УДК 519.2

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Бакоев М.Т.

`matyokub.bakoev@gmail.com`

Университет мировой экономики и дипломатии,

Ташкент, прос. Мустакиллик, 54.

В данной статье рассматривается уравнение Колмогорова в многомерном пространстве. Для начально-краевой задачи, используя алгоритмы случайного блуждания, строятся несмещенные и смещенные оценки решения, доказывается конечность дисперсий полученных оценок. Приводятся численные результаты.

Ключевые слова: Уравнения Колмогорова, теорама о среднем,фундаментальное решение, шароида, Марковский цепь, несмещенная оценка

Цитирование: *Бакоев М.Т.* Решение смешанной задачи для уравнения Колмогорова // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 2(20). — С. 60–70.

1 Введение и постанока задачи

Пусть $D = \{x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_k > 0, -\infty < x_{k+1} < +\infty - \infty < x_{k+2} < + +\infty ..., -\infty < x_{2k} < +\infty\} \subset R^{2k}$ - ограниченная область с границей $\partial D = \{x_1 = = 0, x_2 = 0, ..., x_k = 0, -\infty < x_{k+1} < +\infty - \infty < x_{k+2} < +\infty ..., -\infty < x_{2k} < + +\infty\}$ $x = (x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{2k}), \Omega = Dx[0, T]$. Для функций $f(x, t)$, $f_1(x, t)$, $f_2(x)$ и $u(x, t) \in C(Dx[0, \infty)) \cap C^{1,2}(Dx[0, \infty))$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_{k+i}} = f(x,t), (x,t) \in \Omega\} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f_2(x), x \in \overline{D} \tag{2}$$

и граничным условием

$$u(x, t) = f_1(x, t), x \in \partial D, t \in [0, \infty) \tag{3}$$

Пусть выполняеться условия согласование $f_1(x, 0) = f_2(x)$ for $x \in \partial D$.

2 Моделирование и построений несмещенные и смещенные оценки решения задачи

Основой для построение является формула параболического среднего. Пусть $x = = (x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_m), m = 2k$. Введем матрицы размера mxm и будем разбивать их горизонталями и вертикалями на квадратичные блоки размера kxk, число таких блоков равно 4. Эти матрицы в блочной записи имеют следуюший вид.

$$\alpha = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_k & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 4I_k & -2I_k \\ -2I_k & \frac{4}{3}I_k \end{pmatrix}, d(\rho) = \begin{pmatrix} \rho^{\frac{1}{2}} I_k & 0 \\ 0 & \rho^{\frac{3}{2}} I_k \end{pmatrix}$$

где I_k -единичная матрица размера kxk,$d(\rho)-$ диогональная матрица, матрица a является симметрицной и положительно определенной поэтому ее можно представить в виде $a = b^T b$, где $b-$ невырожденная матица, $T-$операция транспонирования. Пусть

$$L(x,t;y,\tau) = d(\frac{1}{t-\tau})y - e^{-\beta} d(\frac{1}{t-\tau})x$$

и $Z(x,t;y,\tau)$ фундаментальное решение уравнения (1), тогда , как показано в [1],[2] оно имеет следуюший вид

$$Z(x,t;y,\tau) = \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-m} \exp\{-(L(x,t;y,\tau))^T aL(x,t;y,\tau)\}$$

где $\|a\|-$ определитель матрици a , $e^{-\beta} = I_m - \beta-$ экспонента матрицы $-\beta$. С помощью фундаментального решения определим область $Q_r(x,t)$,которую назовем шароидом, а $\partial Q_r(x,t)$-сфероидом, где $r > 0$ некоторий параметр имеюший смысль радиуса

$$Q_r(x,t) = \{(y,\tau) : Z(x,t;y,\tau) > \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}\} =$$
$$\{(y,\tau) : (d(\frac{1}{t-\tau})y - e^{-\beta} d(\frac{1}{t-\tau})x)^T a(d(\frac{1}{t-\tau})y - e^{-\beta} d(\frac{1}{t-\tau})x) < m \ln \frac{r^2}{t-\tau}, \tau < t\}$$

