

УДК 532.546

ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА С НЕРАВНОВЕСНОЙ АДСОРБЦИЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Хужаёров Б.Х.

д.ф.-м.н, профессор Самаркандского государственного университета,
тел.: +(99890)2243096, e-mail: b.khuzhayorov@mail.ru

Джиянов Т.О.

м.н.с. Самаркандского сельскохозяйственного института,
тел.: +(99893)3480754, e-mail: t.djiyanov@mail.ru

Рассматривается перенос вещества в неоднородной пористой среде, состоящей из хорошо проницаемой (транзитной) и плохо проницаемой застойной зон, с учетом неравновесной адсорбции в зонах. В транзитной зоне есть два участка, в каждом из которых происходит адсорбция вещества с обратимой неравновесной кинетикой. Обмен веществом со второй зоной моделируется источником членом в виде производной дробного порядка по времени от концентрации вещества в первой зоне. Сравниваются результаты данного подхода с известными, традиционными подходами. Показано, что такой способ моделирования процесса дает удовлетворительный результат. Путем соответствующего подбора параметров источника члена можно получить результаты, близкие к результатам известного биконтинуального подхода.

Ключевые слова: адсорбция, аппроксимация, дробная производная, пористая среда, ретарцационный фактор, транзитная зона.

SOLUTE TRANSPORT WITH NON-EQUILIBRIUM ADSORPTION IN A NON-HOMOGENEOUS POROUS MEDIUM

Khuzhayorov B.Kh., Djiyanov T.O.

In the paper a solute transport problem with non-equilibrium adsorption in a non-homogeneous porous medium consisting of two zones, one with high permeability (transit zone) and another one with low permeable (immobile liquid zone) is considered. In the transit zone there are two sites in both of which adsorption of solution with reversible kinetics occurs. The presence of the second zone is modelled through a source (sink) term in the fractional derivative form with respect to concentration in the first zone. Comparison of results with results of known, traditional approaches is made. By relevant choose of the sink term parameters results close to that of know bi-continual models can be obtained.

Keywords: adsorption, approximation, fractional derivative, porous media, retardation factor, transit zone.

БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ҒОВАК МУҲИТДА НОМУВОЗАНАТ АДСОРБЦИЯЛИ МОДДА КЎЧИШИ

Хужаёров Б.Х., Джиянов Т.О.

Ишда яхши ўтказувчи (транзит) ва ёмон ўтказувчи (харакатсиз суюклик билан тўйинган) иккита зонадан иборат биржинислимас ғовак муҳитда номувозанат адсорбцияли модда кўчиши масаласи қаралган. Транзит зонада ҳар бирида номувозанат қайталанувчи кинетика бўйича адсорбция юз берувчи иккита соҳа мавжуд деб қаралади. Иккинчи зона билан модда алмашинуви биринчи зонадаги модда концентрациясининг вақт бўйича қаср тартибли ҳосиласидан иборат бўлган манба (ютувчи) ҳад воситасида моделлаштирилган. Шу ёндашув асосида олинган натижалар маълум, ҳозиргача ишлатиб келинаётган биконтиниум ёндашувлар берадиган натижалар билан таққосланган.

Таянч иборалар: адсорбция, аппроксимация, қаср ҳосила, ғовак муҳит, ретарцацион фактор, транзит зона.

1. Введение

Подземные водоносные и нефтегазовые пласты, как правило, имеют неоднородную структуру в микро– и макромасштабе [1]. Неоднородные в макромасштабе пласты состоят из различных зон с отличающимися, иногда очень сильно, фильтрационно-ёмкостными

свойствами, т.е. пористостью, проницаемостью и др. Зоны с хорошей пористостью и проницаемостью являются хорошими проводниками для жидкости и различных веществ, взвешенных или растворенных в пластовых флюидах. Типичным примером неоднородных пластов являются трещиновато-пористые среды (ТПС) [2, 3], структура которых

представляется в виде системы трещин, окружающих пористые блоки.

Взвешенные в жидкости коллоидные частицы могут двигаться относительно быстрее и продвигаться на большие расстояния в структурированных пористых средах, чем в средах с однородной структурой [4-7]. Причиной этого является наличие путей, благоприятствующих быстрому движению веществ. В ТПС при моделировании переноса веществ обычно считается, что основными путями движения жидкости и вместе с ней взвешенных твердых частиц или растворенных веществ являются трещины. Пористые блоки в упрощенных моделях считаются не проницаемыми для жидкости, однако частицы или растворенные вещества могут проникать в них за счет диффузии. Таким образом, в среде образуются две зоны, одна с подвижной жидкостью (трещины), а другая с неподвижной (пористые блоки). Между зонами происходят массообменные процессы.

