УДК 519.2

МОДЕЛИРОВАНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПРИМЕНЕНИЯ ИХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

[1]***Расулов А. С.***, [1]***Бакоев М. Т.***, [2]***Утабов У.***

asrasulov@gmail.com; matyoqub.bakoyev@gmail.com; co-author@site.uz

[1]УМЭД,г.Ташкент, прос. Мустакиллик, 54.;

[2] НУУз, ВУЗ городок, Университет ул.4

В работе подробно рассматривается квази-случайные последовательности Холтона и Соболя [см.1-6] для вычисления многомерных интегралов и изучается поведения их отклонений (discrepancy). На примере вычисления конкретных интегралов исследованы трудоёмкость вычислений и даны некоторые рекомендации для построения оптимальных алгоритмов. А также сравнены трудоёмкость вычисления этих интегралов с использованием классического линейного конгруэнтного метода, крипто рандом функций и последовательностей чисел Фибоначчи. Численные эксперименты показывают что последователности Соболя и Холтона дают наилучший результат. В конце приведены результаты вычислений отклонений и других параметров от количесво испытаний в графическом виде.

Ключевые слова: Монте Карло метод, квази случайные последовательности, отклонения(discrepancy),многомерный интеграл

Цитирование: *Расулов А. С., Бакоев М. Т., Утабов У.* Моделирования псевдослучайных последовательностей и применения их для вычисления многомерных интегралов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 4(16). — С. 61–66.

1 Введение и постанока задачи

Рассмотрим простейший алгоритм Монте-Карло для вычисления n -мерного определенного интеграла

$$\int_{K^n} F(P)dP = \int_0^1 ... \int_0^1 F(y_1, \dots, y_2)dy_1...dy_n \tag{1}$$

по случайным точкам $P_i = (y_i^{(1)}, ..., y_i^{(n)})$ равномерно распределенным в K^n:

$$\int_{K^n} F(P)dP = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(P_i) \tag{2}$$

для всех функций Ф из достаточно широкого класса.

Как известно из теории чисел последовательность точек $P_1, \dots, P_i, \dots$ называется равномерно распределенной в K^n, если соотношение 2 справедливо для любой функции $F(y_1, \dots, y_n)$, интегрируемой в K^n по Риману. Напомним, что интеграл Римана определяется только для ограниченных функций. Однако Соболь доказал, что если выбрать в качестве P_i точки последовательности, то формула 2 справедлива также для функций $F(P)$ с любыми степенными особенностями вида $y_1^{-\beta_1}, \dots, y_n^{-\beta_n}$ где $\beta_1 < l, ..., \beta_n < l$. Обозначим через G произвольную n -мерную область, принадлежащую K^n, а через V_G — ее объем (n-мерный). Обозначим через $S_N(G)$ — количество точек с номерами $1 \leqslant$ ß $\leqslant N$ принадлежащих G. Выберем в K^n произвольную точку P и обозначим через W_p параллелепипед с диагональю OP (где O-начало координат) и со сторонами, параллельными координатным осям. Отклонением группы точек $P_1, \ldots, P_N$ называется величина (см. [3], [4])

$$D_N = sup_{P \in K^N} | \; S_n(W_p) - NV_{W_p} \|$$

Очевидно, чем быстрее убывает отношение $\frac{D_N}{N}$ тем более равномерно распределена последовательность. Можно доказать, что $\frac{1}{2} \leqslant D_N \leqslant N$, но неясно, каков наилучший порядок роста D_N при $N \to \infty$. В настоящее время известны лишь два класса последовательностей точек в K^n, для которых при всех N,

$$D_N = O(\ln^n N). \tag{3}$$

Это последовательности Холтона и LP_τ-последовательности Соболя. Существуют ли последовательности, для которых $D_N = O(\ln^n N)$ при всех N неизвестно. Однако последовательностей Соболя при $N = 2^m$ отклонение равно $D_N = O(\ln^{n-1} N))$.

Формула 2 справедлива для всех интегрируемых по Риману функций $F(y_1, ..., y_n)$. Если рассмотреть более узкие классы функций, то возможны более оптимальные оценки погрешности этой формулы. Например,используя неравенство Коксма Хлавки

$$| \int_{K^n} F(P)dP - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(P_i)| \leqslant c(F)D_N \tag{4}$$

где c(F)- функция вариации Харди Краузе, которая не зависить от N, и от точек P_i. Неравенство справедливо для любых $P_1, \ldots, P_N$ и для всех функций $F(y_1, ..., y_n)$, которые непрерывны и ограничены в K^n вместе со своими частными производными, содержащими не более одного дифференцирования по каждой переменной.

Для улучшения точности интегрирования обычно от псевдослучайных точек естественно потребовать, чтобы:

1 АсмптотикаD_N была наилучшей (или хотя бы близкой к наилучшей);
2 Константы в уравнениях 3 или в 4 были наилучшими (или хотя бы достаточно малыми);
3 Значения D_N были небольшими уже при небольших N;
4 Алгоритм расчета этих точек на ЭВМ был достаточно простым.

