УДК 539.3

ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

[1]*Анарова Ш. А.*, [2]*Юлдашев Т.*

omon_shoira@mail.ru; t_yuldashev@mail.ru

[1]Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий при ТУИТ имени Мухаммада ал-Хорезми; [2]Институт механики и сейсмостойкости сооружении АН РУз

В этой статье рассматривается вывод дифференциальных уравнений колебания стержней при геометрически нелинейной постановке. Определены вариации кинетической и потенциальной энергии, а также вариации работы внешних сил. Применяя вариационный принцип Остроградского – Гамильтона выведены дифференциальные уравнения колебания стержней при геометрически нелинейной постановке. Также приведены соответствующие естественные начальные и граничные условии. Во введение дано обзор исследование научных работ в нелинейных постановках колебания стрежней в наших республике и в зарубежных странах.

Ключевые слова: колебания, стержень, геометрически нелинейная постановка, Вариационный принцип Остроградского-Гамильтона, вариация кинетическая энергия, вариация потенциальная энергия, вариации работы внешних сил

Цитирование: *Анарова Ш. А., Юлдашев Т.* Вывод дифференциальных уравнений колебания стержней при геометрически нелинейной постановке // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 2(14). — С. 72–105.

1 Введение

В настоящее время нефтегазовая отрасль является ведущей отраслью в нашей республике и во всем мире играет огромную роль в экономике. Ежегодно бурятся сотни тысяч километров скважин и с каждым годом объемы бурения растут. Нефтедобывающая промышленость быстро развивается и требует постоянного совершенствования буровых установок. При современном интенсивном освоении и добычи нефти большое внимание уделяется проблеме эффективного бурения скважин. Безаварийность работ по бурению скважин, скорость их бурения и добычи нефти зависят от качества и совершенства буровых механизмов и инструментов, что делает отрасль нефтегазового оборудования одной из динамично развивающихся отраслей. Успехи бурения неразрывно связаны с новейшими научными разработками в области расчета и проектирования буровых механизмов, повышения их технического уровня и надежности.

Буровой скважин является обязательным элементом буровых механизмов, которая предназначена для передачи крутящего момента и осевого усилия непосредственно к пород разрушающему инструменту, находящемуся на конце трубы. Поэтому режим работы буровых механизм в большинстве случаев зависит от несущей способности буровых скважин. Одним из главных факторов браковки скважины является ее искривление. До настоящего времени еще не существует единой модели, описывающей искривления скважины. Основной же причиной искривления является неустойчивость прямолинейной формы буровой скважины.

Большинство работ по исследованию динамики буровых скважин направлено на моделирование и анализ вибрация колонн, вызывающих потерю устойчивости движения бурового оборудования и нарушение их прочностных свойств. При этом одним из распространенных допущений является наложение ограничений на величины деформаций буровых скважин при их моделировании, то есть допущение их малости, что ведет к линеаризации модели.

Вопросам деформирования трехмерных деформируемых сред в рамках нелинейной теории упругости посвящен ряд монографий и журнальных публикаций. Значительный вклад в развитие нелинейной теории упругости внесли такие ученые, как А.Еремеев [1], В.И.Ерофеев [2–5], Н.В.Зволинский [6], А.С.Зинченко [7], Л.М.Зубов [8], М.И.Карякин [9], С.В.Левяков [10], А.И.Лурье [11], Н.Ф.Морозов [12], В.В.Новожилов [13], Р.Б.Нургазиев [14], Л.А.Хаджиева [15], К.Ф.Черных [16] и другие. Из зарубежных ученых следует отметить С.Антмана [17], H.Arvin [18], M.Asghari [19], А.Грина [20], A.Mamandi [21], M.T.Piovan [22], Р.Ривлина [23], К.Трусделла [24], J.W.Hijmissen [25], J.Bailey [26], A.Berlioz [27], J.Jansen [29], W.Zhu [30] и других.

Задача сильного изгиба призматического бруса концевыми моментами является нелинейным вариантом одной из задач Сен-Венана. Решение другой нелинейной задачи-задачи о кручении было дано Л.М.Зубовым и Л.Ю.Богачковой [8]. В рамках линейной теории упругости задача изгиба призматического тела была решена Сен-Венаном. С тех пор задача Сен-Венана об изгибе обобщалась в разных направлениях. Однако эти обобщения не выходили за рамки малых деформаций. Исключение составляет нелинейная плоская задача о чистом изгибе упругой полосы, решение которой изложено, например, в книге А.И.Лурье [11].

Построение единой теории тонкостенных стержней предложено в работах В.З. Власова [31], Г.Ю. Джанелидзе [32] и В.К. Кабулова [33, 34]. Потребности практики приводят в настоящее время к необходимости изучения деформации элементов с учетом геометрической нелинейности.

Вопросами разработки в области алгоритмизации теории расчета и автоматизации решения задач упругих нелинейных элементов конструкции занимались В.К.Кабулов [34], А.В.Толок [36], Т.Буриев [38], К.Ш.Бабамуратов [35], Ф.Б.Бадалов [37], Б.Курманбаев [39], Б.Мардонов [40], Ш.А.Назиров [41], М.Олимов [44] и их последователи.

Область применения линейных моделей ограничена. Как правило, такие модели не допускают всестороннего качественного и количественного анализа буровых скважин, отражая достаточно точно реальное поведение конструкций лишь до определенного уровня внешних воздействий. Они существенно сужают представление о реалистичности моделируемых процессов в системе буровая скважина и правильность их описания. Поэтому возникает необходимость моделирования нелинейных динамических систем, что связано с возможностью возникновения даже в простых элементах упругих конструкций нелинейных режимов. Среди последних работ по моделированию нелинейной динамики стержневых элементов можно отметить работы В.И.Ерофеева и его коллеги [2, 3], Л.А.Хаджиевой и ее коллеги [15, 40]. Также следует отметить исследователей A.Mamandi [21], A.J.Ashgari [19], W.Zhu [30], A.Berlioz [27], Z.Li [54], J.D.Jansen [29]. Авторы работ отмечают необходимость более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния стержневых систем. Ими было установлено, что для полного изучения колебательных процессов недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую нелинейности.

Сложность описания нелинейной динамики деформируемых элементов буровой скважин и разнообразие причин, вызывающих нелинейность, столь значительны, что проблемы прогнозирования их прочности и надежности, а также обеспечения устойчивости движения системы остаются по-прежнему одними из наиболее трудных и наименее разработанных. Следует также отметить отсутствие работ, обобщающих методы моделирования, решения и анализа буровых скважин с учетом нелинейности модели и необходимость привлечения современной технологии нелинейной теории упругости.

В процессе эксплуатации буровая скважина испытывает различные по характеру и величине нагрузки, которые приводят к сложному деформированному состоянию труб колонны. При этом в буровой скважине могут возникать большие осевые, изгибные и крутильные деформации. Эти колебания, как правило, довольно сложны по своей природе. Они тесно связаны между собой как линейно, так и нелинейно, и происходят одновременно.

Все вышеописанные ограничения и допущения моделей существенно сужают представление о реалистичности моделируемых процессов в системе буровая скважина, так как не представляется возможным описание большого разнообразия осложняющих движение буровой скважины факторов.

Анализ работ в области устойчивости буровых скважин свидетельствует о малой исследованности проблем динамики бурового оборудования с учетом их упругих свойств, нелинейных факторов и влияния окружающей среды. Усложнение же модели за счет нелинейности и увеличения размерности системы вследствие совместного рассмотрения компонент упругой деформации скважине делает данную проблему мало изученной и требует своего рассмотрения для описания реалистичности движения всей системы и ее анализа.

2 Постановка задачи

Рассмотрим перемещения стержня в виде [48–53]:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= u - z\alpha_1 - y\alpha_2; \\ u_2(x,y,z,t) &= v + z\theta, \\ u_3(x,y,z,t) &= w - y\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где u, v, w- перемещения срединной линии стержня, α_1, α_2 - углы поворота сечения при чистом изгибе, u_1, u_2, u_3- компоненты вектора перемещений, θ- угол кручения. Здесь искомые функции $u, v, w, \alpha_1, \alpha_2$ θ - являются функциями срединной линии стержня.

В общем виде выписываем вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [33, 34, 45–47]:

$$\int\limits_t (\delta K - \delta \Pi + \delta A)dt = 0, \tag{2}$$

где К, П - кинетическая и потенциальная энергии; А - работа внешних объемных и поверхностных сил.

3 Определение вариации кинетической энергии

При вычислении вариации кинетической энергии используем соотношение

$$\int\limits_t \delta\, K dt = \int\limits_t \int\limits_v \sum_{i=1}^{3} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t_i} \delta \frac{\partial u_i}{\partial t} dv dt,$$
$$\int\limits_t \delta\, K dt = \int\limits_t \int\limits_v \left(\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) dv dt, \quad (3)$$

где ρ - удельная плотность массы материала тела (полагается постоянной).