Опережающее распространение веществ в пористой среде может быть следствием многих факторов. Поэтому есть определенные трудности математического моделирования этого явления. Некоторые модели в этом направлении представлены в [8-11]. В этих моделях использован двухзонный подход, отмеченный выше. Массообмен между зонами моделируется кинетическим уравнением первого порядка [12, 13]. Несколько другой подход, комбинирующий кинетический и линейный массообмен между зонами, предлагается в [14]. Некоторой модификацией двухзонного подхода является подход, где учитывается движение жидкости в обеих зонах, но с разными масштабами [8, 9].

При переносе коллоидных частиц в пористой среде обычно происходит их отложение в порах, причины которого разнообразны. Отложение в зависимости от природы и места взаимодействия частиц с поверхностью скелета породы может быть обратимым или необратимым. С учетом этих факторов модели переноса, естественно, становятся более сложными. Перенос вещества в средах с двойной пористостью с учетом обратимого и необратимого отложений описывается такими сложными моделями. При этом важное значение приобретает учет текстуры среды в моделях [15-17]. Массообмен между двумя зонами течения считается функцией отложенного объема вещества в каждой зоне, кроме того возможно исключение мелких пор из процесса переноса, т.е. их запираание за счет осаждения веществ [15, 18, 19].

В [20] представлена модель переноса коллоидных веществ в среде с двойной пористостью, учитывающая обратимое и необратимое задерживание частиц, а также массообмен первого порядка между трещинами и пористыми блоками. Полученное аналитическое решение использовано при описании результатов экспериментов [21]. Получено хорошее согласие теоретических и экспериментальных результатов. Дисперсивность и параметры задерживания были выше для частиц большего размера, интенсивность обратимого и

необратимого задерживания частиц была большей для среды с относительно мелкими порами.

В [14] рассматривается перенос вещества в среде с двойной пористостью, учитывающий обратимое и необратимое осаждение вещества в обеих зонах и равновесный обмен первого порядка между зонами. В каждой зоне, т.е. в трещинах и пористых блоках, происходит обратимое и необратимое осаждение (отложение) вещества с различными характеристиками, описываемыми линейными уравнениями. Получено аналитическое решение задачи, которое использовано для описания результатов ранее проведенных экспериментов [15].

В данной работе неоднородная двухзонная среда рассматривается как однозонная с некоторым источником (стоком). Через источник (сток) моделируется вторая зона. Такой подход является принципиально новым, так как фактически биконтинуальная среда представляется как моноконтинуальная. Правомочность такого подхода обосновывается приближением результатов на основе моноконтинуального подхода с соответствующими результатами биконтинуального подхода. В работе это осуществлено путем минимизации функционала невязки. Кроме того, здесь считается, что в обоих участках первой зоны происходит обратимая адсорбция вещества с соответствующими кинетическими уравнениями.

2. Постановка задачи

Рассматривается неоднородная пористая среда, состоящая из хорошо проницаемой (транзитной) и плохо проницаемой застойной зон, схема которой приведена на рис.1. Параметры в первой зоне обозначены индексом 1. В зоне 1 есть два участка, в каждом из которых происходит осаждение вещества с обратимой неравновесной кинетикой. Со второй зоной происходит обмен вещества, который смоделируем производной дробного порядка по времени от концентрации вещества в первой зоне. Следовательно, в отличие от [20] концентрационное поле во второй зоне не рассматривается.

Уравнения переноса вещества в одномерном случае записываем в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial S_{a1}}{\partial t} + \rho \frac{\partial S_{s1}}{\partial t} + \theta_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^\gamma C_1}{\partial t^\gamma} = \\ = \theta_1 D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - \theta_1 v_1 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время; x – расстояние; m , D_1 – коэффициент продольной дисперсии, m^2/c ; v_1 – скорость движения жидкости, m/c ; C_1 – объемная концентрация вещества в жидкости; S_{a1} и S_{s1} – концентрации отложенного вещества, m^3/kg ; θ_1 – пористость, m^3/m^3 ; ρ – плотность среды, kg/m^3 ; a_2 – ретарционный фактор, обусловленный переносом вещества во вторую среду, $c^{\beta-1}$.