2 Численный эксперимент

Приведём результаты вычисления следующего интеграла

$$\iiint_{K^3} e^x \sin x(10y + 10z)dV = -0.0343826$$

здесь K^3 трехмерный единичный куб. Используя обычный метод генерирование псевдослучайный чисел, линейный конгруэнтный метод и метод Фибоначчи и псевдослучайный последовательность Холтона и LP_τ-последовательность Соболя, вычислен заданный интеграл, отклонение D_N для равномерной сетки шагом h=0.01 в K^3.

		ЛП$_\tau$ −последовательность			Последовательность Холтона		
Крит. К-С	K^+	0,0132293	0,00703329	0,00772504	0.013293	0.174679	0.00968922
	K^-	0,00261876	0,00942198	0,00873023	0.00261876	0.00229182	0.00126491
χ^2крит.		0.0014	0.0004	0.001	0.0014	0.0026	0.0016
χ^2крит.по кубу		0.0867548			0.0738841		
Дисперсия		1.59397			1.59429		
Отклонения D_N		0,000145			0.00017		
Интеграл I		-0.0343845			-0.0342701		

		Линейный конгруэнтный метод (ЛКМ)			Метод Фибоначчи основанный на ЛКМ		
Крит. К-С	K^+	0.254476	0.292374	1.9618	0.796993	0.684633	0.318418
	K^-	0.127488	0.521464	0.41849	0.85829	0.410392	0.611126
χ^2крит.		0.443	5.203	35.3626	21.5026	10.348	5.8704
χ^2крит.по кубу		7.12348			10.0084		
Дис.		1.59138			1.58882		
Отклонения D_N		0,006234			0.00351		
Интеграл I		-0.0350408			-0.0404507		

Истинное значение дисперсии равно $D = 1.59415$. Результаты вычислительного эксперимента приведены в рис. 1. В рис.3 даётся график изменений математических ожиданий, дисперсию и отклонений вычисленный по этим последовательностям зависяшим от количество испытаний N. Здесь $I(x) = -0.03438...$ -точное значения интеграла, $\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$ соответственно верхние и нижние границы значений доверителного интервала (три сигмы), $M1(x), M2(x), M3(x), M4(x)$ (рис.2) и $DN1(x)$, $DN2(x)$, $DN3(x)$, $DN4(x)$ -соответственно математическое ожидание и отклонение (см. рис. 4) для последовательностей Соболья, Холтона, линейной конгруэнтной последовательности и последовательность образованной по методу Фибоначчи.

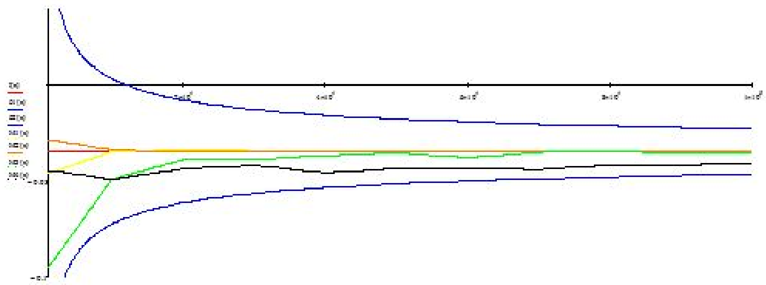

Рис. 1

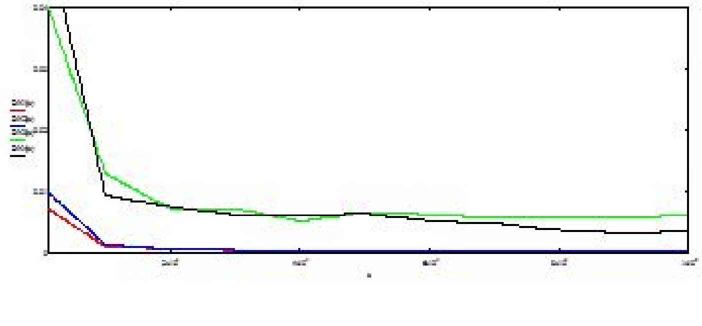

Рис. 2

Далее приводим результат вычисления 5 кратного интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^x (u^4 + v^3) \sin(10y^2 + 10\sqrt{z}) dxdydzdudv = 0.006130209$$

с применением последовательностей Соболья и Холтона и для сравнения в качестве

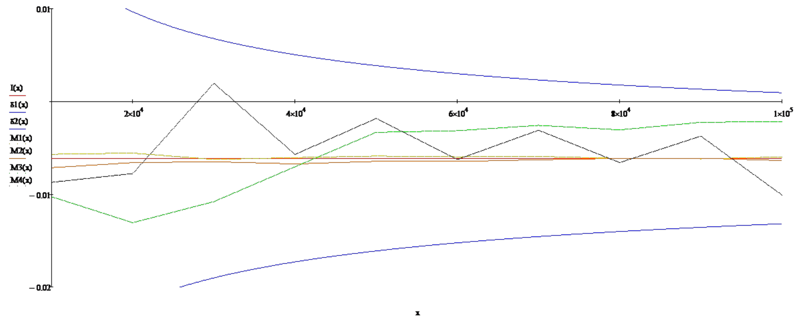

Рис. 3

псевдослучайных чисел использованы обычный датчик в $C++$ и крипто рандом функция в C♯. Результаты вычислений приведем в виде графика без тестов и отклонений в Рис. 5.