Выполняем операции интегрирования по частям:

$$\int\limits_t \delta\, K dt = \int\limits_v \sum_{i=1}^{3} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t_i} \delta u_i dv dt \Big|_t - \int\limits_t \int\limits_v \sum_{i=1}^{3} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial {t_i}^2} \delta u_i dv dt,$$

$$\int\limits_t \delta\, K dt = \int\limits_v \left(\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta u_1 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta u_2 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta u_3 \right) dv \Bigg|_t -$$
$$- \int\limits_t \int\limits_v \left[\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u_1 + \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \delta u_2 + \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 \right] dv dt. \quad (4)$$

Подставляя выражения u_1, u_2, u_3 из (1) на вариации кинетической энергии (4) и раскрывая скобки под знаком вариации после выполнения операции интегрирования по сечениям стержня и вводя обозначения, получаем [33, 49–53]:

$$\int\limits_t \delta K dt = \int\limits_x \left\{ \left[\rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \rho S_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta u - \right.$$
$$- \left[\rho S_y \frac{\partial u}{\partial t} - \rho I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_1 -$$
$$- \left[\rho S_z \frac{\partial u}{\partial t} - \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho I_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_2 +$$
$$+ \left[\rho F \frac{\partial v}{\partial t} + \rho S_y \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta v + \left[\rho F \frac{\partial w}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta w +$$
$$\left. + \left[\rho S_y \frac{\partial v}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial w}{\partial t} + \rho I_\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta \theta \right\} \Bigg|_t dx -$$
$$- \int\limits_t \int\limits_x \left\{ \left[\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho S_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho S_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \right] \delta u - \right.$$
$$- \left[\rho S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \right] \delta \alpha_1 -$$
$$- \left[\rho S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \right] \delta \alpha_2 +$$
$$+ \left[\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta v +$$
$$\left. + \left[\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta w + \left[\rho S_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho I_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta \theta \right\} dx dt. \quad (5)$$

где

$$\rho F = \int\limits_y \int\limits_z \rho dzdy;\ \rho S_y = \int\limits_y \int\limits_z \rho zdzdy;\ \rho S_z = \int\limits_y \int\limits_z \rho ydzdy;$$
$$\rho I_y = \int\limits_y \int\limits_z \rho z^2dzdy;\ \rho I_z = \int\limits_y \int\limits_z \rho y^2dzdy;\ \rho I_{yz} = \int\limits_y \int\limits_z \rho yzdzdy; \tag{6}$$
$$\rho I_\rho = \int\limits_y \int\limits_z \rho \left(z^2 + y^2\right) dzdy.$$

4 Определение вариации потенциальной энергии

Для вариации потенциальной энергии имеем [33, 45–47]:

$$\int\limits_t \delta dt = \int\limits_t \int\limits_v \sum_{i=1} \sigma_{1i}\delta\varepsilon_{1i} dvdt = \int\limits_t \int\limits_v (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13})dvdt; \tag{7}$$

Сформируем соотношения Коши [13, 33]:

$$\varepsilon_{11} = \gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2\right];$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 2\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y}; \tag{8}$$
$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 2\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Варьируем соотношения Коши (8)

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\gamma_{11} = \delta\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\delta\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2\right] =$$
$$= \delta\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\delta\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\delta\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\delta\frac{\partial u_3}{\partial x};$$
$$\delta\varepsilon_{12} = \delta\gamma_{12} = \delta\frac{\partial u_1}{\partial y} + \delta\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\delta\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\delta\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\delta\frac{\partial u_2}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial u_2}{\partial y}\delta\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\delta\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial y}\delta\frac{\partial u_3}{\partial x}; \tag{9}$$
$$\delta\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \delta\frac{\partial u_1}{\partial z} + \delta\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\delta\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\delta\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\delta\frac{\partial u_2}{\partial z} +$$
$$+ \frac{\partial u_2}{\partial z}\delta\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\delta\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\delta\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

Эти формулы вставляем на вариации потенциальной энергии (7)

$$\int_t \delta dt = \int_t \int_v \left\{ \sigma_{11} \left(\delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \delta \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \right.$$
$$+ \sigma_{12} \left(\delta \frac{\partial u_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \delta \frac{\partial u_2}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial y} \delta \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \delta \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \tag{10}$$
$$+ \sigma_{13} \left(\delta \frac{\partial u_1}{\partial z} + \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \delta \frac{\partial u_2}{\partial z} + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\partial u_2}{\partial z} \delta \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \delta \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \right\} dv dt;$$

Приведем подобных слагаемых относительно вариации

$$\int_t \delta dt = \int_t \int_v \left\{ \left(\sigma_{11} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \sigma_{11} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \sigma_{12} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \sigma_{13} \right) \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right.$$
$$+ \left(\sigma_{12} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma_{11} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \sigma_{12} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \sigma_{13} \right) \delta \frac{\partial u_2}{\partial x} +$$
$$+ \left(\sigma_{13} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \sigma_{11} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \sigma_{12} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \sigma_{13} \right) \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \sigma_{12} \right) \delta \frac{\partial u_1}{\partial y} + \tag{11}$$
$$+ \left(\sigma_{13} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \sigma_{13} \right) \delta \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma_{12} \delta \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \sigma_{12} \delta \frac{\partial u_3}{\partial y} +$$
$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma_{13} \delta \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \sigma_{13} \delta \, \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} dv dt;$$

Относительно $\frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial z}, \frac{\partial u_3}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial z}$ используем формулы (1).

В (11) выполняем операции интегрирования по частям, приведем подобных слагаемых относительно вариации перемещений, подставляя выражения перемещения u_i из (1) под знаками вариации на вариационное уравнение, выделяем интеграл по сечению стержня, вводя обозначения имеем:

$$
\begin{aligned}
&\int_t \delta\Pi dt = \int_t \left\{ \int_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x + N_x \frac{\partial u}{\partial x} - M_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] dx \right] dt\delta u + \right.\\
&+ \int_t \left\{ \int_x \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(M_y + M_y \frac{\partial u}{\partial x} - M_{11} \left(\sigma_{11} z^2\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_{11} \left(\sigma_{11} zy\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \right.\right.\right.\\
&\qquad -M_{12} \left(z\sigma_{12}\right) \alpha_2 - M_{13} \left(z\sigma_{13}\right) \alpha_1)] \, dx \} \, dt\delta\alpha_1 + \\
&+ \int_t \left\{ \int_x \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(M_z + M_z \frac{\partial u}{\partial x} - M_{11} \left(\sigma_{11} yz\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_{11} \left(\sigma_{11} y^2\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \right.\right.\right.\\
&\qquad -M_{12} \left(\sigma_{12} y\right) \alpha_2 - M_{13} \left(\sigma_{13} y\right) \alpha_1)] \, dx \} \, dt\delta\alpha_2 + \\
&+ \int_t \left\{ \int_x \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(M_z + M_z \frac{\partial u}{\partial x} - M_{11} \left(\sigma_{11} yz\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_{11} \left(\sigma_{11} y^2\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \right.\right.\right.\\
&\qquad -M_{12} \left(\sigma_{12} y\right) \alpha_2 - M_{13} \left(\sigma_{13} y\right) \alpha_1)] \, dx \} \, dt\delta\alpha_2 + \\
&+ \int_t \left\{ \int_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q_2 + N_x \frac{\partial v}{\partial x} + M_y \frac{\partial \theta}{\partial x} + Q_3 \theta \right) \right] dx \right\} dt\delta v + \\
&+ \int_t \left\{ \int_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q_3 + N_x \frac{\partial w}{\partial x} - M_z \frac{\partial \theta}{\partial x} - Q_2 \theta \right) \right] dx \right\} dt\delta w + \\
&+ \int_t \left\{ \int_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(M_y \frac{\partial v}{\partial x} - M_z \frac{\partial w}{\partial x} + M_{12} \left(z\sigma_{12}\right) - M_{13} \left(\sigma_{13} y\right) + \right.\right.\right. \qquad (12)\\
&+ \left(M_{11} \left(z^2 \sigma_{11}\right) + M_{11} \left(\sigma_{11} y^2\right) \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left. \left. \left. \left(M_{12} \left(\sigma_{12} y\right) + M_{13} \left(z\sigma_{13}\right) \right) \theta \right) \right] dx \right\} dt\delta\theta + \\
&+ \int_t \left\{ \left(N_x + N_x \frac{\partial u}{\partial x} - M_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} Q_2 \alpha_2 - \frac{\partial}{\partial z} Q_3 \alpha_1 \right) \Big|_x \Big] \delta u \right\} dt + \\
&+ \int_t \left\{ \left(-M_y - M_y \frac{\partial u}{\partial x} + M_{11} \left(\sigma_{11} z^2\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + M_{11} \left(\sigma_{11} zy\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \right.\right.\\
&\qquad -M_{12} \left(z\sigma_{12}\right) \alpha_2 - M_{13} \left(z\sigma_{13}\right) \alpha_1) |_x] \, \delta\alpha_1 \} \, dt \\
&+ \int_t \left\{ \left(-M_z - M_z \frac{\partial u}{\partial x} + M_{11} \left(\sigma_{11} yz\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + M_{11} \left(\sigma_{11} y^2\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \right.\right.\\
&\qquad +M_{12} \left(\sigma_{12} y\right) \alpha_2 + M_{13} \left(\sigma_{13} y\right) \alpha_1) |_x] \, \delta\alpha_2 \} \, dt \\
&+ \int_t \left\{ \left[\left(Q_2 + N_x \frac{\partial v}{\partial x} + M_y \frac{\partial \theta}{\partial x} + Q_3 \theta \right) \Big|_x \right] \delta v \right\} dt + \\
&+ \int_t \left[\left(Q_3 + N_x \frac{\partial w}{\partial x} - M_z \frac{\partial \theta}{\partial x} - Q_2 \theta \right) \Big|_x \right] \delta w \Big\} dt + \\
&+ \int_t \left\{ \left[M_y \frac{\partial v}{\partial x} - M_z \frac{\partial w}{\partial x} + M_{12} \left(z\sigma_{12}\right) + \left(M_{13} \left(z\sigma_{13}\right) + M_{12} \left(\sigma_{12} y\right) \right) \theta - \right.\right.\\
&\qquad - M_{13} \left(\sigma_{13} y\right) + M_{11} \left(z^2 \sigma_{11}\right) + M_{11} \left(\sigma_{11} y^2\right)] \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_x \Big] \delta\theta \Big\} dt.
\end{aligned}
$$

Для нелинейных частей вариации потенциальной энергии вводим следующие обозначения:

$$\int\limits_t \delta\Pi dt = \int\limits_t -\left\{\int\limits_x \left\{\left[\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial R_1}{\partial x}\right]\delta u+\left[\frac{\partial Q_2}{\partial x}+\frac{\partial R_2}{\partial x}\right]\delta v+\right.\right.$$
$$+\left[\frac{\partial Q_3}{\partial x}+\frac{\partial R_3}{\partial x}\right]\delta w+\left[\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial R_4}{\partial x}\right]\delta\alpha_1+$$
$$\left.+\left[\frac{\partial M_z}{\partial x}+\frac{\partial R_5}{\partial x}\right]\delta\alpha_2+\left[\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial R_6}{\partial x}\right]\delta\theta\right\}dx+ \tag{13}$$
$$+\left[N_x+R_1\right]\delta u+\left[Q_2+R_2\right]\delta v+\left[Q_3+R_3\right]\delta w+$$
$$\left.+\left[M_y+R_4\right]\delta\alpha_1+\left[M_z+R_5\right]\delta\alpha_2+\left.\left[M_x+R_6\right]\delta\theta\right|_x\right\}dt.$$