Осаждение вещества в каждом из участков первой зоны происходит обратимо в соответствии с кинетическими уравнениями

$$\rho \frac{\partial S_{a1}}{\partial t} = \theta_1 k_{a1} C_1 - \rho k_{ad1} S_{a1}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial S_{s1}}{\partial t} = \theta_1 k_{s1} C_1 - \rho k_{sd1} S_{s1}, \quad (3)$$

где k_{a1}, k_{s1} – коэффициенты отложения вещества от жидкой фазы на твердую фазу, c^{-1} ; k_{ad1}, k_{sd1} – коэффициенты отрыва вещества из твердой фазы и перехода в жидкость, c^{-1} .

Пусть в первоначально насыщенную чистой (без вещества) жидкостью среду с начального момента времени закачивается жидкость с постоянной концентрацией вещества c_0 . Рассмотрим такие периоды времени, где концентрационное поле не достигает правой границы среды, $x = \infty$. При отмеченных допущениях начальные и граничные условия для задачи имеют вид

$$C_1(0, x) = 0, S_{a1}(0, x) = 0, S_{s1}(0, x) = 0, \quad (4)$$

$$C_1(t, 0) = c_0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}(t, \infty) = 0. \quad (6)$$

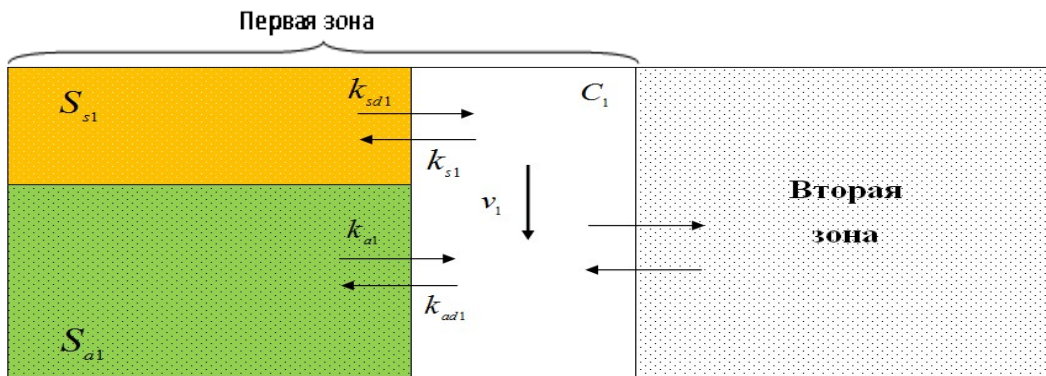


Рис.1. Схема переноса вещества в двухзонной среде

3. Метод решения

Задача (1) – (6) хотя и является линейной, получение аналитического решения является сложным, так как необходимо найти одновременно три поля. Поэтому для решения задачи применяем метод конечных разностей. В рассматриваемой области

$$\Omega = \{(t, x), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \infty\}$$

введена равно-мерная по направлениям сетка

$$\bar{\omega}_{\tau h} = \{(t_j, x_i); t_j = \tau j, x_i = ih, \tau = \frac{T}{J}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}\},$$

где I – достаточно большое целое число, выбираемое так, чтобы отрезок $[0, x_I], x_i = ih$, перекрывал область расчетного изменения полей C_1, S_{a1} и S_{s1}, h – шаг сетки по направлению x .

В открытой сеточной области

$$\omega_{\tau h} = \{(t_j, x_i); t_j = \tau j, x_i = ih, \tau = \frac{T}{J}, j = \overline{1, J}, i = \overline{1, I-1}\}$$

уравнения (1)-(3) аппроксимировались следующим образом:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{(S_{a1})_i^{j+1} - (S_{a1})_i^j}{\tau} + \rho \frac{(S_{s1})_i^{j+1} - (S_{s1})_i^j}{\tau} + \\ & + \theta_1 \frac{(C_1)_i^{j+1} - (C_1)_i^j}{\tau} + \frac{a_2}{\Gamma(2-\gamma)} \times \\ & \times \left[\sum_{k=0}^{j-1} \frac{(C_1)_i^{k+1} - (C_1)_i^k}{\tau} ((j-k+1)^{1-\gamma} - (j-k)^{1-\gamma}) + \right. \\ & \left. + \frac{((C_1)_i^{j+1} - (C_1)_i^j) \tau^{1-\gamma}}{\tau} \right] = \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & = \theta_1 D_1 \frac{(C_1)_{i-1}^{j+1} - 2(C_1)_i^{j+1} + (C_1)_{i+1}^{j+1}}{h^2} - \\ & - \theta_1 v_1 \frac{(C_1)_i^{j+1} - (C_1)_{i-1}^{j+1}}{h}, \end{aligned}$$

