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  (где  $\mu$  - коэффициент Пуассона).

Вариационное уравнение (12) переписывается в виде:

$$\begin{aligned}
 & \int_t (\delta \Gamma - \delta \Pi + \delta A) dt = \\
 & = \iint_{t,x} \left\{ \left[ -\frac{\rho F d^2}{t_0^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{E F d^2}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + d \cdot (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \right] \delta \bar{u} + \right. \\
 & + \left[ -\frac{\rho I_y}{t_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}^2} + \frac{E I_y}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{E F d}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{E F}{2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 - (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \right] \delta \bar{\alpha}_1 + \\
 & + \left[ -\frac{\rho I_z}{t_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}^2} + \frac{E I_z}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{E F d}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{E F}{2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 - (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \right] \delta \bar{\alpha}_2 + \\
 & + \left[ -\frac{\rho F d^2}{t_0^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{E F d^2}{2L^2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{E F d}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} + d \cdot (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \right] \delta \bar{v} + \\
 & + \left[ -\frac{\rho I_p}{t_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{E I_p}{2L^2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} + \right. \\
 & \quad \left. + (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \right] \delta \bar{\theta} + \\
 & + \left[ -\frac{\rho F d^2}{t_0^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{E F d^2}{2L^2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{E F d}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} + d \cdot (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \right] \delta \bar{w} \Big\} dx dt + \\
 & + \int_t \left[ \left( -\frac{E F d^2}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + d \cdot N_x(\phi_1) \right) \delta \bar{u} + \right. \\
 & + \left( -\frac{E I_y}{L} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}} - M_y(\phi_1) \right) \delta \bar{\alpha}_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( -\frac{EI_z}{L} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} - M_z(\phi_1) \right) \delta \bar{\alpha}_2 + \\
 & + \left( -\frac{EFd^2}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{EFd}{2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + d \cdot Q_{12}(\phi_2) \right) \delta \bar{v} + \\
 & + \left( -\frac{EI_p}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + M_x(\phi_2, \phi_3) \right) \delta \bar{\theta} + \\
 & + \left( -\frac{EFd^2}{2L(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{EFd}{2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + d \cdot Q_{13}(\phi_3) \right) \delta \bar{w} \Bigg]_{\bar{x}} dt + \\
 & + \int_{\bar{x}} \left[ \left( \frac{\rho Fd^2}{t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{u} + \left( \frac{\rho I_y}{t_0} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{\alpha}_1 + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\rho I_z}{t_0} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{\alpha}_2 + \left( \frac{\rho Fd^2}{t_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{v} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\rho I_p}{t_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{\theta} + \left( \frac{\rho Fd^2}{t_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{w} \right]_{\bar{t}} dx = 0. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Вариационное уравнение (13) разделим на  $\frac{EFd^2}{L^2}$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_t (\delta \Gamma - \delta \Pi + \delta A) dt = \\
 & = \iint_{t, x} \left\{ \left[ -\frac{\rho L^2}{t_0^2 E} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{EFd} (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \right] \delta \bar{u} + \right. \\
 & + \left[ -\frac{\rho I_y L^2}{t_0^2 EFd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_y}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \right. \\
 & - \left. \frac{L^2}{2d^2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 - \frac{L^2}{EFd^2} (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \right] \delta \bar{\alpha}_1 + \\
 & + \left[ -\frac{\rho I_z L^2}{t_0^2 EFd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_z}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \right. \\
 & - \left. \frac{L^2}{2d^2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 - \frac{L^2}{EFd^2} (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \right] \delta \bar{\alpha}_2 + \\
 & + \left[ -\frac{\rho L^2}{t_0^2 E} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} + \right. \\
 & + \left. \frac{L^2}{EFd} (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \right] \delta \bar{v} + \\
 & + \left[ -\frac{\rho I_p L^2}{t_0^2 EFd^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{L^2}{EFd^2} (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \right] \delta \bar{\theta} + \\
 & + \left[ -\frac{\rho L^2}{t_0^2 E} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left. \frac{L^2}{EFd} (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \right] \delta \bar{w} \Bigg\} dx dt + \\
 & + \int_t \left[ \left( -L \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{EFd} N_x(\phi_1) \right) \delta \bar{u} + \right. \\
 & + \left( -\frac{I_y L}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{L^2}{EFd^2} M_y(\phi_1) \right) \delta \bar{\alpha}_1 + \\
 & + \left( -\frac{I_z L}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{L^2}{EFd^2} M_z(\phi_1) \right) \delta \bar{\alpha}_2 + \\
 & + \left( -\frac{L}{2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{2d(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + \frac{L^2}{EFd} Q_{12}(\phi_2) \right) \delta \bar{v} + \\
 & + \left( -\frac{LI_p}{2Fd^2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{EFd^2} M_x(\phi_2, \phi_3) \right) \delta \bar{\theta} + \\
 & + \left( -\frac{L}{2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{2d(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + \frac{L^2}{EFd} Q_{13}(\phi_3) \right) \delta \bar{w} \Bigg]_{\bar{x}} dt + \\
 & + \int_{\bar{x}} \left[ \left( \frac{\rho L^2}{t_0 E} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{u} + \left( \frac{\rho I_y L^2}{t_0 EFd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{\alpha}_1 + \right. \\
 & + \left( \frac{\rho I_z L^2}{t_0 EFd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{\alpha}_2 + \left( \frac{\rho L^2}{t_0 E} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{v} + \\
 & + \left. \left( \frac{\rho I_p L^2}{t_0 EFd^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{\theta} + \left( \frac{\rho L^2}{t_0 E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) \delta \bar{w} \right]_{\bar{t}} dx = 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:  $\frac{\rho L^2}{Et_0^2} = 1$ ;  $t_0 = L \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ .

Вариационное уравнение (14) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 & \int_t (\delta \Gamma - \delta \Pi + \delta A) dt = \\
 & = \iint_{t, x} \left\{ \left[ -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{EFd} (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \right] \delta \bar{u} + \right. \\
 & + \left[ -\frac{I_y}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_y}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \right. \\
 & - \left. \frac{L^2}{2d^2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 - \frac{L^2}{EFd^2} (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \right] \delta \bar{\alpha}_1 + \\
 & + \left[ -\frac{I_z}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_z}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \right. \\
 & - \left. \frac{L^2}{2d^2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 - \frac{L^2}{EFd^2} (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \right] \delta \bar{\alpha}_2 + \\
 & + \left[ -\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} + \right. \\
 & + \left. \frac{L^2}{EFd} (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \right] \delta \bar{v} + \\
 & + \left[ -\frac{I_p}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{L^2}{EFd^2} (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \Big] \delta\bar{\theta} + \\
 & + \left[ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} + \right. \\
 & + \left. \frac{L^2}{EFd} (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \right] \delta\bar{w} \Big] dxdt + \\
 & + \int_t \left[ \left( -L \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{EFd} N_x(\phi_1) \right) \delta\bar{u} + \right. \\
 & + \left( -\frac{I_y L}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{L^2}{EFd^2} M_y(\phi_1) \right) \delta\bar{\alpha}_1 + \\
 & + \left( -\frac{I_z L}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{L^2}{EFd^2} M_z(\phi_1) \right) \delta\bar{\alpha}_2 + \\
 & + \left( -\frac{L}{2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{2d(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + \frac{L^2}{EFd} Q_{12}(\phi_2) \right) \delta\bar{v} + \\
 & + \left( -\frac{LI_p}{2Fd^2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{EFd^2} M_x(\phi_2, \phi_3) \right) \delta\bar{\theta} + \\
 & + \left. \left( -\frac{L}{2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{L^2}{2d(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + \frac{L^2}{EFd} Q_{13}(\phi_3) \right) \delta\bar{w} \right] dx + \\
 & + \int_x \left[ \left( t_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{u} + \left( \frac{t_0 I_y}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{\alpha}_1 + \left( \frac{t_0 I_z}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{\alpha}_2 + \right. \\
 & + \left. \left( t_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{v} + \left( \frac{t_0 I_p}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{\theta} + \left( t_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{w} \right] dx = 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Таким образом, из вариационного уравнения (15) получаем следующую систему дифференциальных уравнений с естественными граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} &= -\frac{L^2}{EFd} (N_x(P_1) + N_x(q_1)); \\
 -\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} &= \\
 &= -\frac{L^2}{EFd} (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)); \\
 -\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} &= \\
 &= -\frac{L^2}{EFd} (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)); \\
 -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} &= \\
 &= -\frac{L^2}{EFd} (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)); \\
 -\frac{I_y}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_y}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \\
 -\frac{L^2}{2d^2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 &= \frac{L^2}{EFd^2} (M_y(P_1) + M_y(q_1));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{I_z}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_z}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \\
 -\frac{L^2}{2d^2(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 &= \frac{L^2}{EFd^2} (M_z(P_1) + M_z(q_1)); \\
 -\frac{I_p}{Fd^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} &= \\
 &= -\frac{L^2}{EFd^2} (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)); \quad (16)
 \end{aligned}$$