Здесь

$$R_1 = N_x\frac{\partial u}{\partial x}-M_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-M_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$
$$R_2 = N_x\frac{\partial v}{\partial x}+M_y\frac{\partial \theta}{\partial x}+Q_3\theta;$$
$$R_3 = N_x\frac{\partial w}{\partial x}-M_z\frac{\partial \theta}{\partial x}-Q_2\theta;$$
$$R_4 = -\left(M_y\frac{\partial u}{\partial x}-M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-M_{11}\left(\sigma_{11}zy\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}-M_{12}\left(z\sigma_{12}\right)\alpha_2-M_{13}\left(z\sigma_{13}\right)\alpha_1\right); \tag{14}$$
$$R_5 = -\left(M_z\frac{\partial u}{\partial x}-M_{11}\left(\sigma_{11}yz\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}-M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\alpha_2-M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)\alpha_1\right);$$
$$R_6 = M_y\frac{\partial v}{\partial x}-M_z\frac{\partial w}{\partial x}+M_{12}\left(\sigma_{12}z\right)-$$
$$-M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)+M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\theta+M_{13}\left(\sigma_{13}z\right)\theta+$$
$$+M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

5 Определение вариации работы внешних сил

Рассмотрим вариации работы внешних сил

$$\int\limits_t \delta A dt = \int\limits_t \left[\int\limits_v \left(F_1\delta u_1+F_2\delta u_2+F_3\delta u_3\right)dv+\right.$$
$$+\int\limits_s (q_1\delta u_1+q_2\delta u_2+q_3\delta u_3)ds+ \tag{15}$$
$$\left.+\int\limits_{s_1}(\varphi_1\delta u_1+\varphi_2\delta u_2+\varphi_3\delta u_3)ds_1\,|_x\right].$$

Здесь F_1, F_2, F_3 – обозначены составляющие объемных сил, отнесенные к единице объема, через q_1, q_2, q_3 – соответственно поверхностные силы, отнесенные к единице площади поверхности стержня, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – граничные напряжения.

В вариации работы внешних сил (15) подставляем выражения перемещения u_1, u_2, u_3 из (1):

$$\begin{gathered}\int\limits_t \delta A dt = \int\limits_t \left[\int\limits_v \left(F_1\,\delta\left(u - z\alpha_1 - y\alpha_2\right) + F_2\delta\left(v + z\theta\right) + F_3\delta\left(w - y\theta\right)\right) dv + \right.\\ + \int\limits_s \left(q_1\delta\left(u - z\alpha_1 - y\alpha_2\right) + q_2\delta\left(v + z\theta\right) + q_3\delta\left(w - y\theta\right)\right)ds + \\ \left. + \int\limits_{s_1} \left(\varphi_1\delta\left(u - z\alpha_1 - y\alpha_2\right) + \varphi_2\delta\left(v + z\theta\right) + \varphi_3\delta\left(w - y\theta\right)\right)ds_1\,|_x \right] dt;\end{gathered} \tag{16}$$

Раскрываем скобки и выделяем интеграл по сечению стержня. Тогда вариации работы внешних сил (16) получают вид:

$$\begin{gathered}\int\limits_t \delta A dt = \\ = \int\limits_t \left[\int\limits_v \left(F_1\,\delta u - zF_1\delta\alpha_1 - yF_1\delta\alpha_2 + F_2\delta v + F_3\delta w + \left(zF_2 - y\,F_3\right)\delta\theta\right) dv + \right.\\ + \int\limits_s \left(q_1\,\delta u - zq_1\delta\alpha_1 - yq_1\delta\alpha_2 + q_2\delta v + q_3\delta w + \left(zq_2 - y\,q_3\right)\delta\theta\right) ds + \\ \left. + \int\limits_{s_1} \left(\varphi_1\,\delta u - z\varphi_1\delta\alpha_1 - y\varphi_1\delta\alpha_2 + \varphi_2\delta v + \varphi_3\delta w + \left(z\varphi_2 - y\,\varphi_3\right)\delta\theta\right)ds_1\,|_x \right] dt;\end{gathered} \tag{17}$$

Выделим интеграл поперечного сечения стержня

$$\begin{gathered}\int\limits_t \delta A dt = \int\limits_t \left\{ \int\limits_x \left[\int\limits_y \int\limits_z \left(F_1\,\delta u - zF_1\delta\alpha_1 - yF_1\delta\alpha_2 + \right.\right.\right.\\ \left. + F_2\delta v + F_3\delta w + \left(zF_2 - y\,F_3\right)\delta\theta\right) dz dy + \\ \left. + \int\limits_l \left(q_1\,\delta u - zq_1\delta\alpha_1 - yq_1\delta\alpha_2 + q_2\delta v + q_3\delta w + \left(zq_2 - y\,q_3\right)\delta\theta\right) dl \right] dx + \\ \left. + \int\limits_{s_1} \left(\varphi_1\,\delta u - z\varphi_1\delta\alpha_1 - y\varphi_1\delta\alpha_2 + \varphi_2\delta v + \varphi_3\delta w + \left(z\varphi_2 - y\,\varphi_3\right)\delta\theta\right)ds_1\,|_x \right\} dt;\end{gathered} \tag{18}$$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_t \delta A dt = \int\limits_t \left\{ \int\limits_x \left[\left(\bar{F}_1 + \bar{q}_1 \right) \delta u - \right.\right. \\
- \left(M_y \left(\bar{F}_1 \right) + M_y \left(\bar{q}_1 \right) \right) \delta \alpha_1 - \left(M_z \left(\bar{F}_1 \right) + M_z \left(\bar{q}_1 \right) \right) \delta \alpha_2 + \\
+ \left(\bar{F}_2 + \bar{q}_2 \right) \delta v + \left(\bar{F}_3 + \bar{q}_3 \right) \delta w + \left(M_x \left(F_{23} \right) + M_x \left(q_{23} \right) \right) \delta \theta \right] dx + \\
+ \left(\bar{\varphi}_1 \, \delta u - M_y \left(\varphi_1 \right) \delta \alpha_1 - M_z \left(\varphi_1 \right) \delta \alpha_2 + \right. \\
\left. \left. + \bar{\varphi}_2 \delta v + \bar{\varphi}_3 \delta w + M_x \left(\varphi_{\ 23} \right) \right|_x \right\} dt;
\end{gathered} \tag{19}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\bar{\varphi}_1 = \int\limits_y \int\limits_z \varphi_1 dz dy; \;\; \bar{\varphi}_2 = \int\limits_y \int\limits_z \varphi_2 dz dy; \;\; \bar{\varphi}_3 = \int\limits_y \int\limits_z \varphi_3 dz dy; \\
M_y(\varphi_1) = \int\limits_y \int\limits_z \varphi_1 \cdot z dz dy; \;\; M_z(\varphi_1) = \int\limits_y \int\limits_z \varphi_1 \cdot y dz dy; \\
M_x(\varphi_{23}) = \int\limits_y \int\limits_z \left(z \cdot \varphi_2 - y \cdot \varphi_3 \right) dz dy; \\
\bar{F}_1 = \int\limits_y \int\limits_z F_1 dz dy; \;\; \bar{F}_2 = \int\limits_y \int\limits_z F_2 dz dy; \;\; \bar{F}_3 = \int\limits_y \int\limits_z F_3 dz dy;
\end{gathered} \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
M_y(F_1) = \int\limits_y \int\limits_z F_1 \cdot z dz dy; \;\; M_z(F_1) = \int\limits_y \int\limits_z F_1 \cdot y dz dy; \\
M_x(F_{23}) = \int\limits_y \int\limits_z \left(z \cdot F_2 - y \cdot F_3 \right) dz dy; \\
\bar{q}_1 = \int\limits_y \int\limits_z q_1 dz dy; \;\; \bar{q}_2 = \int\limits_y \int\limits_z q_2 dz dy; \;\; \bar{q}_3 = \int\limits_y \int\limits_z q_3 dz dy; \\
M_y(q_1) = \int\limits_y \int\limits_z q_1 \cdot z dz dy; \;\; M_z(q_1) = \int\limits_y \int\limits_z q_1 \cdot y dz dy; \\
M_x(q_{23}) = \int\limits_y \int\limits_z \left(z \cdot q_2 - y \cdot q_3 \right) dz dy.
\end{gathered}
$$

6 Вывод вариационного уравнения колебаний стержней

Полученные результаты вариации кинетической энергии (5) потенциальной энергии (16) и работы внешних сил (20) подставляем на вариационный принцип Остроградского - Гамильтона (2), в результате получаем вариационное уравнение стержня в геометрически нелинейной постановке.

