

УДК 51-7:519.63:519.614

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА

Хужаев И.К.

д.т.н., с.н.с., ведущий научный сотрудник,
Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,
e-mail: i_k_hujayev@mail.ru

Хужаев Ж.И.

младший научный сотрудник,
Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,
e-mail: jamolhoja@mail.ru

Предложен алгоритм решения параболического уравнения при граничных условиях второго рода, основанный на применении методов прямых и решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Непосредственное применение положений дифференциально-разностного метода к решению задачи приводит к трехдиагональной матрице перехода, определитель которой имеет нулевое значение. Этот недостаток устраняется привлечением дополнительного условия – заданием значения искомой функции в одной из точек рассматриваемой области. При этом задача приобретает смешанные граничные условия первого и второго родов. Для этого случая в работе сформулированы диагональная и фундаментальная матрицы, с помощью которых, минуя процессов прямой и обратной прогонки, производится переход к автономным дифференциальным уравнениям. Представлен результат вычислительного эксперимента смешанной задачи с граничными условиями первого и второго родов в начале и конце отрезка – области решения задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, граничные условия первого и второго рода, конечноразностное представление, трехдиагональная матрица, собственные векторы и числа, метод прямых, алгоритм, вычислительный эксперимент.

DIFFERENTIAL-DIFFERENCE METHOD FOR THE SOLVING OF THE INHOMOGENEOUS PARABOLIC EQUATION WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND TYPE

Khujaev I.Q., Khujaev J.I.

An algorithm for solving a parabolic equation under boundary conditions of the second type is proposed, based on the application of direct methods and the solution of ordinary differential equations. The direct application of the rules of the differential-difference method to the solution of the problem leads to a tridiagonal transition matrix whose determinant has a zero value. This weakness is eliminated by attracting an additional condition-by setting the value of the desired function at one of the points of the region under consideration. In this case, the problem acquires mixed boundary conditions of the first and second genera. For this case, the authors formulated a diagonal and a fundamental matrix, with the help of which, bypassing the processes of direct and reverse sweep, a transition to autonomous differential equations is made. The result of a computational experiment of a mixed problem with the boundary conditions of the first and second genera at the beginning and the end of the segment, the problem solution area, are presented.

Keywords: parabolic equation, boundary conditions of first and second type, finite-differential expression, tri-diagonal matrix, Eigen vectors and numbers, method of lines, algorithm, numerical experiment.

БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАНИ ИККИНЧИ ЖИНСЛИ ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛАР ҲОЛИДА ЕЧИШ УЧУН ДИФФЕРЕНЦИАЛ-АЙИРМАЛАР УСУЛИ

Хўжаев И.К., Хўжаев Ж.И.

Параболик тенгламани иккинчи жинсли чегаравий шартлар ҳолида ечиш учун тўғри чизиқлар ва оддий дифференциал тенгламаларни ечиш усулларига асосланган алгоритм таклиф этилган. Дифференциал-айирмалар усули ҳолатлари бу масалага бевосита қўлланилганида детерминанти ноль қийматга уч диагоналли

ўтиш матричасига келинади. Ушбу камчилик изланаётган функциянинг ечим соҳасидаги бирор қийматини қўшимча шарт шаклида бериш йўли билан бартараф этилди ва натижада соҳа бошланиши ва тугаши нуқталарига мос биринчи ва иккинчи жинсли шартлар ҳосил қилинди. Бу шартлар билан шакллантирилган масала учун мақолада тўғри ва тескари қувиш усулларисиз автоном дифференциал тенгламаларга ўтиш имконини берадиган диагональ ва фундаментал матрицалар шакллантирилган. Кесма – масала ечим соҳасининг боши ва охирига қўйилган биринчи ва иккинчи жинсли чегаравий шартлар учун сонли тажриба натижаси келтирилган.