Из опрделения видно, что τ удовлетворяет слдуюшему условию $t - r^2 < \tau < t$. Каждое сечение шароида горизонтальной плостькостью $\tau = const$ является m-мерным элипсоидом с центром в точк $(e^{(t-\tau)\beta}x, \tau)$ при изминения $\tau \in (t-r^2, t)$ эта точка движется по кривой $(e^{(t-\tau)\beta}x, \tau)$,соединяющей самую нижнюю точку шароида $(e^{r^2\beta}x, t - r^2)$ самой верхней точкой (x,t), так что центр шароида на самом деле лежить на его границе (на сфероиде). При таком движении эллипсоид изменяет свои размеры,врашается и вырождается в нижнем и верхнем положениях. Если $\rho < r$ то $Q_r(x,t) \subset Q_\rho(x,t)$ и центр шароида лежит на сфероиде, при $r \to 0$ $Q_r(x,t)$ и $\partial Q_r(x,t)$ монотонно стягивается к центру (x,t). Поэтому существует такое $r > 0$, что при $(x,t) \in \Omega, Q_r(x,t) \subset \Omega$. Пусть $r > 0$ такое, что $Q_r(x,t) \subset \bar{\Omega}$ тогда для решения задачи справедлива следуюшая формула

$$u(x,t) = (E_r u)(x,t) + \iint\limits_{Q_r(x,t)} [Z(x,t;y,\tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}] f(y,\tau) dy d\tau \qquad (4)$$

где

$$(E_r u)(x,t) = (\frac{2m}{\pi})^{\frac{m}{2}} \int\limits_0^1 \lambda^{2m-1} (\ln \frac{1}{\lambda})^{\frac{m}{2}} \iint\limits_{S_1(0)} u(y(\lambda), \tau(\lambda)) H^T(\theta) 4bab^T H(\theta) ds,$$

здесь $S_1(0) - (m-1)-$ мерная единичная сфера с обычными ортогональными координатами $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$, $H(\theta) \in S_1(0) - m-$ мерный единичный вектор,

$$y(\lambda) = e^{-r^2\lambda\beta}x + (2m \ln \frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{2}} d(r^2\lambda^2) b^{-1} H(\theta)$$
$$\tau(\lambda) = t - r^2\lambda^2$$

Пусть $R(x)-$ расстояние от точки x до границы D, $|x|_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2$, $R1(x)-$ расстояние от точки $e^{-r^2\beta}x$ до границы D,

$$r_1(x) = (\frac{R(x)}{|x|_k})^{\frac{1}{2}}, r_2(x) = \{2sh(\frac{1}{3} Arcsh(\frac{3eR1(x)^2}{(8m)}))\}.$$

Лемма 1. *Если* $r = r(x,t) = \min\{r_1(x), r_2(x), t^{\frac{1}{2}}\}$, *то* $Q_r(x,t) \subset \Omega$ *для* $(x,t) \in \Omega$.
Доказатеьство. Из $\lambda \in (0,1)$ и $t - \lambda^2 r^2 \geqslant 0$ следует, что $r \leqslant t^{\frac{1}{2}}$. В начале проверим условие , при котором точка $e^{-r^2\beta}x$ находиться внутри области D,рассмотрим растояние от точки x до точки $e^{-r^2\beta}x$

$$\left|x - e^{-\lambda^2 r^2 \beta}x\right|^2 = \left(\lambda^2 r^2\right)^2 \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2\right) \leqslant r^4 \left|x\right|_k^2 \leqslant R^2(x)$$

Отсюда следует, что $r \leqslant \left(\frac{R(x)}{|x|_k}\right)^{\frac{1}{2}} = r_1(x)$

Далее найдем условие , при котором точка $y(\lambda)$ принадлежить D.

$$\left|y(\lambda) - e^{-\lambda^2 r^2 \beta}x\right| = \left|\left(2m\ln(\frac{1}{\lambda})\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\lambda^2 r^2\right) b^{-1} H(\theta)\right|^2 =$$

$$2m\ln(\frac{1}{\lambda}) \left|d\left(\lambda^2 r^2\right) b^{-1} H(\theta)\right|^2 =$$

$$2m\lambda^2 r^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) (4\left|H(\theta)\right|_k^2 + (\lambda r)^4 ((\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}H_{k+1}(\theta) - H_1(\theta))^2 + (\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}H_{k+2}(\theta) - H_2(\theta))^2 +$$

$$+ ... + (\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}H_{2k}(\theta) - H_k(\theta))^2)) \leqslant$$

$$2m\lambda^2 r^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(4\left|H(\theta)\right|_k^2 + \frac{4}{3}(\lambda r)^4\right) \leqslant 8m\lambda^2 r^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1 + \lambda r^4\right)$$