$$
\begin{gathered}
\int\limits_t (\delta K-\delta\Pi+\delta A)dt= \\
=\int\limits_x\left\{\left[\rho F\frac{\partial u}{\partial t}-\rho S_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-\rho S_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right]\delta u+\right. \\
+\left[\rho F\frac{\partial v}{\partial t}+\rho S_y\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\delta v+\left[\rho F\frac{\partial w}{\partial t}-\rho S_z\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\delta w- \\
-\left[\rho S_y\frac{\partial u}{\partial t}-\rho I_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-\rho I_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right]\delta\alpha_1- \\
-\left[\rho S_z\frac{\partial u}{\partial t}-\rho I_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-\rho I_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right]\delta\alpha_2+ \\
\left.+\left[\rho S_y\frac{\partial v}{\partial t}-\rho S_z\frac{\partial w}{\partial t}+\rho I_\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\delta\theta\right\}\Bigg|_t dx- \\
-\int\limits_t\int\limits_x\left\{\left[\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho S_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho S_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right]\delta u+\right. \\
+\left[\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho S_y\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right]\delta v+ \\
+\left[\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho S_z\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right]\delta w- \\
-\left[\rho S_y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho I_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho I_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right]\delta\alpha_1- \\
-\left[\rho S_z\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho I_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho I_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right]\delta\alpha_2+ \\
\left.+\left[\rho S_y\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\rho S_z\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho I_\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right]\delta\theta\right\}dxdt- \\
-\int\limits_t\left\{\int\limits_x\left[\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial R_1}{\partial x}\right]\delta u+\left[\frac{\partial Q_2}{\partial x}+\frac{\partial R_2}{\partial x}\right]\delta v+\right. \\
+\left[\frac{\partial Q_3}{\partial x}+\frac{\partial R_3}{\partial x}\right]\delta w+\left[\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial R_4}{\partial x}\right]\delta\alpha_1+ \\
+\left[\frac{\partial M_z}{\partial x}+\frac{\partial R_5}{\partial x}\right]\delta\alpha_2+\left[\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial R_6}{\partial x}\right]\delta\theta\Bigg\}dx+ \\
+\left[N_x+R_1\right]\delta u+\left[Q_2+R_2\right]\delta v+\left[Q_3+R_3\right]\delta w+ \\
\left.+\left[M_y+R_4\right]\delta\alpha_1+\left[M_z+R_5\right]\delta\alpha_2+\left[M_x+R_6\right]\delta\theta|_x\right\}dt+ \\
+\int\limits_t\left\{\int\limits_x\left[\left(\bar F_1+\bar q_1\right)\delta u-\left(M_y\left(\bar F_1\right)+M_y\left(\bar q_1\right)\right)\delta\alpha_1-\right.\right. \\
-\left(M_z\left(\bar F_1\right)+M_z\left(\bar q_1\right)\right)\delta\alpha_2+ \\
+\left(\bar F_2+\bar q_2\right)\delta v+\left(\bar F_3+\bar q_3\right)\delta w+ \\
+\left(M_x\left(F_{23}\right)+M_x\left(q_{23}\right)\right)\delta\theta\big]dx+ \\
+[\bar\varphi_1\delta u-M_y\left(\varphi_1\right)\delta\alpha_1-M_z\left(\varphi_1\right)\delta\alpha_2+ \\
\left.+\bar\varphi_2\delta v+\bar\varphi_3\delta w+M_x\left(\varphi_{23}\right)\delta\theta\right]|_x\Big\}dt=0.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Здесь приводим подобные слагаемые

$$
\begin{gathered}
\int\limits_t (\delta K - \delta \Pi + \delta A) dt = \\
- \int\limits_t \int\limits_x \Bigg\{ \left[\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho S_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho S_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial x} + \left(\bar{F}_1 + \bar{q}_1 \right) \right] \delta u + \\
+ \left[\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial x} + \left(\bar{F}_2 + \bar{q}_2 \right) \right] \delta v + \\
+ \left[\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} + \frac{\partial R_3}{\partial x} + \left(\bar{F}_3 + \bar{q}_3 \right) \right] \delta w - \\
- \left[\rho S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + \right. \\
\left. + \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial R_4}{\partial x} - \left(M_y \left(\bar{F}_1 \right) + M_y \left(\bar{q}_1 \right) \right) \right] \delta \alpha_1 - \\
- \left[\rho S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + \frac{\partial M_z}{\partial x} + \right. \\
+ \frac{\partial R_5}{\partial x} - \left(M_z \left(\bar{F}_1 \right) + M_z \left(\bar{q}_1 \right) \right) \delta \alpha_2 + \\
+ \left[\rho S_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho I_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \right. \\
\left. + \frac{\partial R_6}{\partial x} + \left(M_x \left(F_{23} \right) + M_x \left(q_{23} \right) \right) \right] \delta \theta \Bigg\} dx + \\
+ \left[N_x + R_1 + \bar{\varphi}_1 \right] \delta u + \left[Q_2 + R_2 + \bar{\varphi}_2 \right] \delta v + \\
+ \left[Q_3 + R_3 + \bar{\varphi}_3 \right] \delta w + \left[M_y + R_4 - M_y \left(\varphi_1 \right) \right] \delta \alpha_1 + \\
+ \left[M_z + R_5 - M_z \left(\varphi_1 \right) \right] \delta \alpha_2 + \\
+ \left. \left[M_x + R_6 + M_x \left(\varphi_{23} \right) \right] \delta \theta \right|_x \Big\} dt + \\
+ \int\limits_x \Bigg\{ \left[\rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \rho S_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta u + \\
+ \left[\rho F \frac{\partial v}{\partial t} + \rho S_y \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta v + \left[\rho F \frac{\partial w}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta w + \\
- \left[\rho S_y \frac{\partial u}{\partial t} - \rho I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_1 - \\
- \left[\rho S_z \frac{\partial u}{\partial t} - \rho I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \rho I_z \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_2 + \\
+ \left. \left[\rho S_y \frac{\partial v}{\partial t} - \rho S_z \frac{\partial w}{\partial t} + \rho I_\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta \theta \Bigg\} \right|_t dx = 0;
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Вариации не известных функции $\delta u, \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta v, \delta w, \delta\theta$ не равняются нулю. Поэтому их коэффициенты должны равняется нулю. Исходя из этого положения можем получить из вариационного уравнения (22) следующие системы уравнения с соответствующими начальными и граничными условиями.

Уравнения движения стержня:

$$
\begin{gathered}
-\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho S_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}+\rho S_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}+\\
+\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial R_1}{\partial x}+\left(\bar{F}_1+\bar{q}_1\right)=0;\\
-\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\rho S_y\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{\partial Q_2}{\partial x}+\frac{\partial R_2}{\partial x}+\left(\bar{F}_2+\bar{q}_2\right)=0;\\
-\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho S_z\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{\partial Q_3}{\partial x}+\frac{\partial R_3}{\partial x}+\left(\bar{F}_3+\bar{q}_3\right)=0;\\
\rho S_y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho I_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho I_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}+\\
+\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial R_4}{\partial x}-\left(M_y\left(\bar{F}_1\right)+M_y\left(\bar{q}_1\right)\right)=0;\\
\rho S_z\frac{\partial u}{\partial t}-\rho I_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-\rho I_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial M_z}{\partial x}+\\
+\frac{\partial R_5}{\partial x}-\left(M_z\left(\bar{F}_1\right)+M_z\left(\bar{q}_1\right)\right)=0;\\
-\rho S_y\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho S_z\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho I_\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{\partial M_x}{\partial x}+\\
+\frac{\partial R_6}{\partial x}+\left(M_x\left(F_{23}\right)+M_x\left(q_{23}\right)\right)=0;
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Начальные условия:

$$
\begin{gathered}
\left[\rho F\frac{\partial u}{\partial t}-\rho S_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-\rho S_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right]\delta u\bigg|_t=0;\\
\left[-\rho S_y\frac{\partial u}{\partial t}+\rho I_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\rho I_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right]\delta\alpha_1\bigg|_t=0;\\
\left[-\rho S_z\frac{\partial u}{\partial t}+\rho I_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\rho I_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right]\delta\alpha_2\bigg|_t=0;\\
\left[\rho F\frac{\partial v}{\partial t}+\rho S_y\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\delta v\bigg|_t=0;\\
\left[\rho F\frac{\partial w}{\partial t}-\rho S_z\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\delta w\bigg|_t=0;\\
\left[\rho S_y\frac{\partial v}{\partial t}-\rho S_z\frac{\partial w}{\partial t}+\rho I_\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\delta\theta\bigg|_t=0.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Граничные условия:

$$
\begin{gathered}
\left[-N_x+R_1+\bar{\varphi}_1\right]\delta u|_x=0;\\
\left[-Q_2+R_2+\bar{\varphi}_2\right]\delta v|_x=0;\\
\left[-Q_3+R_3+\bar{\varphi}_3\right]\delta w|_x=0;\\
\left[-M_y+R_4+M_y\left(\varphi_1\right)\right]\delta\alpha_1|_x=0;\\
\left[-M_z+R_5+M_z\left(\varphi_1\right)\right]\delta\alpha_2|_x=0;\\
\left[-M_x+R_6+M_x\left(\varphi_{23}\right)\right]\delta\theta|_x=0.
\end{gathered}
$$

На основе закона Гука выражении $N_x, Q_2, Q_3, M_y, M_z, M_x$ в перемещениях получаем из соотношения (1).

Компоненты напряжении на основе закона Гука берем с учетом (6) в виде [13, 33, 45–47]:

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = Ee_{11} = E\frac{\partial u_1}{\partial x} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - y\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right);\\ \sigma_{12} = Ge_{12} = G\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = G\left(-\alpha_2 + \frac{\partial v}{\partial x} + z\frac{\partial \theta}{\partial x}\right);\\ \sigma_{13} = Ge_{13} = G\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = G\left(-\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right);\end{gathered} \tag{25}$$

где - модуль упругости, G - модуль сдвига.

$$\begin{gathered}N_x = \int\limits_y \int\limits_z \sigma_{11} dzdy = \int\limits_y \int\limits_z Ee_{11} dzdy =\\ = E\int\limits_y \int\limits_z \frac{\partial u_1}{\partial x} dzdy = E\int\limits_y \int\limits_z \frac{\partial}{\partial x}\left(u - z\alpha_1 - y\alpha_2\right) dzdy =\\ = E\int\limits_y \int\limits_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - y\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right) dzdy =\\ = E\left(F\frac{\partial u}{\partial x} - S_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - S_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right);\\ N_x = EF\frac{\partial u}{\partial x} - ES_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - ES_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x};\\ Q_2 = \int\limits_y \int\limits_z \sigma_{12} dzdy = \int\limits_y \int\limits_z Ge_{12} dzdy =\\ = G\int\limits_y \int\limits_z \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) dzdy =\\ = G\int\limits_y \int\limits_z \left(-\alpha_2 + \frac{\partial v}{\partial x} + z\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy;\\ Q_2 = -GF\alpha_2 + GF\frac{\partial v}{\partial x} + GS_y\frac{\partial \theta}{\partial x};\\ Q_3 = \int\limits_y \int\limits_z \sigma_{13} dzdy =\\ = \int\limits_y \int\limits_z Ge_{13} dzdy = G\int\limits_y \int\limits_z \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) dzdy =\\ = G\int\limits_y \int\limits_z \left(-\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial z} - y\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) dzdy;\\ Q_3 = -GF\alpha_1 + GF\frac{\partial w}{\partial x} - GS_z\frac{\partial \theta}{\partial x};\end{gathered}$$

$$M_y = \int\limits_y \int\limits_z \sigma_{11} \cdot z dz dy = \int\limits_y \int\limits_z E z e_{11} dz dy =$$

$$= E \int\limits_y \int\limits_z z \frac{\partial u_1}{\partial x} dz dy =$$

$$= E \int\limits_y \int\limits_z \left(z \frac{\partial u}{\partial x} - z^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - yz \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right) dz dy =$$