Результаты вычислительного эксперимента (см. Рис. 5) при вычисления многократных интегралов показывают построенные нами квази случайные последовательности по алгоритму Холтона и Соболя дают наименьшую ошибку (см. [5]). А последовательности, полученные с использованием крипто рандом функций, даёт почти минимальную ошибку. Худший результат даль обычный датчик C++ и последовательности Фиббоначчи. Конечно можно ускорить сходимость, путём замены меры и тем самым используя известные методы уменьшения дисперсию. Методы Монте-Карло они вполне себе могут сравниться другими вычислительными методами особенно тогда когда решаются многомерные задачи когда вычислительный объем чрезвычайно большой (см. [6]). В последнее время особенно часто применяют методы Монте-Карло в финансовой математике, где поведения стоимости ценных бумаг рынка описывается именно случайными процессами.

3 Заключение

В отличие от псевдослучайных чисел, квази случайные числа (последовательности с малыми отклонениями) настроены на определённую размерность интеграла. Со статистической точки зрения квази случайные числа сильно коррелированны и в задачах моделирования должны использоваться с осторожностью. Таким образом, последовательности квази случайных чисел обладают следующими полезными свойствами (преимуществами):

1 Позволяют вычислять интегралы по единичному s-мерному гиперкубу при фиксированном s с погрешностью порядка $\ln^s N/N$ от широкого класса функций.

2 Обладают улучшенными по сравнению с квази случайными числами свойствами равномерной распределённости, что может быт очень важным для общих методов глобальной оптимизации.

Поскольку квази случайные последовательности имеют некоторые свойства, сходные со свойствами случайных чисел (аналог закона больших чисел), можно попробовать применить к ним формально статистические процедуры оценивания погрешности что и планируется в будушем.

Литература

[1] *Halton J.H.* On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numer. Math., 1960, 2, № 2, 84—90.

[2] *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. , «Наука», 1973.

[3] *Caflisch R.E.* Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods, Acta Numerical (1998) 1-49

[4] *Morokaff W.J., Caflisch R.E.* Quasi Monte Carlo Integration, J.Copm. Phys. 122 (1995) 218-230

[5] *Sobol I.M., Shukhman B.V.* Quasi-Monte Carlo: A high-dimensional experiment. Journal Monte Carlo methods and applications, 2014, vol. 3 issue 3 DOI: https://doi.org/10.1515/mcma-2013-0022.

[6] *Ermakov S.M., Leora S.N.,* Remarks on randomization of quasi-random numbers. Journal Monte Carlo methods and applications, 2018, vol. 24 issue 2 URL:DOI:http://doi.org/10.1515/mcma-2018-0012

Поступила в редакцию 09.07.2018

UDC 519.2

MODELING OF PSEUDORANDOM SEQUENCES AND THEIR APPLICATION TO THE CALCULATION OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRALS

[1]***Rasulov A. S.***, [1]***Bakoyev M. T.***, [2]***Utabov U.***

asrasulov@gmail.com; matyoqub.bakoyev@gmail.com; co-author@site.uz

[1]UWED, 54 Mustakillik Ave.; [2], NUUZ,VUZ gorodok, 4 Universitet str.

In this work we consider two quasi-random Sobol and Halton sequences for calculation multidimensional integrals and studied its discrepancy [see. 1-6]. The complexity of calculation algorithms were compared for concrete problems and have given some recommendations to applications. For calculations integrals we also applied pseudo number generators like linear congruential method (LCM), crypto random method and Fibonacci sequences. Calculation experiments show Sobol and Halton sequences gives best results. The value of discrepancy were numerically evaluated and their behaviours presented graphically.

Keywords: Monte Karlo methods, quasi-random sequences, discrepancy, multidimensional integral

Citation: Rasulov A. S., Bakoyev M. T., Utabov U. 2018. Modeling of pseudorandom sequences and their application to the calculation of multidimensional integrals. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(16): 61–66.

References

[1] Halton J.H. *On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numer. Math., 1960, 2, N 2, 84-90.*

[2] Sobol. M. *Chislennie metodi Monte-Karlo.* «Nauka», 1973.

[3] Caflisch R.E. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods", Acta Numerical (1998) 1-49*

[4] Morokaff W.J., Caflisch R.E. *Quasi Monte Carlo Integration", J.Copm. Phys. 122 (1995) 218-230*

[5] Sobol I.M., Shukhman B.V., *Quasi-Monte Carlo: A high-dimensional experiment. Journal Monte Carlo methods and applications*, 2014, vol. 3 issue 3 URL:`DOI:http://doi.org/10.1515/mcma-2013-0022`.

[6] Ermakov S.M., Leora S.N., *Remarks on randomization of quasi-random numbers.*, *Journal Monte Carlo methods and applications*, 2018, vol. 24 issue 2 URL:`http://doi.org/10.1515/mcma-2018-0012`

Received 09.07.2018