Калит сўзлар: параболик тенглама, биринчи ва иккинчи жинсли чегаравий шартлар, чекли айирмали кўриниш, уч диагоналли матрица, хос векторлар ва сонлар, тўғри чизиқлар усули, алгоритм, сонли тажриба.

1. Введение

Тепло и массообменные процессы, описываемые законами механики, физики и химии, обеспечивают существования биологических и социальных объектов. А потребности последних объектов отличаются разнообразием, включая от калории еды до солнечной и атомной энергии. Т.е. спектр тепло- и массообменных процесс достаточно широкий и изучение особенностей этих процессов способствует к улучшению энергообеспеченности различных особ и отраслей производства.

Известно, что центр земли характеризуется высокой температурой, т.к. земля является гасящейся звездой. Это тепло передается к приземной атмосфере, количество которого не 1000 раз меньше, чем земля получает от солнца. В разных частях поверхности земли градиент температуры имеет разное значение. Для региона Центральной Азии этот градиент составляет 0,3-0,4°C/м. Но такой градиент устанавливается после определенной глубины. Согласно источникам, верхний слой грунта (0,3-2 м) подвергается суточному изменению. Годовое изменение может доходить от 2 м глубины до 10 м. Далее устанавливается практически линейное увеличение температуры согласно температурному градиенту. Углубление теплиц или помещений для животных в холодном климате обусловлено этим фактором.

Использование почвы в качестве теплоотводящего объекта существовало в Иране, Китае, где летом ожидается высокая температура. В Марракеше начали использовать теплообменники земля-воздух – подземные воздушные туннели (ЕАНХ) [1]. ЕАНХ состоит из трех параллельных ПВХ-труб длиной 72 м каждая и внутреннего диаметра 15 см, погребенных на глубине 2,3-3,2 м каждая труба оснащена вентилятором, которые нагнетает воздух в дом. Исследованы изменения температуры и влажности вокруг труб с использованием программного обеспечения TRNSYS (тип 460) в течении 38 суток. Установилась среднесуточная температура 22 °C на выходе ЕАНХ. Максимальные температуры составило 19,8 °C к 19-и часам. Устройства работает 45, 90 ваттными вентиляторами. Достигается значительное сокращение энергозатрат.

В работе [2] обсуждается эффективность системы подземного теплообменника на основе модели стационарного состояния системы с учетом длины трубы, температуры грунта, входной температуры воздуха и температуры окружающей среды. Зимой

система позволяет увеличить температуру на 0.2-11.2°C в регионе Йезд и 0.1-17.2°C Хамадане зимой, и уменьшить температуру на 1.3-11.40C и 5.7-11.1°C летом. В условиях Йезда система в среднем может работать 94 сутки, а в Хамадане 225 сутки в году. Этим достигается сокращение объема энергопотребления на 24.5-47.9%.

В работе [3] проверены термическое, механическое и морфологические характеристики трех коммерчески доступных полимерных композиций с покрытием с высокой теплопроводностью (20-32 Вт/м К) в целях проверки пригодности этих материалов для использования в электронных оборудованьях. Наполнители состоят из углерода в двух композитах в виде волокон с диаметром 10 мкм, длиной 120-350 мкм и в третьем композите-заполненном углеродом. Материалы имеют достаточный запас прочности на растягивание, изгибе и ударе по модули упругости. Полимерный состав РА66 оказал равные с алюминием показатели. В целом, материалы показали соответствующие требованиям параметров по теплопередаче.

В работе [4] представлены результаты исследования работы циклонного сепаратора, используемого на комплексной установке по производству цемента. Целью исследования является достижение максимальной сепарации при минимальной температуре воздуха на выходе из циклона. Подаются две смеси с разной температурой –8500C и 6000C. Авторами разработаны установка с сеткой, физическая и математическая модель с учетом турбулентности потока. Определены угол конфузора и длина вихревой установки, а потеря давления – по входным и выходным показателям.