$$\rho \frac{(S_{a1})_i^{j+1} - (S_{a1})_i^j}{\tau} = \theta_1 k_{a1} (C_1)_i^j - \rho k_{ad1} (S_{a1})_i^{j+1}, \quad (8)$$

$$\rho \frac{(S_{s1})_i^{j+1} - (S_{s1})_i^j}{\tau} = \theta_1 k_{s1} (C_1)_i^j - \rho k_{sd1} (S_{s1})_i^{j+1}, \quad (9)$$

где $(C_1)_i^j, (S_{a1})_i^j, (S_{s1})_i^j$ – сеточные значения функций $C_1(t, x), S_{a1}(t, x), S_{s1}(t, x)$ в точке $(t_j, x_i), \Gamma(x)$ – гамма-функция.

Из явных сеточных уравнений (8), (9) определяем $(S_{a1})_i^{j+1}, (S_{s1})_i^{j+1}$:

$$(S_{a1})_i^{j+1} = p_{b1} (S_{a1})_i^j + p_{b2}, \quad (10)$$

$$(S_{s1})_i^{j+1} = q_{b1} (S_{s1})_i^j + q_{b2}, \quad (11)$$

где

$$p_{b1} = \frac{1}{1 + \tau k_{ad1}}, \quad p_{b2} = \frac{\tau \theta_1 k_{a1}}{\rho + \rho \tau k_{ad1}} (C_1)_i^j,$$

$$q_{b1} = \frac{1}{1 + \tau k_{sd1}}, \quad q_{b2} = \frac{\tau \theta_1 k_{s1}}{\rho + \rho \tau k_{sd1}} (C_1)_i^j.$$

Сеточные уравнения (7) приводятся к виду

$$-A_1(C_1)_{i-1}^{j+1} + B_1(C_1)_i^{j+1} - E_1(C_1)_{i+1}^{j+1} = (F_1)_i^j, \quad (12)$$

где

$$A_1 = \frac{\theta_1 D_1 \tau}{h^2} + \frac{\theta_1 v_1 \tau}{h}, \quad B_1 = \theta_1 + \frac{2\theta_1 D_1 \tau}{h^2} + \frac{\theta_1 v_1 \tau}{h} + \frac{a_2 \tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)},$$

$$E_1 = \frac{\theta_1 D_1 \tau}{h^2},$$

$$(F_1)_i^j = (\theta_1 + \frac{a_2 \tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\beta)})(C_1)_i^j - \rho((S_{a1})_i^{j+1} - (S_{a1})_i^j) - \rho((S_{s1})_i^{j+1} - (S_{s1})_i^j) - \frac{a_2}{\Gamma(2-\gamma)} \left[\sum_{k=0}^{j-1} ((j-k+1)^{1-\gamma} - (j-k)^{1-\gamma})(C_1)_i^{k+1} - ((j-k+1)^{1-\gamma} - (j-k)^{1-\gamma})(C_1)_i^k \right].$$

Устанавливается следующий порядок расчета решения. По (10), (11) определяются $(S_{a1})_i^{j+1}$, $(S_{s1})_i^{j+1}$, затем решая систему линейных уравнений (12) методом прогонки – $(C_1)_i^{j+1}$. Поскольку $p_{b1}, q_{b1} < 1$, схемы (10), (11) устойчивы, а для (12) условия устойчивости метода прогонки выполняются.

4. Численные результаты и их анализ

По приведенному выше алгоритму проведены численные эксперименты.

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0,1, \quad a_2 = 10^{-3}, \quad v_1 = 10^{-4} \text{ м/с}, \quad D_1 = v_1 \cdot \alpha_1,$$

$$\alpha_1 = 0,005 \text{ м}, \quad \theta_1 = 0,1, \quad k_{a1} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1},$$

$$k_{ad1} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad k_{s1} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad k_{sd1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1},$$

$$\rho = 1800 \text{ кг/м}^3 \text{ и различные } \gamma.$$

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2, согласно которому отток вещества во вторую зону приводит к запаздывающему распространению профилей концентрации вещества в подвижной жидкости. Как следствие этого явления, в концентрациях адсорбированного вещества также наблюдается запаздывание.