граничные условия:

$$\begin{aligned}
 \left( -\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{L}{EFd} N_x(\phi_1) \right) L \delta\bar{u} \Big|_x &= 0; \\
 \left( -\frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + \frac{L}{EFd} Q_{12}(\phi_2) \right) L \delta\bar{v} \Big|_x &= 0; \\
 \left( -\frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{L}{2d(1+\mu)} \bar{\alpha}_2 + \frac{L}{EFd} Q_{13}(\phi_3) \right) L \delta\bar{w} \Big|_x &= 0; \\
 \left( -\frac{I_y}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{L}{EFd^2} M_y(\phi_1) \right) L \delta\bar{\alpha}_1 \Big|_x &= 0; \\
 \left( -\frac{I_z}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{L}{EFd^2} M_z(\phi_1) \right) L \delta\bar{\alpha}_2 \Big|_x &= 0; \\
 \left( -\frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} + \frac{L}{EFd^2} M_x(\phi_2, \phi_3) \right) L \delta\bar{\theta} \Big|_x &= 0; \quad (17)
 \end{aligned}$$

начальные условия:

$$\begin{aligned}
 \left( t_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{u} \Big|_t &= 0; \quad \left( t_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{v} \Big|_t = 0; \quad \left( t_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{w} \Big|_t = 0; \\
 \left( \frac{t_0 I_y}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{\alpha}_1 \Big|_t &= 0; \quad \left( \frac{t_0 I_z}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{\alpha}_2 \Big|_t = 0; \\
 \left( \frac{t_0 I_p}{Fd^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} \right) \delta\bar{\theta} \Big|_t &= 0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где  $\rho$ ,  $E$  и  $G$  - механические параметры шпинделя;  $F$ ,  $I_y$  и  $I_z$  - геометрические параметры шпинделя;  $N_x(P_1)$ ,  $Q_{12}(P_2)$  и  $Q_{13}(P_3)$  - объемные продольные и поперечные силы;  $M_y(P_1)$ ,  $M_z(P_1)$  и  $M_x(P_{23})$  - объемные изгибающие и крутящие моменты;  $N_x(q_1)$ ,  $Q_{12}(q_2)$  и  $Q_{13}(q_3)$  - поверхностные продольные и поперечные силы;  $M_y(q_1)$ ,  $M_z(q_1)$  и  $M_x(q_{23})$  - поверхностные изгибающие и крутящие моменты;  $N_x(\phi_1)$ ,  $Q_{12}(\phi_2)$  и  $Q_{13}(\phi_3)$  - торцевые продольные и поперечные силы;  $M_y(\phi_1)$ ,  $M_z(\phi_1)$  и  $M_x(\phi_{23})$  - торцевые изгибающие и крутящие моменты.

При построении векторного уравнения используем следующие векторы:  $\vec{V}$  - вектор перемещений,  $\vec{V}(Pq)$  - вектор объемных и

поверхностных сил,  $\vec{V}(\phi)$  – вектор торцевых сил. Таким образом,

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}; \vec{V}(Pq) = \begin{pmatrix} (N_x(P_1) + N_x(q_1)) \\ (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) \\ (Q_{13}(P_3) + Q_{13}(q_3)) \\ (M_y(P_1) + M_y(q_1)) \\ (M_z(P_1) + M_z(q_1)) \\ (M_x(P_2, P_3) + M_x(q_2, q_3)) \end{pmatrix};$$

$$\vec{V}(\phi) = \begin{pmatrix} N_x(\phi) \\ Q_{12}(\phi_2) \\ Q_{13}(\phi_3) \\ M_y(\phi) \\ M_z(\phi) \\ M_x(\phi_2, \phi_3) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

При холостом ходе движения аппарата в открытых зонах  $M_x(P_2, P_3)$  все поверхностные силы равны нулю. В зонах ремней и колодки  $M_x(P_2, P_3)$ , и поверхностные силы, кроме  $M_x(q_2, q_3)$ , равны нулю. При рабочем ходе движения аппарата все элементы вектора  $\vec{V}(Pq)$ , кроме  $M_x(P_2, P_3)$ , присваивают свои значения.