В работе [5] численным моделированием изучается тепловое состояние крупных торговых объектов пищевой продукции. Методология моделирования и результаты исследований, представленные в этой статье, практически полезны для инженеров по энергетическому моделированию с использованием динамических имитационных моделей для проектирования и/или оценки энергетических характеристик крупных розничных магазинов продуктов питания. Методология может быть использована при проектировании новых объектов или в оценке крупномасштабных проектов модернизации. Это также представляет практический интерес для менеджеров по энергетике и объектам в крупных организациях розничной торговли продуктами питания, поскольку это поможет понять их применимые модели энергоэффективности.

Практика показывает, что с увеличением размера исследуемого объекта и потоков массы и тепла увеличивается доля применения численных методов решения задач.

Тепло- и массообмен между турбулентным приземным пограничным слоем и водой, выброса антропогенных и природных газов в атмосферу изучены в работе [6]. Целью этой работы является определение потоков газа из воздуха в море или наоборот. Если известны флуктуации поверхностно-нормальной скорости w' и концентрации газа c' , то можно определить турбулентный вклад в потоке газа. Однако нет основополагающего фундаментального прямого подхода в общем случае, когда нельзя легко измерить w' и c' . Представлен новый подход, позволяющий выявить ключевые аспекты около поверхностного турбулентного теплообмена из измерений, которые могут быть выполнены инфракрасной (ИК) камерой. Получено уравнение с входными данными, которые представляют собой температуру поверхности и тепловой поток, а также разработан метод решения для поверхностно-нормального напряжения, испытываемого во времени пограничными слоями на границе раздела. Поскольку температурные и концентрационные пограничные слои испытывают одни и те же движения приповерхностной жидкости, решение для поверхностно-нормальной деформации определяет поток газа или скорость переноса газа. Примеры иллюстрируют подход в случаях полного обновления поверхности, частичного восстановления поверхности и инсоляции. Рассмотрены перспективы использования подхода в течениях, характеризующихся срезанными границами или быстрой деформацией пограничного слоя.

В работе [7] проведен всесторонний анализ объектов выработки и использования тепловой энергии в городе Токио и его пригороде. Обсуждаются вопросы экономии энергии в процессах конверсии и транспортировки тепла, которые позволяют сократить объемы выброса углекислого газа – продуктов сгорания. Выявлено, что целесообразно перейти к передаче пара, чем выработать электроэнергию. При этом предполагается сократить потери энергии при сжигании и трубопроводной транспортировке теплоносителя. Сокращение объема потерь энергии при сжигании топлива, который составляет 45,2%, способствует покрытию 13,8% общей потребности энергии, экономить около 600 млн долларов США и уменьшить объем выброса углекислого газа на 2200 тыс. тонн в году. Для этого предлагается позитивная корректировка трубопроводной сети в зависимости от расположения и мощностей объектов выработки и потребителей тепла. Данная мера способствует симбиозу решений экономических, в том числе по землепользованию, и экологических проблем градостроительства.

В статье [8] анализируется тепловой баланс территорий, расположенных вблизи рек и водоемов, место обитания рыб, сельхозугодий и пастбищ. Чтобы увеличить продуктивность рыбного хозяйства, берега целенаправленно озеленяются.

Это приводит к уменьшению температуры воды и к возможной потере растительного покрова, что обосновывается анализом многолетних метеоданных по пастбищам, недоосвоенным участкам и коммерческих плантаций хвойных деревьев. Показали, что для отдельных участков солнечная радиация больше в 4-х и 6-х кратном размере, притом в спектре коротковолновых радиаций. А для растительности хороши длинноволновые и латентные потоки солнечных лучей.