Для оценки работоспособности предлагаемой модели важное значение имеет сравнение результатов с соответствующими результатами [4].

Для этого сравниваем стоковые члены

$$Q_1 = \alpha(C_2 - C_1) \text{ в [4] и } Q_2 = a_2 \frac{\partial^\gamma C_1}{\partial t^\gamma} \text{ в (1). Для}$$

некоторого набора параметров a_2, γ и $\alpha = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ соответствующие графики приведены на рис. 3, согласно которому характеры изменения стоковых членов аналогичны, что говорит о качественном

согласии результатов предлагаемой модели с результатами модели [20]. Для количественной оценки близости результатов на основе кривых рис. 3 вычисляется

$$\delta_1 = \int_0^L (Q_1 - Q_2)^2 dx \quad (13)$$

при заданном значении t , где L – условная граница области, до которой концентрационные профили распространяются.

Расчет по (13) при $t = 3600 \text{ с}$ дает

- а) $\delta_1 = 3,75 \cdot 10^{-14}$ для $a_2 = 0,000155, \gamma = 0,5$;
- б) $\delta_1 = 4,64 \cdot 10^{-14}$ для $a_2 = 0,0003, \gamma = 0,7$;
- в) $\delta_1 = 4,86 \cdot 10^{-14}$ для $a_2 = 0,00115, \gamma = 0,9$.

Значения δ_1 характеризуют средне- квадратичное отклонение Q_1 от Q_2 для заданного момента времени. Из полученных значений δ_1 предпочтение следует отдать случаю а) с $a_2 = 0,000155, \gamma = 0,5$.

Отметим, что такие выкладки нами проделаны только с целью оценки принципиальной близости двух подходов. Для других моментов t и α, a_2, γ можно получить совершенно другие оценки δ_1 . В принципе, для приближения двух моделей необходимо поставить и решить соответствующие коэффициентные обратные задачи по определению a_2, γ для заданного значения α или, наоборот, определения α при заданном a_2 и γ .

Близость стоковых членов Q_1 и Q_2 должна гарантировать близость концентрационных полей C_1 , определенных с использованием предлагаемого подхода и модели [20]. Для этого построены соответствующие профили C_1 (рис. 4). Как видно из графиков, решения близки друг к другу. Для оценки их близости используем средне-квadraticное отклонение (13) только для C_1 , определенных на основе двух моделей, т.е.

$$\delta_2 = \int_0^L (C_1^{(1)} - C_1^{(2)})^2 dx,$$

где $C_1^{(1)}$ – концентрационное поле $C_1(t, x)$ при заданном t , определенное по [20], а $C_1^{(2)}$ – то же самое, определенное здесь как решение (1). Для проанализированных выше случаев получены следующие значения:

- а) $\delta_2 = 1,20 \cdot 10^{-6}$ для $a_2 = 0,0002, \gamma = 0,5$;
- б) $\delta_2 = 1,62 \cdot 10^{-6}$ для $a_2 = 0,0003, \gamma = 0,7$;
- в) $\delta_2 = 1,90 \cdot 10^{-6}$ для $a_2 = 0,0016, \gamma = 0,9$.

Как видно из результатов, по значениям δ_2 также можно отдать предпочтение случаю а).

Проведенный анализ показывает, что предлагаемая здесь более простая модель при соответствующем выборе параметров может удовлетворительно описать результаты более сложной модели [20].