$$= E \left(S_y \frac{\partial u}{\partial x} - I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right);$$

$$M_y = E S_y \frac{\partial u}{\partial x} - E I_y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - E I_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$

$$M_z = \int\limits_y \int\limits_z \sigma_{11} \cdot y dz dy = \int\limits_y \int\limits_z E y e_{11} dz dy =$$

$$= E \int\limits_y \int\limits_z y \frac{\partial u_1}{\partial x} dz dy = E \int\limits_y \int\limits_z \left(y \frac{\partial u}{\partial x} - yz \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - y^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right) dz dy =$$

$$= E \left(S_z \frac{\partial u}{\partial x} - I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - I_y \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right);$$

$$M_z = E S_z \frac{\partial u}{\partial x} - E I_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - E I_y \frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$

$$M_x = \int\limits_y \int\limits_z (\sigma_{12} z - \sigma_{13} y) dz dy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[G z \left(-\alpha_2 + \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - G y \left(-\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] dz dy =$$

$$= -G S_y \alpha_2 + G S_y \frac{\partial v}{\partial x} + G I_y \frac{\partial \theta}{\partial x} +$$

$$+ G S_z \alpha_1 - G S_z \frac{\partial w}{\partial x} + G I_z \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_x = G S_z \alpha_1 - G S_y \alpha_2 + G S_y \frac{\partial v}{\partial x} - G S_z \frac{\partial w}{\partial x} + G I_\rho \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{11} \left(\sigma_{11} z^2 \right) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{11} z^2 \right) dz dy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[E \frac{\partial u}{\partial x} - E z \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - E y \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] z^2 dz dy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[E z^2 \frac{\partial u}{\partial x} - E z^3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - E y z^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] dz dy =$$

$$= E I_y \frac{\partial u}{\partial x} - E I \left(z^3 \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - E I \left(y z^2 \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$

$$M_{11} \left(\sigma_{11} y^2 \right) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{11} y^2 \right) dz dy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[E \frac{\partial u}{\partial x} - E z \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - E y \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] y^2 dz dy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[Ey^2 \frac{\partial u}{\partial x} - Ezy^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - Ey^3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] dzdy =$$

$$= EI_z \frac{\partial u}{\partial x} - EI\left(zy^2\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI\left(y^3\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$

$$M_{11}\left(\sigma_{11} yz\right) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{11} yz\right) dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[E \frac{\partial u}{\partial x} - Ez \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - Ey \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left[Eyz \frac{\partial u}{\partial x} - Eyz^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - Ey^2 z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] dzdy =$$

$$= EI_{yz} \frac{\partial u}{\partial x} - EI\left(yz^2\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI\left(y^2 z\right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$

$$M_{12}(\sigma_{12} y) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{12} y\right) dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_2 + G \frac{\partial v}{\partial x} + Gz \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) ydzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gy\alpha_2 + Gy \frac{\partial v}{\partial x} + Gzy \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dzdy =$$

$$= -GS_z \alpha_2 + GS_z \frac{\partial v}{\partial x} + GI_{yz} \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{12}(\sigma_{12} z) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{12} z\right) dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_2 + G \frac{\partial v}{\partial x} + Gz \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) zdzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gz\alpha_2 + Gz \frac{\partial v}{\partial x} + Gz^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dzdy =$$

$$= -GS_y \alpha_2 + GS_y \frac{\partial v}{\partial x} + GI_y \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{12}(\sigma_{12} y^2) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{12} y^2\right) dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_2 + G \frac{\partial v}{\partial x} + Gz \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) y^2 dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gy^2 \alpha_2 + Gy^2 \frac{\partial v}{\partial x} + Gzy^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dzdy =$$

$$= -GI_z \alpha_2 + GI_z \frac{\partial v}{\partial x} + GI\left(zy^2\right) \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{12}(\sigma_{12} z^2) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{12} z^2\right) dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_2 + G\frac{\partial v}{\partial x} + Gz\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) z^2 dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gz^2\alpha_2 + Gz^2\frac{\partial v}{\partial x} + Gz^3\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$

$$= -GI_y\alpha_2 + GI_y\frac{\partial v}{\partial x} + GI\left(z^3\right)\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{12}(\sigma_{12}yz) = \int\limits_y \int\limits_z (\sigma_{12}yz)\, dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_2 + G\frac{\partial v}{\partial x} + Gz\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) yzdzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gyz\alpha_2 + Gyz\frac{\partial v}{\partial x} + Gyz^2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$

$$= -GI_{yz}\alpha_2 + GI_{yz}\frac{\partial v}{\partial x} + GI\left(yz^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{13}(\sigma_{13}y) = \int\limits_y \int\limits_z (\sigma_{13}y)\, dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_1 + G\frac{\partial w}{\partial x} - Gy\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) ydzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gy\alpha_1 + Gy\frac{\partial w}{\partial x} - Gy^2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$

$$= -GS_z\alpha_1 + GS_z\frac{\partial w}{\partial x} - GI_z\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{13}(\sigma_{13}z) = \int\limits_y \int\limits_z (\sigma_{13}z)\, dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_1 + G\frac{\partial w}{\partial x} - Gy\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) zdzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gz\alpha_1 + Gz\frac{\partial w}{\partial x} - Gyz\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$

$$= -GS_y\alpha_1 + GS_y\frac{\partial w}{\partial x} - GI_{yz}\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{13}(\sigma_{13}z^2) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{13}z^2\right) dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_1 + G\frac{\partial w}{\partial x} - Gy\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) z^2 dzdy =$$

$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gz^2\alpha_1 + Gz^2\frac{\partial w}{\partial x} - Gyz^2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$

$$= -GI_y\alpha_1 + GI_y\frac{\partial w}{\partial x} - GI\left(yz^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$M_{13}(\sigma_{13}y^2) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{13}y^2\right) dzdy =$$
$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_1 + G\frac{\partial w}{\partial x} - Gy\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) y^2 dzdy =$$
$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gy^2\alpha_1 + Gy^2\frac{\partial w}{\partial x} - Gy^3\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$
$$= -GI_z\alpha_1 + GI_z\frac{\partial w}{\partial x} - GI\left(y^3\right)\frac{\partial \theta}{\partial x};$$
$$M_{13}(\sigma_{13}yz) = \int\limits_y \int\limits_z \left(\sigma_{13}yz\right) dzdy = \tag{26}$$
$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-G\alpha_1 + G\frac{\partial w}{\partial x} - Gy\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) yzdzdy =$$
$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(-Gyz\alpha_1 + Gyz\frac{\partial w}{\partial x} - Gy^2z\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dzdy =$$
$$= -GI_{yz}\alpha_1 + GI_{yz}\frac{\partial w}{\partial x} - GI\left(y^2z\right)\frac{\partial \theta}{\partial x};$$
$$I\left(y^2z\right) = \int\limits_y \int\limits_z \left(y^2z\right) dzdy;\ I\left(yz^2\right) =$$
$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(yz^2\right) dzdy;\ I\left(y^3\right) =$$
$$= \int\limits_y \int\limits_z \left(y^3\right) dzdy; I\left(z^3\right) = \int\limits_y \int\limits_z \left(z^3\right) dzdy;$$

Теперь определяем нелинейной части уравнений (23):

$$R_1 = \left(EF\frac{\partial u}{\partial x} - ES_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - ES_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} -$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x} - EI_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_{yz}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} -$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x} - EI_{yz}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_y\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x};$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial x} = \left(EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ES_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - ES_z\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+\left(EF\frac{\partial u}{\partial x} - ES_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - ES_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - EI_{yz}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} -$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x} - EI_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_{yz}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} -$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI_{yz}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - EI_y\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} -$$

$$-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2};$$

$$R_2=\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$
$$+\left(-GF\alpha_1+GF\frac{\partial w}{\partial x}-GS_z\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\theta;$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial x}=\left(EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-ES_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-ES_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+$$
$$+\left(ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$
$$+\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+$$
$$+\left(-GF\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+GF\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-GS_z\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)\theta+$$
$$+\left(-GF\alpha_1+GF\frac{\partial w}{\partial x}-GS_z\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x};$$

$$R_3=\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}-$$
$$-\left(-GF\alpha_2+GF\frac{\partial v}{\partial x}+GS_y\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\theta;$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial x}=\left(EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-ES_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-ES_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}-$$
$$-\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-$$
$$-\left(-GF\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+GF\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+GS_y\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)\theta-$$
$$-\left(-GF\alpha_2+GF\frac{\partial v}{\partial x}+GS_y\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x};$$

$$R_4=-\left(M_y\frac{\partial u}{\partial x}-M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-M_{11}\left(\sigma_{11}zy\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}-M_{12}\left(z\sigma_{12}\right)\alpha_2-M_{13}\left(z\sigma_{13}\right)\alpha_1\right);$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial x}=-\left(ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-$$

$$-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}+M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{11}\left(\sigma_{11}zy\right)\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}+M_{11}\left(\sigma_{11}zy\right)\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}M_{12}\left(z\sigma_{12}\right)\alpha_2+M_{12}\left(z\sigma_{12}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{13}\left(z\sigma_{13}\right)\right)\alpha_1+M_{13}\left(z\sigma_{13}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x};$$
$$R_5=-\left(M_z\frac{\partial u}{\partial x}-M_{11}\left(\sigma_{11}yz\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}-M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\alpha_2-M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)\alpha_1\right);$$
$$\frac{\partial R_5}{\partial x}=-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{11}\left(\sigma_{11}yz\right)\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}+M_{11}\left(\sigma_{11}yz\right)\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}+M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\right)\alpha_2+M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)\right)\alpha_1+M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x};$$

$$R_6=M_y\frac{\partial v}{\partial x}-M_z\frac{\partial w}{\partial x}+M_{12}\left(\sigma_{12}z\right)-$$
$$-M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)+M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\theta+M_{13}\left(\sigma_{13}z\right)\theta+$$
$$+M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x};$$
$$\frac{\partial R_6}{\partial x}=M_y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-M_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+$$
$$+M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial M_y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+ \qquad (27)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{12}\left(\sigma_{12}z\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{13}\left(\sigma_{13}y\right)\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\right)\theta+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{13}\left(\sigma_{13}z\right)\right)\theta+$$
$$+\left(M_{12}\left(\sigma_{12}y\right)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+M_{13}\left(\sigma_{13}z\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{11}\left(\sigma_{11}z^2\right)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(M_{11}\left(\sigma_{11}y^2\right)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