При решении многомерных задач сложного тепло- и массообмена пользуются разными способами расщепления [9-12]. Этим достигается обычно уменьшение объема вычислений и переход к одномерным задачам. Одной из незаслуженно забытых разновидностей метода расщепления является дифференциально-разностный метод. Этот метод позволяет по отдельной независимой переменной использовать положений аналитического метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений, метода прогонки и метода матричных преобразований без привлечения метода прогонки (метода прямых). В последнем случае формируемая система уравнений с одинаковой основной трехдиагональной матрицей решается методами матричного исчисления с нахождением собственных чисел и векторов матрицы перехода. При этом система уравнений с трехдиагональной матрицей может относиться к задачам с различными родами граничных условий и различного типа дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами диффузионного переноса – динамического коэффициента вязкости, коэффициента температуропроводности и других.

Анализ литературных источников показал, что тщательно проработан и широко применяется метод прямых для первого рода граничных условий [13], а результаты его применяется для третьего рода граничных условий в виде «полуявного» метода [14], где значение искомой на границе определяется согласно граничному условию из данных предыдущего временного слоя с той или иной точностью. Этим достигается значительное сокращение времени расчета. Но в быстротекущих процессах или при наличии двух и более масштабов времени, которые моделируются с привлечением, например, гиперболического уравнения теплопередачи, уравнений гидродинамики, применение этого метода может привести к расхождению результатов от описываемого процесса. В связи с этим возникла необходимость разработки модификаций метода прямых для различных комбинаций граничных условий.

Ниже описываются некоторые результаты в этом направлении. И они относятся к одномерным задачам. В тоже время, принятая в работе отдельная сеточная функция может быть представлена как скалярная, векторная или матричная функции и относиться к конкретной координате. В рамках изложения результатов данной работы они представляют скалярную функцию – температуры стержня, изменение которой происходит по

координатной оси $0x$ – по длине стержня и по времени.

2. Постановка задачи

В конечных сечениях однородного стержня длиной l заданы потоки тепла, приведенные по коэффициенту теплопроводности:

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = q_l(t). \quad (2)$$

Процесс теплопередачи описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (3)$$

где t – произведение реального времени процесса на коэффициент температуропроводности материала стержня; $f(x,t)$ – суммарная интенсивность внутренних и внешних источников тепла в сечении x , приведенная по коэффициенту температуропроводности материала стержня.

Процесс изучается при заданном начальном распределении температуры по длине стержня:

$$T(x,0) = T_0(x). \quad (4)$$

Цель работы состоит из разработки модификации дифференциально-разностного метода для решения данной задачи.

3. Модификация дифференциально-разностного метода

Вводятся равномерная по x сетка $\omega_x = \left(x_i = ih, i = 0, \dots, N+1; h = \frac{l}{N+1} \right)$, сеточные функции $u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t), u_{N+1}(t)$ для узлов $i = 0, 1, 2, \dots, N-1, N, N+1$, функция $f_i(t)$ в правой части уравнения (3). В остальном пользуемся обычными обозначениями.

Конечноразностная аппроксимация уравнения во внутренних узлах расчетной области имеет второй порядок точности:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f_i. \quad (5)$$

Граничные условия (1)-(2) преобразуются интегро-интерполяционным методом [14]

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{-2}{h^2}u_0 + \frac{2}{h^2}u_1 + f_0 + \frac{2q_0}{h}, \quad (6)$$

$$\frac{du_{N+1}}{dt} = \frac{2}{h^2}u_N - \frac{2}{h^2}u_{N+1} + f_{N+1} + \frac{2q_l}{h}. \quad (7)$$

Уравнения (5)-(7) представим в матричной форме:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{h^2}AU + F,$$

где $U = (u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1})$,

$$f = \left(f_0 + \frac{2q_0}{h}, f_1, \dots, f_N, f_{N+1} + \frac{2q_l}{h} \right),$$

$$A_{N+2} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}_{N+2}.$$

К сожалению, значение определителя $|A_{N+2}|$ матрицы A_{N+2} равно нулю. Это означает, что при нашей постановке, то есть когда при $x = 0$ и $x = l$ заданы условия второго рода, уравнение (3) имеет не единственное, а множество решений.

Приведем две аналогичных примера из механики и трубопроводной транспортировки, которые укажут нам как выйти из положения.