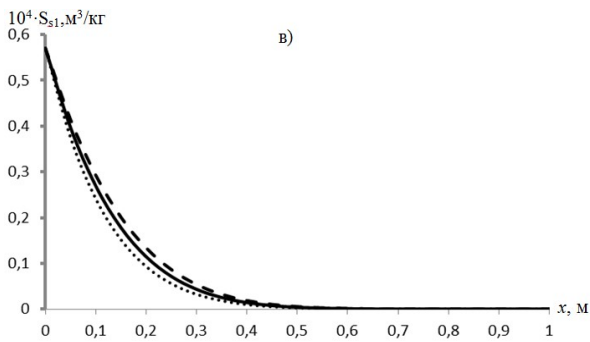
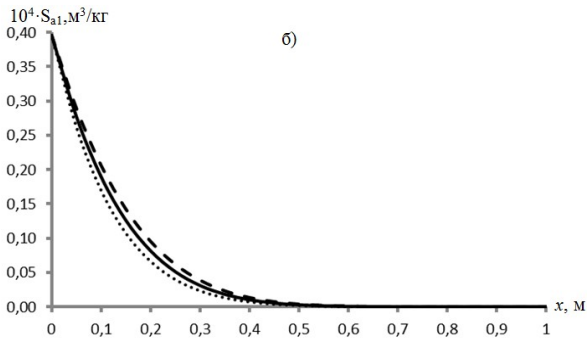
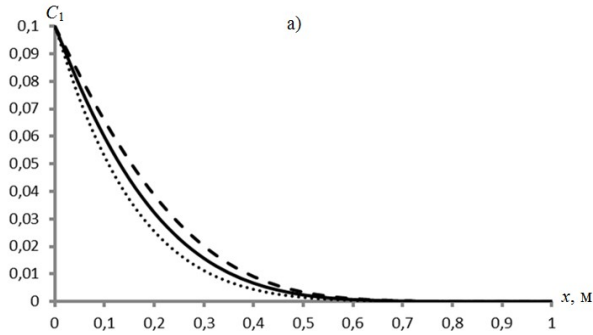


Рис. 2. Профили концентраций C_1 (а), S_{a1} (б), S_{s1} (в) при $t=3600$ с, $\gamma = 0,5$ (.....), $0,7$ (—), $0,9$ (---).

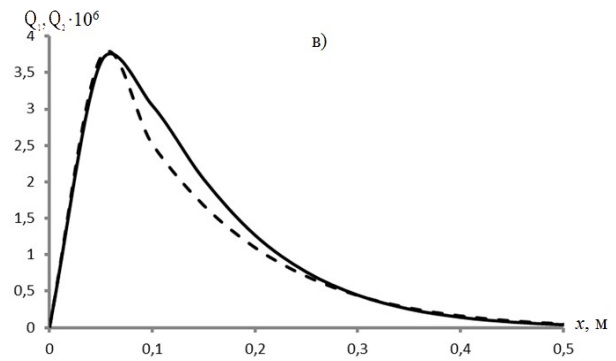
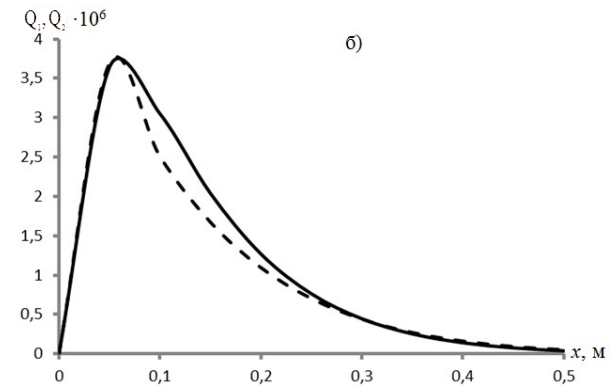
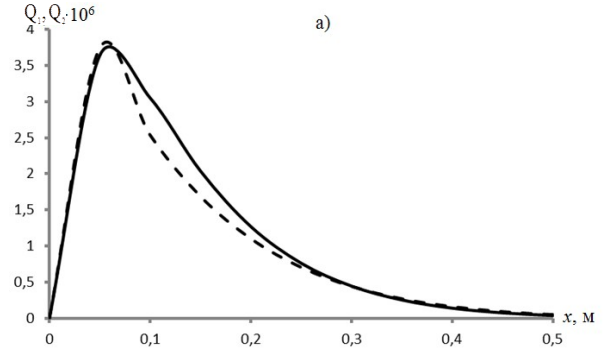


Рис. 3. Сравнение источниковых членов при $t=3600$ с, $a_2 = 0,000155$, $\gamma = 0,5$ (а), $a_2 = 0,0003$, $\gamma = 0,7$ (б), $a_2 = 0,00115$, $\gamma = 0,9$ (в) Q_1 (—) и Q_2 (---)