В формулах (23) и (27) вставляя значении

$$
\begin{gathered}
N_x, Q_2, Q_3, M_y, M_z, M_x,\\
R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6,\\
\frac{\partial N_x}{\partial x}, \frac{\partial Q_2}{\partial x}, \frac{\partial Q_3}{\partial x}, \frac{\partial M_y}{\partial x}, \frac{\partial M_z}{\partial x}, \frac{\partial M_x}{\partial x},\\
\frac{\partial R_1}{\partial x}, \frac{\partial R_2}{\partial x}, \frac{\partial R_3}{\partial x},\\
\frac{\partial R_4}{\partial x}, \frac{\partial R_5}{\partial x}, \frac{\partial R_6}{\partial x}
\end{gathered} \tag{28}
$$

имеем:

$$
\begin{gathered}
-\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho S_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \rho S_z\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} +\\
+EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ES_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - ES_z\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} +\\
+\left(EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ES_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - ES_z\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} +\\
+\left(EF\frac{\partial u}{\partial x} - ES_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - ES_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -\\
-\left(ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - EI_{yz}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} -\\
-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x} - EI_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_{yz}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} -\\
-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI_{yz}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - EI_y\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} -\\
-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x} - EI_{yz}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_y\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + \left(\bar{F}_1 + \bar{q}_1\right) = 0;\\
-\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S_y\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - GF\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + GF\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + GS_y\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} +\\
+\left(EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ES_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - ES_z\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x} +\\
+\left(EF\frac{\partial u}{\partial x} - ES_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - ES_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +\\
+\left(ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI_y\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - EI_{yz}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} +\\
+\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x} - EI_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - EI_{yz}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} +\\
+\left(-GF\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + GF\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GS_z\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)\theta +\\
+\left(-GF\alpha_1 + GF\frac{\partial w}{\partial x} - GS_z\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\bar{F}_2 + \bar{q}_2\right) = 0;
\end{gathered}
$$

$$-\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho S_z\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-GF\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+GF\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-GS_z\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+$$
$$\rho S_z\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho I_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho I_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}+$$
$$+ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-$$
$$+\left(EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-ES_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-ES_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}-$$
$$-\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-$$
$$-\left(-GF\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+GF\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+GS_y\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)\theta-$$
$$-\left(-GF\alpha_2+GF\frac{\partial v}{\partial x}+GS_y\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\left(\bar F_3+\bar q_3\right)=0;$$
$$\rho S_y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho I_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho I_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}+$$
$$+ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}-$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$
$$-\left[EI_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI\left(z^3\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-$$
$$-\left[EI_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(z^3\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-$$
$$-\left[EI_{yz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}-$$
$$-\left[EI_{yz}\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}-$$
$$-\left[-GS_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+GS_y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+GI_y\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]\alpha_2-$$
$$-\left[-GS_y\alpha_2+GS_y\frac{\partial v}{\partial x}+GI_y\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}-$$
$$-\left[-GS_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+GS_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-GI_{yz}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]\alpha_1-$$
$$-\left[-GS_y\alpha_1+GS_y\frac{\partial w}{\partial x}-GI_{yz}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-$$

$$-\left(M_y\left(\bar{F}_1\right)+M_y\left(\bar{q}_1\right)\right)=0; \tag{29}$$

$$\begin{gathered}
\rho S_z\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho I_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\rho I_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}+\\
+ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}-\\
-\left(ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\\
-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\\
+\left[EI_{yz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+\\
+\left[EI_{yz}\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}+\\
+\left[EI_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI\left(y^3\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\\
+\left[EI_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^3\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}+\\
+\left[-GS_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+GS_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+GI_{yz}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]\alpha_2+\\
+\left[-GS_z\alpha_2+GS_z\frac{\partial v}{\partial x}+GI_{yz}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\\
+\left[-GS_z\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+GS_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-GI_z\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]\alpha_1+\\
+\left[-GS_z\alpha_1+GS_z\frac{\partial w}{\partial x}-GI_z\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-\\
-\left(M_z\left(\bar{F}_1\right)+M_z\left(\bar{q}_1\right)\right)=0;\\
-\rho S_y\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho S_z\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho I_\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+GI_\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\\
+GS_y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-GS_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+GS_z\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-GS_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\\
+\left[ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\\
+\left[ES_y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_y\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\\
+\left[ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+EI_z\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\
+\left[ES_z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI_{yz}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}+EI_z\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial w}{\partial x}+\\
+\left[EI_\rho\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(z^3\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-\right.\\
\left.-EI\left(yz^2\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}-EI\left(y^3\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+
\end{gathered}$$

$$+\left[EI_{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-EI\left(z^3\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-EI\left(yz^2\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}-EI\left(y^3\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$
$$+\left[-GS_z\alpha_1-GS_z\alpha_2+GS_z\frac{\partial v}{\partial x}+GS_z\frac{\partial w}{\partial x}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$
$$+\left[-GS_z\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-GS_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+GS_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+GS_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\theta+$$
$$+\left[-GS_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}-GS_z\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+GS_y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-GS_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+GI_{\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]+$$
$$+\left(M_x\left(F_{23}\right)+M_x\left(q_{23}\right)\right)=0;$$

Граничные условия:

$$\left[-EF\frac{\partial u}{\partial x}+ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\right.$$
$$+\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-$$
$$\left.-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\bar{\varphi}_1\right]\delta u\Big|_x=0;$$
$$\left[GF\alpha_2-GF\frac{\partial v}{\partial x}-GS_y\frac{\partial\theta}{\partial x}+\right.$$
$$+\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$
$$\left.+\left(-GF\alpha_1+GF\frac{\partial w}{\partial x}-GS_z\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\theta+\bar{\varphi}_2\right]\delta v\Big|_x=0;$$
$$\left[GF\alpha_1-GF\frac{\partial w}{\partial x}+GS_z\frac{\partial\theta}{\partial x}-\right.$$
$$-\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}-ES_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-ES_z\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}-$$
$$-\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}-$$
$$\left.-\left(-GF\alpha_2+GF\frac{\partial v}{\partial x}+GS_y\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\theta+\bar{\varphi}_3\right]\delta w\Big|_x=0;$$
$$\left[-ES_y\frac{\partial u}{\partial x}+EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}-\right.$$
$$-\left(ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-$$

$$-\left[EI_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(z^3\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}+$$
$$+\left[EI_{yz}\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(z^2y\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}+$$
$$+\left[-GS_y\alpha_2+GS_y\frac{\partial v}{\partial x}+GI_y\frac{\partial \theta}{\partial x}\alpha_2\right]\alpha_2+$$
$$+\left[-GS_y\alpha_1+GS_y\frac{\partial w}{\partial x}-GI_{yz}\frac{\partial \theta}{\partial x}\alpha_2\right]\alpha_1+M_y\left(\varphi_1\right)\Bigg]\delta\alpha_1\Bigg|_x=0;$$
$$\Bigg[ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI_y\;\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}-$$
$$-\left[\left(ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI_y\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\right.$$
$$-\left(EI_{yz}\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(yz^2\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^2z\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-$$
$$-\left(EI_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI\left(zy^2\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI\left(y^3\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}-$$
$$-\left(-GS_z\alpha_2+GS_z\frac{\partial v}{\partial x}+GI_{yz}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\alpha_1-$$
$$\left.-\left(-GS_z\alpha_1+GS_z\frac{\partial w}{\partial x}-GI_z\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\alpha_2\right]\delta\theta\Bigg|_x=0;$$
$$\Bigg[-GS_z\alpha_1+GS_y\alpha_2-GS_y\frac{\partial v}{\partial x}+GS_z\frac{\partial w}{\partial x}-GI_\rho\frac{\partial \theta}{\partial x}+$$
$$+\left[ES_y\frac{\partial u}{\partial x}-EI_y\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}-$$
$$-\left[ES_z\frac{\partial u}{\partial x}-EI_{yz}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}+EI_z\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right]\frac{\partial w}{\partial x}+$$
$$+\left[-GS_y\alpha_2+GS_z\alpha_1+GS_y\frac{\partial v}{\partial x}-GS_z\frac{\partial w}{\partial x}+GI_\rho\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]+\tag{30}$$
$$+\left[-GS_y\alpha_1-GS_z\alpha_2+GS_z\frac{\partial v}{\partial x}+GS_y\frac{\partial w}{\partial x}\right]\theta+$$
$$+\left[EI_\rho\frac{\partial u}{\partial x}-E\left(I\left(z^3\right)-EI\left(y^2z\right)\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-E\left(I\left(yz^2\right)+I\left(y^3\right)\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right]\;\frac{\partial \theta}{\partial x}+M_x\left(\varphi\;_{23}\right)\Bigg]\delta\theta\Bigg|_x=0;$$

В системе уравнения (29) и граничным условиям (30) вводим безразмерные параметры:

$$x=l\cdot\bar{x};\;u=a\bar{u};\;v=a\bar{v};\;w=a\bar{w};\;t=t_0\bar{t};$$

Потом систему уравнений (29) и граничных условий (30) будем делить на

$$\frac{EFa^2}{l^2}.$$

Здесь принимаем

$$\frac{\rho\cdot l^2}{Et_0^2}=1.$$

Отсюда определяем t_0.