1. Если задано ускорение материальной точки $S''(t)$, то для нахождения закона движения ее налагаются условия: начальное значение $S'(0) = V(0)$ – для однозначного определения скорости и значение исходной координаты материальной точки $S(0)$ – для однозначного определения закона движения. То есть одно условие с производной от $S(t)$, другое – значение $S(t)$ для фиксированных моментов времени. Возможен вариант задания $S(t_1)$ и $S(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ [15]. Т.е. обязательно требуется хотя бы одно значение координаты $S(t)$ при фиксированном значении времени.

2. При решении разнообразных задач трубопроводной транспортировки жидкостей и газов для участка с длиной l возникает случай задания массового расхода в обоих концах участка. Задача имеет однозначное решение относительно массового расхода. Но распределение статического давления на участке определяется с точностью аддитивного постоянного. В этом случае дополнительно требуется значение статического давления для фиксированной пары (x, t) , чем обеспечивается однозначность решения задачи относительно статического давления [16].

То есть постановка нашей задачи требует корректировки: необходимо задавать значение искомой для конкретной точки отрезка $[0; l]$. Для определенности положим, что задано дополнительное условие при $x=0$:

$$T(0,t) = \mu_0(t). \quad (8)$$

Это не противоречит физике задачи: необходимо обеспечить определенный поток тепла с фиксированной температурой на границе. Наложение двух условий для одной точки имеет место при решении задач с образованием нового фронта фазового перехода или же с исчезновением существующего фронта [17].

Итак, заново сформулируем задачу с учетом дополнительного условия.

Для определения сеточной функции $u_1(t)$ составим систему из условий (7) и (8) и находим

$$u_1(t) = \frac{h^2}{2} \mu_0'(t) + \frac{2}{h^2} \mu_0(t) - \frac{h^2}{2} f_0 - q_0 h = \mu_1(t).$$

Здесь штрих указывает на производную по времени.

Это будет граничным условием для нашей новой задачи, где в качестве искомого будут фигурировать $u_2(t), u_3(t), \dots, u_N(t), u_{N+1}(t)$. Граничное условие при $x = h$ будет иметь вид

$$u_1(t) = \mu_1(t), \quad (9)$$

то есть задача имеет смешанные граничные условия: при $x = h$ – условие (9) первого рода, а при $x = l$ – условие (7) – второго рода.

Матричное уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{1}{h^2} \bar{A}\bar{U} + \bar{F}, \quad (10)$$

где $\bar{U} = (u_2, u_3, \dots, u_N, u_{N+1})$,

$$\bar{F} = \left(f_2 + \frac{\mu_1}{h^2}, f_3, \dots, f_N, f_N + \frac{2q_l}{h} \right),$$

$$\bar{A}_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}_N.$$

Запомним, что $u_0(t) = \mu_0(t)$, $u_1(t) = \mu_1(t)$, которые необходимы для дальнейшей обработки (визуализации) результатов расчета.

Надо перейти к матричному уравнению, из которого можно было-бы выделить отдельное уравнение относительно $u_i(t)$, $i = 2, \dots, N + 1$.

Представим \bar{A}_N в виде произведения [13,14]

$$\bar{A}_N = V\Lambda V^{-1},$$

где V – фундаментальная матрица; Λ – диагональная матрица, ненулевые элементы λ_s которой являются собственными значениями трехдиагональной матрицы \bar{A}_N ; V^{-1} – обратная V матрица, строки которой представляют элементы $v_{s,p}^-$ собственных векторов матрицы \bar{A}_N .