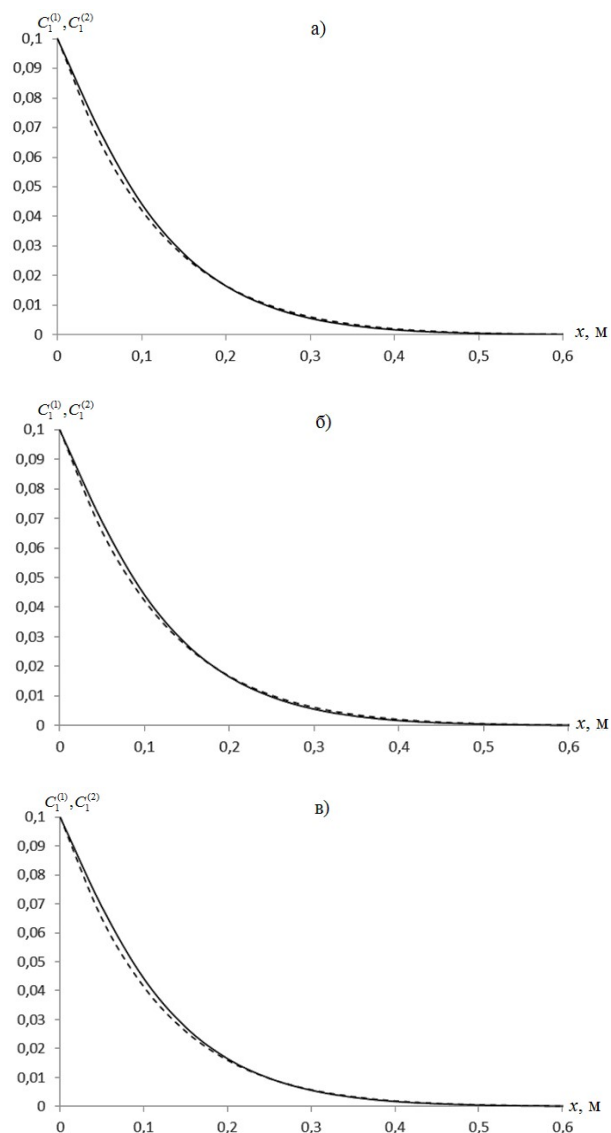


Рис.4. Сравнение концентрационных профилей полученных на основе $C_1^{(1)}$ (—), $C_1^{(2)}$ (-----) двух моделей при $t=3600$ с, $\alpha = 10^{-4}$, $a_2 = 0,0002$, $\gamma = 0,5$ (а), $a_2 = 0,0003$, $\gamma = 0,7$ (б), $a_2 = 0,0016$, $\gamma = 0,9$ (в)

5. Заключение

В настоящей работе, в отличие от [20], предлагается новая модель, где наличие второй зоны неоднородной среды учитывается в виде стокового (источникового) члена в уравнении переноса, выписанного для первой зоны. Стоковый член представлен в виде дробной производной по времени от концентрации вещества в первой зоне с некоторым коэффициентом. Таким образом, данный подход является моноконтинуальным, в то время как в [20] использован биконтинуальный подход. Осуществлена численная реализация модели и оценено влияние массопереноса во вторую зону на характеристики переноса вещества в первой зоне. Установлено, что с уменьшением показателя дробной производной γ от единицы как в концентрации вещества в жидкости, так и в концентрации адсорбированного вещества в транзитной зоне происходит запаздывание в распределении. Решен вопрос приближения результатов по предлагаемой модели с соответствующими результатами [20]. Для этого осуществлен подбор значений параметров стокового члена, т.е. a_2 и γ , обеспечивающих близость результатов. Для этого использован вариационный подход, минимизирующий невязку из стоковых членов в обеих моделях. Показано, что путем подбора значений параметров a_2 и γ можно достичь хорошего приближения. Таким образом, показана принципиальная возможность предлагаемой моноконтинуальной модели описывать результаты более сложной биконтинуальной модели. Кроме того, как показано в [22], неоднородность среды может быть причиной аномальных явлений в процессах фильтрации и переноса веществ в них. Как известно [23, 24], дробные производные по времени позволяют учесть аномальный характер в законах переноса веществ и фильтрации жидкости. Следовательно, по предлагаемой модели могут быть изучены отмеченные аномальные явления. Это – предмет последующих исследований.