А элементы вектора  $\vec{V}(\phi)$  на границах принимают следующие значения:

$$N_x(\phi)|_{x=0} = 0; N_x(\phi)|_{x=L} \neq 0; Q_{12}(\phi_2)|_{x=0,L} \neq 0;$$

$$Q_{13}(\phi_3)|_{x=0,L} \neq 0; M_y(\phi)|_{x=0} = 0; M_y(\phi)|_{x=L} \neq 0;$$

$$M_z(\phi)|_{x=0} = 0; M_z(\phi)|_{x=L} \neq 0; M_x(\phi_2, \phi_3)|_{x=0,L} = 0.$$

Учитывая введенные векторы (19), получаем систему дифференциальных уравнений (16), граничные условия (17) и начальные условия (18) в векторной форме:

$$T \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + B \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + C \vec{V} = D \vec{V}(Pq), \quad (20)$$

$$\left[ \bar{A} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{B} \vec{V} + \bar{C} \vec{V}(\phi) \right] L \delta \vec{V} \Big|_x = 0, \quad (21)$$

$$\left[ \bar{T} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \delta \vec{V} \right] \Big|_t = 0, \quad (22)$$

где  $T, A, B, C, D, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{T}$  – квадратные матрицы шестого порядка, их элементы имеют следующий вид:

$$t_{1,1} = t_{2,2} = t_{3,3} = -1; t_{4,4} = -\frac{I_y}{Fd^2}; t_{5,5} = -\frac{I_z}{Fd^2};$$

$$t_{6,6} = -\frac{I_p}{Fd^2}; a_{1,1} = 1; a_{2,2} = a_{3,3} = \frac{1}{2(1+\mu)};$$

$$a_{4,4} = \frac{I_y}{Fd^2}; a_{5,5} = \frac{I_z}{Fd^2}; a_{6,6} = \frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)};$$

$$b_{4,3} = b_{5,2} = \frac{L}{2d(1+\mu)}; b_{2,5} = b_{3,5} = -b_{4,3};$$

$$c_{4,5} = c_{5,5} = -\frac{L^2}{2d^2(1+\mu)}; d_{4,4} = d_{5,5} = \frac{L^2}{EFd^2};$$

$$d_{1,1} = d_{2,2} = d_{3,3} = d_{6,6} = -d_{4,4}; \bar{a}_{1,1} = -1;$$

$$\bar{a}_{2,2} = \bar{a}_{3,3} = -\frac{1}{2(1+\mu)}; \bar{a}_{4,4} = -\frac{I_y}{Fd^2}; \bar{a}_{5,5} = -\frac{I_z}{Fd^2};$$

$$\bar{a}_{6,6} = -\frac{I_p}{2Fd^2(1+\mu)}; \bar{b}_{2,5} = \bar{b}_{3,5} = \frac{L}{2d(1+\mu)};$$

$$\bar{c}_{1,1} = \bar{c}_{2,2} = \bar{c}_{3,3} = \frac{L}{EFd}; \bar{c}_{6,6} = \frac{L}{EFd^2};$$

$$\bar{c}_{4,4} = \bar{c}_{5,5} = -\bar{c}_{6,6}; \bar{t}_{6,6} = \frac{t_0 I_p}{Fd^2}; \bar{t}_{1,1} = \bar{t}_{2,2} = \bar{t}_{3,3} = t_0;$$

$$\bar{t}_{4,4} = \frac{t_0 I_y}{Fd^2}; \bar{t}_{5,5} = \frac{t_0 I_z}{Fd^2}.$$

#### 4. Обсуждение и выводы

Исходя из общей характеристики задачи, введем следующие четырехмерные массивы:

$$V[k, fi, i, s] \text{ и (или) } V[k, t, i, s], \quad (23)$$

где

$k$  – число оборотов барабана ( $k = 1, 2, \dots, N$ );

$fi$  – угол поворота барабана ( $fi = 1, 2, \dots, 360$  °);

$t$  – время пребывания шпинделя на каждом участке;

$i$  – число уравнений ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

$s$  – координаты поперечного сечения относительно оси  $OX$  ( $s = 0, 0.1, \dots, n1$ , где  $n1$  – число узлов).