Т.к. $V^{-1}V = E$, то умножив двух сторон последнего равенства на V^{-1} слева, получим

$$V^{-1}\bar{A}_N - \Lambda V^{-1} = 0.$$

Разложим данное равенство для s -й строки:

$$\begin{cases} (-2 - \lambda_s)v_{s,2}^- + v_{s,3}^- = 0, \\ v_{s,p-1}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,p}^- + v_{s,p+1}^- = 0 \\ \quad \text{при } p = 3..N-1, \\ v_{s,N-1}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,N}^- + 2v_{s,N+1}^- = 0, \\ v_{s,N}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,N+1}^- = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Данная система из $N + 1$ неизвестных замыкается условием нетривиальности решения системы: основной определитель данной системы относительно $v_{s,p}^-$ должен иметь нулевое значение:

$$\bar{D}_N = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta_s & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 \cos \theta_s & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos \theta_s \end{vmatrix}_N = 0,$$

где $2 \cos \theta_s = -2 - \lambda_s$.

Значение данного определителя составляет

$$2(\cos \theta_s D_{N-1} - D_{N-2}), \text{ где } D_n = \frac{\sin(n+1)\theta_s}{\sin \theta_s} \text{ [5,6].}$$

Из последнего уравнения находим, что корни имеют значения $\theta_s = \frac{2s-3}{2N}\pi$, а собственные значения определителя \bar{D}_N составляют множества

$$\lambda_s = -2 \left(1 + \cos \frac{2s-3}{2N}\pi \right).$$

Ищем значения $v_{s,p}^-$ в виде [5]

$$v_{s,p}^- = c_s A_{s,p},$$

где $A_{s,p}$ – алгебраическое дополнение p -го элемента первой строки определителя \bar{D}_N ; c_s – нормирующий множитель для s -го собственного вектора матрицы \bar{A}_N .

Вычисления значений $A_{s,p}$ и нормирующего

множителя, найденного из условия $c_s^2 \sum_{p=2}^{N+1} A_{s,p}^2 = 1$

приводят к значениям элементов собственных векторов матрицы \bar{A}_N :

$$v_{s,p}^- = \frac{(-1)^{s+p}}{\sqrt{2N-1}} \begin{cases} 2 \cos(N+1-p)\theta_s & \text{при } p = 2..N, \\ 1 & \text{при } p = N+1. \end{cases}$$

Подстановка значений λ_s и $v_{s,p}^-$ в систему (11) показывает верность решения.

Согласно значениям элементов $v_{s,p}^-$ матрицы V^{-1} значения элементов $v_{s,p}$ матрицы V находили методом Гаусса [18] с выбором главного элемента столбца. Результаты нахождения элементов матрицы V^{-1} проверяли вычислением произведений $V^{-1}V$ и $V\Lambda V^{-1}$, которые составляли матриц E и A соответственно.

Умножим сторон уравнения (10) на V^{-1} слева и с учетом коммутативности операций дифференцирования и умножения матриц, получим

$$\frac{dV^{-1}\bar{U}}{dt} = \frac{1}{h^2} V^{-1}A\bar{U} + V^{-1}F. \quad (12)$$

Здесь

$$V^{-1}\bar{U} = \left(\sum_{p=2}^{N+1} v_{2,p}u_p, \sum_{p=2}^{N+1} v_{3,p}u_p, \dots, \sum_{p=2}^{N+1} v_{N+1,p}u_p \right) = (\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \dots, \tilde{u}_{N+1}) = \tilde{U},$$

$$V^{-1}F = \left(\sum_{p=2}^{N+1} v_{2,p}F_p, \sum_{p=2}^{N+1} v_{3,p}F_p, \dots, \sum_{p=2}^{N+1} v_{N+1,p}F_p \right) = (\tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots, \tilde{f}_{N+1}) = \tilde{F},$$

f_p – p -й элемент вектор-столбца F ,

$$V^{-1}AV = (V^{-1}V)\Lambda(V^{-1}\bar{U}) = \Lambda\tilde{U}.$$

Поэтому уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d\tilde{U}}{dt} = \frac{1}{h^2}\Lambda\tilde{U} + \tilde{F},$$

из которого можно выделить отдельное уравнение

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{\lambda_i}{h^2}\tilde{u}_i + \tilde{f}_i \tag{13}$$

относительно $\tilde{u}_i(t)$ для расчетных узлов $i = 2, 3, \dots, N + 1$.