Литература

- [1] Barenblatt G.I., Entov V.M. and Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flow Through Natural Rocks. Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands (1990).
- [2] Van Golf-Racht T.D. Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering. Developments in Petroleum Science, Vol. 12. Elsevier. - 1982. - 732 p.
- [3] Sahimi M. Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock. From Classical Methods to Modern Approaches. Second, Revised and Enlarged Edition. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. - 2011.
- [4] Cey E.E., Rudolph D.L. Field study of macropore flow processes using tension infiltration of a dye tracer in partially saturated soils // Hydrological Processes. 23. - 2009. - Pp. 1768-1779.
- [5] Jarvis N.J. A review of non-equilibrium water flow and solute transport in soil macropores: principles, controlling factors and consequences for water quality // European Journal of Soil Science. 58. - 2007. - Pp. 523-546.
- [6] Pang L., McLeod M., Aislabie J., Simunek J., Close M., Hector R. Modeling transport of microbes in ten undisturbed soils under effluent irrigation // Vadose Zone Journal 7. - 2008. - Pp. 97-111.

- [7] *Passmore J.M., Rudolph D.L., Mesquita M.M.F., Cey E.E., Emelko M.B.* The utility of microspheres as surrogates for the transport of E. coli RS2g in partially saturated agricultural soil // *Water Research* 44. - 2010. - Pp. 1235–1245.
- [8] *Gerke H.H., van Genuchten M.T.* Macroscopic representation of structural geometry for simulating water and solute movement in dualporosity media // *Advances in Water Resources*. 19. - 1996. - Pp. 343-357.
- [9] *Selim H.M., Ma L.* *Physical Nonequilibrium in Soils: Modeling and Applications*. Ann Arbor Press, Chelsea, MI. - 1998.
- [10] *Simunek J., van Genuchten M.Th.* Modeling nonequilibrium flow and transport processes using HYDRUS // *Vadose Zone Journal* 7. - 2008. - Pp. 782-797.
- [11] *Toride N., Leij F.J., van Genuchten M.Th.* The CXTFIT code for estimating transport parameters from laboratory or field tracer experiments. Version 2.0. Res. Rep. 137. U.S. Salinity Lab, Riverside, CA. - 1995.
- [12] *Coats K.H., Smith B.D.* Dead-end pore volume and dispersion in porous media // *Soc. Pet. Eng. J.* - 1964. - № 4. - Pp. 73-84.
- [13] *Van Genuchten M.Th., Wierenga P.J.* Mass Transfer Studies in Sorbing Porous media. I. Analytical Solution // *Soil Science Society of America Journal*, 1976. - Vol.40, № 4. - Pp. 473-480.
- [14] *Leij F.J., Bradford S.A.* Combined physical and chemical nonequilibrium transport model: analytical solution, moments, and application to colloids // *Journal of Contaminant Hydrology*. 110. - 2009. - Pp. 87-99.
- [15] *Bradford S.A., Simunek J., Bettahar M., van Genuchten M.T., Yates S.R.* Modeling colloid attachment, straining, and exclusion in saturated porous media // *Environmental Science & Technology*. 37. - 2003. - Pp. 2242-2250.
- [16] *Bradford S.A., Torkzaban S., Simunek J.* Modeling colloid transport and retention in saturated porous media under unfavorable attachment conditions // *Water Resources Research* 47. W10503. - 2011.
- [17] *Silliman S.E.* Particle transport through two-dimensional, saturated porous media: influence of physical structure of the medium // *Journal of Hydrology* 167. - 1995. - Pp. 79-98.
- [18] *Ginn T.R., Wood B.D., Nelson K.E., Scheibe T.D., Murphy E.M., Clement T.P.* Processes in microbial transport in the natural subsurface // *Advances in Water Resources*. 25. - 2002. - Pp. 1017-1042.
- [19] *Ryan J.N., Elimelech M.* Colloid mobilization and transport in groundwater // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 107. - 1996. - Pp. 1-56
- [20] *Leij F.L., Bradford S.A.* Colloid transport in dual-permeability media // *Journal of Contaminant Hydrology*. 150. - 2013. - Pp. 65-76.
- [21] *Bradford S.A., Bettahar M., Simunek J., van Genuchten M.Th.* Straining and attachment of colloids in physically heterogeneous porous media // *Vadose Zone Journal*. 3. - 2004. - Pp. 384-394.
- [22] *Хужаёров Б.Х.* Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. - Ташкент: Фан, 2012. – 280 с.
- [23] *Caputo M.* Models of flux in porous media with memory // *Water Resour. Res.* 36(3). - 2000. - Pp. 693-705.
- [24] *Fomin S. A., Chugunov V. A. and Hashida T.* Non-Fickian mass transport in fractured porous media // *Advances in Water Resources*. 34(2). - 2011. - Pp. 205-214.