$$t_0 = l\sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2} + \frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{t}^2} + \frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{t}^2} + \\
+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2} + \\
+\left(\frac{a\partial\bar{u}}{l\partial\bar{x}} - \frac{S_y}{Fl}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{S_z}{Fl}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \\
+\left(\frac{a\partial^2\bar{u}}{l\partial\bar{x}^2} - \frac{S_y}{Fl}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{S_z}{Fl}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \\
-\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \\
-\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \\
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2} - \\
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}} + \frac{l^2}{EFa^2}\left(\bar{F}_1 + \bar{q}_1\right) = 0;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{t}^2} - \frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{t}^2} + \frac{G}{E}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2} - \frac{G}{E}\frac{l}{a}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}} + \\
+\left(\frac{a\partial\bar{u}}{l\partial\bar{x}} - \frac{S_y}{Fl}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{S_z}{Fl}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2} + \\
+\left(\frac{a\partial^2\bar{u}}{l\partial\bar{x}^2} - \frac{S_y}{Fl}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{S_z}{Fl}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \\
+\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \\
+\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}} + \\
+\left(-\frac{Gl}{Ea}\alpha_1 + \frac{G}{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} - \frac{GS_zl}{EFa}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}} + \\
+\left(-\frac{Gl}{Ea}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} + \frac{G}{E}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right)\theta + \frac{l^2}{EFa^2}\left(\bar{F}_2 + \bar{q}_2\right) = 0;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{t}^2} + \frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{t}^2} + \frac{G}{E}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2} - \frac{Gl}{Ea}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \\
-\left(\frac{a\partial\bar{u}}{l\partial\bar{x}} - \frac{S_y}{Fa}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{S_z}{Fa}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
+\left(\frac{a\partial^2\bar{u}}{l\partial\bar{x}^2} - \frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} - \\
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2} - \\
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2} - \frac{I_y}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}} -
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
-\left(-\frac{Gl}{Ea}\alpha_2+\frac{G}{E}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}-\\
-\left(-\frac{Gl}{Ea}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\frac{G}{E}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right)\theta+\frac{l^2}{EFa^2}\left(\bar{F}_3+\bar{q}_3\right)=0;\\
\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{t}^2}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{t}^2}+\\
+\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}-\\
-\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2u}{\partial\bar{x}^2}-\\
-\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[\frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(z^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}+\\
+\left[\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}+\\
+\left[\frac{I_y}{Fal}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(z^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2u}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[-\frac{GS_yl}{EFa^2}\alpha_2+\frac{GS_yl}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GJ_y}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[-\frac{GS_yl}{EFa^2}\alpha_1+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial w}{\partial\bar{x}}+\frac{GJ_{yz}}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[-\frac{GS_yl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GJ_y}{EFa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right]\alpha_2+\\
+\left[-\frac{GS_yl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GJ_{yz}}{EFa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right]\alpha_1+\\
-\frac{l^2}{EFa^2}\left(M_y\left(\bar{F}_1\right)+M_y\left(\bar{q}_1\right)\right)=0;\\
\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{t}^2}-\frac{I_z}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{t}^2}+\\
+\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}-\\
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\\
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}+\\
+\left[\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\\
+\left[\frac{I_z}{Fal}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}+
\end{gathered}
\tag{31}
$$

$$+\left[\frac{I_z}{Fal}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(y^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl}{EFa}\alpha_2+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GI_{yz}l}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl}{EFa^2}\alpha_1+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}-\frac{GI_z}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{GI_z}{EFa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right]\alpha_1+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GI_{yz}}{EFa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right]\alpha_2-$$
$$-\frac{l^2}{EFa^2}\left(M_z\left(\bar{F}_1\right)+M_z\left(\bar{q}_1\right)\right)=0;$$

$$-\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-\frac{I_\rho}{Fa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{GI_\rho}{EFa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}-$$
$$-\frac{GS_z}{EFa^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{GS_yl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I_y}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+$$
$$+\left[\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_y}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right]\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\frac{I_z}{Fal}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+$$
$$+\left[\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}+\frac{I_z}{Fal}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right]\frac{\partial w}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[\frac{I_\rho}{Fal}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(z^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\right.$$
$$\left.-\frac{I\left(yz^2\right)}{Fa^2l}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^3\right)}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}+$$
$$+\left[\frac{I_\rho}{Fal}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(z^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\bar{x}^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{I\left(yz^2\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}-\frac{I\left(y^3\right)}{Fa^2l}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial\bar{x}^2}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl}{EFa^2}\alpha_1-\frac{GS_zl}{EFa^2}\alpha_2+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\right]\theta+$$
$$+\left[-\frac{GS_yl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}-\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_y}{EFa}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}-\frac{GS_z}{EFa}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{GI_\rho}{EFa^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{x}^2}\right]+$$
$$+\frac{l^2}{EFa^2}\left(M_x\left(F_{23}\right)+M_x\left(q_{23}\right)\right)=0;$$

Граничные условия:

$$\left[-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+\right.$$

$$
+\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}+\frac{l^2}{EFa^2}\bar{\varphi}_1\Bigg]\delta\bar{u}\Bigg|_{\bar{x}}=0;
$$

$$
\Bigg[\frac{Gl^2}{Ea^2}\alpha_2-\frac{Gl}{Ea}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}-\frac{GS_yl}{EFa^2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}+
$$

$$
+\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+
$$

$$
+\left(\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}+
$$

$$
+\left(-\frac{Gl^2}{Ea^2}\alpha_1+\frac{Gl}{Ea}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}-\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}\right)\theta+\frac{l^2}{EFa^2}\bar{\varphi}_2\Bigg]\delta\bar{v}\Bigg|_{\bar{x}}=0;
$$

$$
\Bigg[\frac{Gl^2}{Ea^2}\alpha_1-\frac{Gl}{Ea}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}+\frac{GS_zl}{EFa^2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{S_zl}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(\frac{S_zl}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I_{yz}l}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I_yl}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(-\frac{Gl^2}{Ea^2}\alpha_2+\frac{Gl}{Ea}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\frac{GS_yl}{EFa^2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}\right)\theta+\frac{l^2}{EFa^2}\bar{\varphi}_3\Bigg]\delta\bar{w}\Bigg|_{\bar{x}}=0;
$$

$$
\Bigg[-\frac{S_yl}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{I_yl}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}+\frac{I_{yz}l}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(\frac{S_y}{Fl}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I_y}{Fal}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left[\frac{I_y}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I\left(z^3\right)}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right]\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}+
$$

$$
+\left[\frac{I_{yz}}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right]\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}+
$$

$$
+\left[-\frac{GS_yl^2}{EFa^2}\alpha_2+\frac{GS_yl}{EFa}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\frac{GI_yl}{EFa^2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}\right]\alpha_2+
$$

$$
+\left[-\frac{GS_yl^2}{EFa^2}\alpha_1+\frac{GS_yl}{EFa}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}-\frac{GI_{yz}l}{EFa^2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}\right]\alpha_1+\frac{l^2}{EFa^2}M_y\left(\varphi_1\right)\Bigg]\delta\alpha_1\Bigg|_{\bar{x}}=0;
$$

$$
\Bigg[-\frac{S_zl}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{I_{yz}l}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}+\frac{I_yl}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
-\left(\frac{S_z}{Fl}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fal}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I_z}{Fal}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-
$$

$$
+\left[\frac{I_{yz}}{Fa}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\frac{I\left(z^2y\right)}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}}\right]\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{x}}+
$$

$$+\left[\frac{I_z}{Fa}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^2z\right)}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I\left(y^3\right)}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl^2}{EFa^2}\alpha_2+\frac{GS_zl}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GI_{yz}l}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]\alpha_2+$$
$$+\left[-\frac{GS_zl^2}{EFa^2}\alpha_1+\frac{GS_zl}{EFa}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}-\frac{GI_zl}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]\alpha_1+\frac{l^2}{EFa^2}M_z\left(\varphi_1\right)\Bigg]\delta\alpha_2\Bigg|_x=0;$$

$$\Bigg[-\frac{GS_zl^2}{EFa^2}\alpha_1+\frac{GS_yl^2}{EFa^2}\alpha_2-\frac{GS_yl}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_zl}{EFa}\frac{\partial w}{\partial\bar{x}}-\frac{GI_\rho l}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[\frac{S_y}{F}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I_y}{Fa}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fa}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}-$$
$$-\left[\frac{S_z}{F}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{I_{yz}}{Fa}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}+\frac{I_z}{Fa}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\right]\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}+$$
$$+\left[-\frac{GS_yl^2}{EFa^2}\alpha_2+\frac{GS_zl^2}{EFa^2}\alpha_1+\frac{GS_yl}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}-\frac{GS_zl}{EFa}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}+\frac{GI_\rho l}{EFa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right]+ \qquad (32)$$
$$+\left[-\frac{GS_yl^2}{EFa^2}\alpha_1-\frac{GS_z}{EFa^2}\alpha_2+\frac{GS_zl}{EFa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{GS_yl}{EFa}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right]\theta+$$
$$+\Bigg[\frac{I_\rho}{Fa}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{\left(I\left(z^3\right)-I\left(y^2z\right)\right)}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{x}}-$$
$$-\frac{\left(I\left(yz^2\right)+I\left(y^3\right)\right)}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{x}}\Bigg]\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}+\frac{l}{EFa^2}M_x\left(\varphi_{\ 23}\right)\Bigg]\delta\theta\Bigg|_x=0;$$

Начальные условия:

$$\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}-\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{t}}-\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{t}}\right]\delta\bar{u}\Bigg|_{\bar{t}}=0;$$
$$\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}+\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}\right]t_0\delta\bar{v}\Bigg|_{\bar{t}}=0;$$
$$\left[\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}}-\frac{\rho S_z}{EFa}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}\right]t_0\delta\bar{w}\Bigg|_{\bar{t}}=0;$$
$$\left[-\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}+\frac{I_y}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{t}}+\frac{I_{yz}}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{t}}\right]t_0\delta\alpha_1\Bigg|_{\bar{t}}=0; \qquad (33)$$
$$\left[-\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}+\frac{I_{zy}}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\bar{t}}+\frac{I_z}{Fa^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\bar{t}}\right]t_0\delta\alpha_2\Bigg|_{\bar{t}}=0;$$
$$\left[\frac{S_y}{Fa}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}-\frac{S_z}{Fa}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}}-\frac{I_\rho}{Fa^2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}\right]t_0\delta\theta\Bigg|_{\bar{t}}=0;$$

7 Заключение

Таким образом в геометрически нелинейной постановке получали краевую задачу колебания стержней. В качестве примера можно рассмотрит задачу разработка обобщенной нелинейной модели движения буровых штанг неглубокого бурения с учетом конечных деформации.

Литература

[1] *Еремеев В. А.* Об эллиптичности краевых задач нелинейной теории упругости // Изв. РАН. МТТ., 2000. №3. С. 67–72.

[2] *Ерофеев В. И., Семерикова Н. П., Серов А. В.* Нелинейные стационарные крутильные волны в упругом стержне // Известие РАН. Механика твердого тела., 2007. №6. С. 157–163.