Решение (13) для в промежутке $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ записываем в виде рекуррентной зависимости:

$$\tilde{u}_i^n = \tilde{u}_i^{n-1}e^{\lambda_i\Delta t_n/h^2} + S_n e^{\lambda_i t_n/h^2}.$$

Здесь значение интеграла

$$S_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tilde{f}_i(t) e^{-\lambda_i t/h^2} dt$$

можно вычислить аналитически, если этого позволить вид функции $\tilde{f}_i(t)$, или численно. А шаг по времени Δt_n может иметь постоянное или переменное значение.

Для $i = 2..N + 1$, согласно введенным видоизменениям, имеем начальное условие

$$\tilde{u}_i^0 = \sum_{p=2}^{N+1} v_{i,p}^- u_p^0, \text{ где } u_p^0 = T_0(ph) \text{ берется согласно (4).}$$

Обратный переход к исходной функции осуществляется, согласно $U = V\tilde{U}$, по формуле

$$u_i^n = \sum_{p=2}^{N+1} v_{i,p} \tilde{u}_p^n. \text{ Она уместна для } i = 2..N + 1, \text{ а}$$

значения u_i^n при $i = 0$ и $i = 1$ определены выше.

Аналогичный алгоритм можно построить с дополнительным условием $T(l,t) = T_l(t)$. В этом случае в θ_s меняется индекс, как и меняется он для всех использованных параметров.

4. Обсуждение результатов

Задачу с граничными условиями второго рода при $x = 0$ и $x = l$ с привлечением дополнительного условия привели к вспомогательной задаче со смешанными граничными условиями: первого рода при $x = h$ и второго рода при $x = l$. Для решения

вспомогательной задачи разработали дифференциально-разностный метод.

По координате использовали метод прямых, обеспечивающий второй порядок точности аппроксимации. Составили основную трехдиагональную матрицу перехода к конечноразностным уравнениям. Определили ее фундаментальную и диагональную матрицы, которые использовали при составлении автономных дифференциальных уравнений по времени, которые допускают аналитическое решение.

Представим примерный результат вычислительного эксперимента, который проводился для $N = 50$, $l = 1 \text{ м}$, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = 0.001 \text{ м}^2$, $T_0(x) = 10^0 \text{ C}$, $T(0,t) = 20^0 \text{ C}$, $q_l(t) = -5^0 \text{ C / м}$. Мощности точечных стока (при $x = 0.3 \text{ м}$) и источника (при $x = 0.7 \text{ м}$) задавали в виде условного оператора

$$f(x,t) = \begin{cases} -5^0 \text{ C / м}^2 & \text{при } x = 0.3 \text{ м}, \\ 5^0 \text{ C / м}^2 & \text{при } x = 0.7 \text{ м}, \\ 0^0 \text{ C / м}^2 & \text{при } x \neq 0.3 \text{ и } x \neq 0.7 \text{ м}. \end{cases}$$

Через каждые 20 шагов по времени осуществляли переход к исходной функции и данные записывали в новом файле.

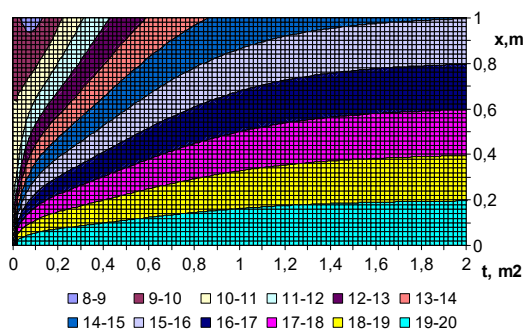


Рисунок. Изменение температурного поля однородного стержня по t .