В массивах (23) сохраняется большой объем информации, в том числе значения элементов вектора перемещений в сечениях  $s$  при каждом градусе  $fi$  (на участке) и  $N$ -м обороте.

Из начальных условий (22) имеем

$$\bar{T} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \bar{\alpha}; \vec{V} \Big|_{t=t_0} = \bar{\beta},$$

где  $\bar{\alpha}$  – скорость,  $\bar{\beta}$  – перемещения.

В начале движения уборочного аппарата принято  $\Omega = 0$  и  $\omega = 0$ . При этом начало отсчета  $t' = 0$ . Тогда из начальных условий (22) элементы вектора перемещений принимают вид

$$\vec{V}(x, t) = \vec{V}(i, j) = \vec{V}(i, 0) = 0$$

или

$$\bar{\alpha} \Big|_{t=0} = 0; \bar{\beta} \Big|_{t=0} = 0.$$

После начала движения  $\omega \neq 0$ . Тогда перед началом входа шпинделя в новые зоны должны быть определены значения  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$ . С использованием значений этих параметров краевая задача (20) – (22) решается заново для текущего участка.

В статье получен новый математический аппарат для расчета стержней типа шпинделя при пространственно-динамическом нагружении в системе цилиндрических координат.

Краевая задача (20) – (22) является общей математической моделью динамического расчета

шпинделей уборочных аппаратов при сложных нагрузениях.

В дальнейших исследованиях на основе выражений (20) – (22) будут выполнены динамические расчеты шпинделей уборочных аппаратов в «холостом» и «рабочем» ходе движений, при этом в (20) – (22) будут учитываться разные виды нагружений шпинделей: давление, трение ремней и колодок, процесс реверсии, сопротивление

кустов хлопчатника, давление съемника. Поэтому усилия в векторном уравнении (20) и граничных условиях (21) в разных вариантах имеют разные значения при  $k = 1, 2, \dots, N$ -м рабочем цикле.

Статья написана в рамках фундаментального проекта ФА–Ф2–Ф048.

## Литература

- [1] *Сабλικов М.В.* Хлопкоуборочные машины. - М.: Агропромиздат, 1985. - 152 с.
- [2] *Ковган А.П.* Исследование и технологические основы расчета хлопкоуборочных машин. – М.: Машгиз, 1953.
- [3] *Иногамов К.М.* Исследование геометрии шпинделей хлопкоуборочных машин: Автореф. дис. ... канд.техн. наук. – Ташкент, 1969.
- [4] Заключительный отчет НИР на тему: «Разработка технологических процессов и динамики хлопкоуборочных аппаратов, являющихся основанием к выбору оптимальных параметров аппаратов хлопкоуборочных агрегатов» (Руководитель темы член-корр. АН РУз, д.т.н., проф. Х.Х.Усманходжаев, исполнители: Ерофеев С.Б., Ильясов Х.К., Усманов А.). – Т. I. - Ташкент, 1976. - 272 л.
- [5] *Глуценко А.Д.* Динамика механизмов привода шпинделей уборочных аппаратов хлопкоуборочных машин - Ташкент: Фан, 1985. - 154 с.
- [6] *Глуценко А.Д., Ташиболтаев М.Т.* Динамика узлов вращения уборочных аппаратов хлопкоуборочных машин. - Ташкент: Фан, 1990. - 138 с.
- [7] *Глуценко А.Д., Ризаев А.А.* Моделирование динамических взаимодействий долек хлопка и шпинделей в хлопкоуборочных аппаратах. - Ташкент: Фан, 1995. - 131 с.
- [8] *Туранов Х.Т.* Колебания и нагруженность составных валов барабанного типа некоторых хлопковых машин. – Ташкент: Фан, 1982. – 168 с.
- [9] *Коростылев В.А.* Оптимизация захватывающего элемента составного шпинделя хлопкоуборочной машины по критерию минимального веса с учетом динамических характеристик рабочего процесса: Автореф. дис. ...канд. техн. наук. – Ташкент, 1983.
- [10] *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Ташкент: Фан, 1966. – 394 с.