[3] *Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. Л.* Нелинейные изгибные стационарные волны в балке Тимошенко // Нелинейный мир. , 2008. Т. 6. №5-6. С. 348–358.

[4] *Ерофеев В. И.* Нелинейные изгибные и крутильные волны в стержнях и стержневых системах // Вестник научно-технического развития, 2009. №4(20). С. 46–50.

[5] *Ерофеев В. И.* Изгибные-крутильные, продольно изгибные и продольно крутильные волны в стержнях // Вестник научно-технического развития, 2012. №5(57). С. 3–18.

[6] *Зволинский Н. В., Риз П. М.* О некоторых задачах нелинейной теории упругости // ПММ, 1939. Т. 2. №4.

[7] *Зинченко А. С.* Интенсивные продольно крутильные и продольно-изгибные волны в элементах конструкций // Дис. канд. ф-м.наук:. 01.02.06. – Нижний Новгород: Нижний городской государственный технический университет. И.И. Р. Е. Алексеева, 2013. С. 98.

[8] *Зубов Л. М.* Двойственные краевые задачи нелинейной теории упругости // Доклады РАН, 1999. Т. 367. №3. С. 344–342

[9] *Карякин М. И.* Равновесие и устойчивость нелинейно-упругих тел при учете изолированных дефектов и микроструктуры материала // Автореферат дис.... д.ф.-м.н. - Ростов-на-Дону, 2014. С. 38.

[10] *Левяков С. В.* Нелинейный пространственный изгиб криволинейных стержней с учетом поперечного сдвига // Прикладная механика ва техническая физика, 2012. Т. 53. №2. С. 128–137.

[11] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости // М.: Наука 1980. С. 256.

[12] *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин // М.: Наука. 1984. С. 256.

[13] *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости // М.-JL: Гостехиздат. 1948. С. 211.

[14] *Нургазиев Р. Б.* Статический расчет пространственных мембранно-стержневых систем с учетом геометрической и конструктивной нелинейности // Автореферат дис... канд.т.н. - Саратов. 2004.

[15] *Хаджиева Л. А.* Динамика геометрически и физически нелинейных деформируемых элементов механизмов и машин // Дис. док. ф. м. наук: 01.02.06, 01.02.06. - Алматы: Каз НУ им аль-Фараби, 2007. С. 210.

[16] *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах // Л.: Машиностроение, 1986. С. 336.

[17] *Antman S. S* Nonlinear problems of elasticity // Springer-Verlag, 1995.

[18] *Arvin H., Bakhtiari-Nejad F.* Nonlinear modal analysis of a rotating beam // International Journal of Non-linear Mechanics, 2011. С. 1–15.

[19] *Asghari M., Kahrobaiyan M. H., Ahmatian M. T.* A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory // International journal of Engineering Science, 2010. Т. 48. С. 1749–1761.

[20] *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды // М.: Мир, 1965. С. 456.

[21] *Mamandi A. Kargarnovin M. H. Farsi S.* Nonlinear Vibration Solution for an Inclined Timoshenko Beam unde the Action of a Moving Force with Constant / Nonconstant Velocity // Journal of Mathematical Sciences, 1986. С. 336.

[22] *Piovan M. T., Sampaio R.* A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded propertie // Journal of Sound and Vibration, 2009. T. 327. C. 134–143.

[23] *Rivlin R. S., Topakoglu C. A.* Theorem in the Theory of finite elastic deformation // J.Rational Mech. and Anal, 1954. T. 2. C. 53–81.

[24] *Trusdell C., Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Phisics // III/3. Springer-Verlag, 1965.

[25] *Hijmissen J. W., W. T. van Horssen.* On aspect of damping for a vertical beam with tuned mass damper at the top // Nonlinear dynamics, 2007. T. 50(1). C. 169–190.

[26] *Bailey J., Finnie I.* An analytical study of drill-string vibration // ASME Journal of Engineering for Industry, 1960. T. 82. C. 122–128.

[27] *Berlioz A., Hagopian J., Dufour R., Draoui E.* Dynamic behavior of a drillstring: presentation and validation of the experimental set-up // ASME Design Engineering Division, 14th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise. – Albuquerque, NM, USA, 1993. T. 56. C. 223–228.

[28] *Berlioz A., Hagopian J. D., Dufour R.* Dynamic behavior of a drill-string: experimental investigation of lateral instabilities // Journal of Vibration and Acoustics, 1996. T. 118. C. 292–292.

[29] *Jansen J. D.* Non-linear rotor dynamics as applied to oilwell drillstring vibrations // J.Sound Vib. 1991. T. 147(1). C. 115-135.

[30] *Zhu W., Chung J.* Nonlinear lateral vibrations of a deploying Euler-Bernoulli beam with a spinning motion // International Journal of Mechanical Sciences, 2015. T. 90. C. 200–212.

[31] *Власов В. З.* Избранные труды // М., 1963. Т. II. С. 507.

[32] *Джанелидзе Г. Ю.* К теории тонких стержней // ПММ. - Москва, 1949. Т. XIII. №6. С. 397–408.

[33] *Кабулов В. К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности // Ташкент: Фан, 1966. С. 391.

[34] *Кабулов В. К.* Алгоритмизация в механике сплошных сред // Ташкент: Фан, 1979. С. 304.

[35] *Бабамуратов К. Ш.* Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности // Ташкент: Фан, 1987. С. 288.

[36] *Толок В. А.* Алгоритмизация расчета цилиндрических оболочек // Автореф. канд. дис. ..., Ташкент, 1965.

[37] *Бадалов Ф. Б.* Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости // Ташкент: Фан, 1980. С. 221.

[38] *Буриев Т., Расулмухаммедов М. М.* Алгоритмическая система расчета трехмерных упругих тел // Ташкент: Изд-во НПО Кибернетика АН РУз, 1994. С. 147.

[39] *Курманбаев Б., Саттаров А.* Алгоритм расчета призматических тел в упругой и упругопластической зонах // Вопр. вычисл. и прикл. математики. - Ташкент, 1980. №62. С. 141–149.

[40] *Мардонов Б. М, Хаджиева Л. А.* Исследования параметрических колебаний геометрически нелинейной бурильной колонны методом конечных элементов // Тез докл. VIII Казахст.–Росс. Межд.научно–практ. Конф. «Матем. моделирование в научно–технол. и экологич. проблемах нефтегазовой отрасли», - Атырау. 2014. С. 85–86.

[41] *Назиров Ш. А.* Алгоритмизация численного моделирования двумерных краевых задач механики деформируемого твердого тела // Дис. ... д.ф.-м.н. - Ташкент, 1991.

[42] *Назиров Ш. А.* Трехмерные нелинейные математические модели механики деформируемого твердого тела // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, Центр РППиАПК, 2012. №128. С. 14–46.

[43] *Назиров Ш. А.* Вычислительные алгоритмы, реализующие трехмерные нелинейные математические модели теории упругости и пластичности // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 2013. №129. С. 9–21.

[44] *Олимов М.* Исследование упругопластических состояний стержней при пространственно-переменных нагружениях // Дис. ... к.ф.-м.н. - Ташкент, 1984.

[45] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и деформационной пластичности: Пер.с.англ. // М.: Мир, 1987. С. 542.

[46] *Кабулов В. К., Файзуллаев О., Назиров Ш. А.* Алгоритмическая система расчета трехмерных упругих тел // Ал-хоразмий, алгоритм, алгоритмизация. – Ташкент: Фан, 2006. С. 672.

[47] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике // Москва: Наука, 1970. С. 512.

[48] *Анарова Ш. А., Юлдашев Т.* Математическая модель нелинейных уравнений колебаний стержней при динамическом нагружении // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики», 2014. №6 С. 36–42.

[49] *Анарова Ш. А., Юлдашев Т.* Математические модели пространственно-нагруженных стрежней с учетом функции кручения и поперечных сдвигов // ТАТУ хабарлари, 2014. №4(32) С. 76–86.

[50] *Анарова Ш. А., Юлдашев Т.* Вывод математической модели пространственно-нагруженных стержней с учетом функции кручения и поперечных сдвигов // Научный журнал проблемы вычислительной и прикладной математики, 2015. №1 С. 28–40.

[51] *Anarova Sh. A., Nuraliev F. M., Dadenova G.* Mathematical model of spatially loaded bars with account of torsion function and transverse shears // International Journal of Technical Research and Applications e-ISSN: 2320-8163, www.ijtra.com, 2016. Vol. 4. №1. P. 22–32.

[52] *Anarova Sh. A.* Algorithm of solution of the problem of bending torsion of the rod based on R-function method // International Journal of Current Research. №8(9) C. 37807–37819.

[53] *Anarova Sh. A.* Algorithm of solution of geometrically nonlinear problem of rods with arbitrary mechanical geometrical characteristics // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology ISSN:2350-0328, www.ijarset.com, 2017(November). Vol. 4. №11. P. 4796–4815.

[54] *Li Z., Li J.* Fundamental equations for dynamic analysis of rod and pipe string in oil-gas wells and application in static buckling analysis // Journal of Canadian Petroleum Technology, 2002. Vol. 41(5). P. 45–53.

Поступила в редакцию 20.02.2018

UDC 539.3

THE OUTPUT OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VIBRATIONS OF RODS AT A GEOMETRICALLY NONLINEAR STATEMENT

[1]***Anarova Sh. A.***, [2]***Yuldashev T.***
omon_shoira@mail.ru; t_yuldashev@mail.ru
[1]Scientific and innovation center of information and communication technologies at the Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Kharizmi;
[2]Institute of Mechanics and Earthquake Resistance of the Academy of Sciences of Uzbekistan

In this paper we consider the derivation of differential equations for the vibration of rods under a geometrically nonlinear formulation. Applying of Hamilton – Ostrogradsky's variation principle, differential equations of the vibration of rods are derived for a geometrically nonlinear formulation. Also given are the corresponding natural initial and boundary conditions. In the introduction of this review of research works in nonlinear formulations of the vibrations of the rods in our Republic and in foreign countries.

Keywords: oscillations, rod, geometrically nonlinear formulation, of Hamilton – Ostrogradsky's variation principle, the variation of kinetic energy, the variation of potential energy, the variation of work of external forces

Citation: Anarova Sh. A., Yuldashev T. 2018. The output of the differential equations of vibrations of rods at a geometrically nonlinear statement. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(14): 72–105.