На рисунке представлены изотермы в плоскости (t, x) . На левом верхнем уголке рисунка образовалась зона, где значение температуры меньше чем исходно заданной температуры. Т.е. на границе $x = l$ температура сначала убывает, а потом начинает расти. При $t = 2 \text{ м}^2$ имеем практически равномерный градиент температуры по длине стержня.

5. Выводы

Представленный алгоритм легко адаптируется для решения одно- и многомерных уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов при граничных условиях второго рода, а также условий первого и второго рода в начале и конце отрезка. При этом однажды формированные фундаментальная и диагональная матрицы, обратная фундаментальной матрица

применяются в рекуррентных вычислениях, которые состоят из суммирования, а не прямой и обратной прогонки. Второе преимущество метода – это точное решение конечноразностного уравнения, чем

отличается от других методов расщепления. Эти особенности, по нашему мнению, полезны также для решения нелинейных уравнений математической физики.

Литература

- [1] *Mohamed Kh., Brahim B., Karim L., Hassan H., Pierri H., Amin B.* Experimental and numerical study of an earth-to-air heat exchanger for buildings air refreshment in Marrakech // Proceedings of BS2015: 14th Conference of International Building Performance Simulation Association, Hyderabad, India, Dec. 7-9, 2015. – P. 2230-2236.
- [2] *Fazlikhani Faezeh, Goudarzi Hossein, Solgi Ebrahim.* Numerical analysis of the efficiency of earth to air heat exchange systems in cold and hot-arid climates // Energy conversion and management, 2017, №5, Т: 148. – P. 78-89.
- [3] *Rodger P., Evelov V., Diana A., Darawsheh I., Almaskari F.* Mechanical and Heat Transfer Performance Investigation of High Thermal Conductivity, Commercially Available Polymer Composite Materials for Heat Exchange in Electronic Systems // Journal of Thermal Science and Engineering Applications, 2017, Volume 9, Issue 3. DOI: 10.1115/1.4035942.
- [4] *Mariani F., Risi F., Grimaldi C.N.* Separation efficiency and heat exchange optimization in a cyclone // Separation and purification technology, 2017, Т.179. – P. 393-402.
- [5] *Parker J., Glew D., Fletcher M., and etc.* Accounting for refrigeration heat exchange in energy performance simulations of large food retail buildings // Building Services Engineering Research & Technology, 2017, Volume 38. Issue 3. – P. 253-268. DOI: 10.1177/0143624416675389.
- [6] *Szeri A.J.* Boundary layers at a dynamic interface: Air-sea exchange of heat and mass // Journal of Geophysical Research-Oceans, 2017, Volume 122, Issue 4. – P. 2781-2794.
- [7] *Dou Yi, Ohnishi Satoshi, Fujii Minoru, Togawa Takuya, Fujita Tsuyoshi, Tanikawa Hiroki, Dong Liang.* Feasibility of developing heat exchange network between incineration facilities and industries in cities: Case of Tokyo Metropolitan Area // Journal of cleaner production, 2017, №9, Т.170. – P. 548-558.
- [8] *Dugdale Stephen J., Malcolm Lain A., Kantola Kaisa, Hannah David.* Stream temperature under contrasting riparian forest cover: Understanding thermal dynamics and heat exchange processes // Journal of cleaner production. 2017, №8, Т: 610. – P. 1375-1389.
- [9] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
- [10] *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
- [11] *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
- [12] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
- [13] *Фаддеева В.Н.* Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).
- [14] *Каримбердиева С.* Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
- [15] *Эллиот Л., Уилкокс У.* Физика. Пер. с англ – М.: Физматгиз, 1963. – 808 с.
- [16] *Хужаев И.К., Болтибаев Ш.К.* Периодические изменения газодинамических показателей линейного участка горизонтального газопровода при различных граничных условиях // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2009. – Вып. 121. – С. 110-125.
- [17] *Будак Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б.* Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтных задач типа Стефана // ДАН СССР, 1966. Том 167, № 4. – С. 735-738.
- [18] *Копчёнова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 368 с.