Пусть $g(\lambda) = \lambda^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, тогда $\max g(\lambda) = g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e^{-1}}{2}$

$$8m\lambda^2 r^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1 + \lambda r^4\right) \leqslant 4me^{-1}r^2\left(1 + \frac{r^4}{3}\right) \leqslant R1^2(x)$$

или

$$r^6 - 3r^2 - \frac{3eR1^2(x)}{4m} \leqslant 0$$

Решив неравенство получим

$$r \leqslant \left(2sh(\frac{Arcsh(\frac{3eR1^2(x)}{8m})}{3})\right)^{\frac{1}{2}} = r_2(x).$$

Таким образом, если $r = r(x,t) = \min\{r_1(x), r_2(x), t^{\frac{1}{2}}\}$, то $Q_r(x,t) \subset \Omega$ for $(x,t) \in \Omega$. Лемма доказана.

Приступим к построению Марковской цепи $\{(x^j, t^j)\}_{j=0}^{\infty}$ на траекториях которой будем строить несмещенную оценку решения $u(x,t)$ задачи (1)-(3). Взяв $u(x,t) = 1$, легко показать, что

$$1 = (\frac{2m}{\pi})^{\frac{m}{2}} \int\limits_0^1 \lambda^{2m-1}(\ln\frac{1}{\lambda})^{\frac{m}{2}} d\lambda \iint\limits_{S_1(0)} H^T(\theta) 4bab^T H(\theta) ds,$$

Отсюда следует, что ядро интегрального уравнения (4) можно рассматривать как плотность распределения. Рассмотрим интеграл

$$J = (2m)^{\frac{m}{2}} \int\limits_0^1 \lambda^{2m-1} (\ln \frac{1}{\lambda})^{\frac{m}{2}} d\lambda$$

Сделав $\lambda = e^{\frac{-z}{2m}}$ замену переменных , получим

$$J = \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{m}{2}} dz = \frac{G(1+\frac{m}{2})}{2m}$$

Известно, что функция $\frac{e^{-z} z^{\frac{m}{2}} dz}{G(1+\frac{m}{2})}$ является плотностью распределения гамма-распределенной случайной величины с параметром $\left(1+\frac{m}{2}\right)$.

Известно, что одно из представлений матрицы b удовлетворяюшей соотношению $a = b^T b$ имеет следуюший вид

$$b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 3^{\frac{1}{2}} I_k & 2\,(3)^{\frac{1}{2}}\, I_k \end{pmatrix}$$

Тогда

$$H^T bab^T H = \sum_{i=1}^{k} \left(H_i + 3^{\frac{1}{2}} H_{k+i} \right)^2 .$$

Смоделируем случайный вектор с плотностью распределения

$$P(H) = P(H_1, H_2, ..., H_m) = \frac{1}{2\sigma_m} (\sum_{i=1}^{k} (H_i + 3^{\frac{1}{2}} H_{k+i})^2) \chi_{S_1(0)}(H)$$

где $\chi_S(H)-$ индикатор множества S,σ_m-плошадь поверхности m-мерной единичной сферы. Так как $H_1, H_2, ..., H_{2k}$ является координатами единичного вектора справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} (H_i + 3^{\frac{1}{2}} H_{k+i})^2 \leqslant 4$$

Следовательно можно моделировать случайный вектор методом Неймана.

Алгоритм

1. Моделируется $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) -$ изотропный вектор и $\gamma-$ равномерно распределенная в $(0,1)$ случайная велина.
2. $\eta = 4\gamma$
3. Если $\sum_{i=1}^{k} (\omega_i + 3^{\frac{1}{2}} \omega_{k+i})^2 \geqslant \eta$ то ω принимается, иначе повторять с пункта 1)

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ последовательность независимых гамма -распределенных случайных величин с параметром $\left(1+\frac{m}{2}\right)$, $\{\omega^j\}_{j=1}^{\infty} -$ последовательность независимых векторов с плотностью распределения $P(H)$.

Определим цеп Маркова в $\overline{\Omega}$ следуюшими рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} & x^0 = x, t^0 = t \\ & t^j = t^{j-1} - r_{j-1}^2 \exp(-\frac{\xi_j}{m}) \\ & x_i^j = x_i^{j-1} + 2r_{j-1} \exp\left(\frac{-\xi_j}{m}\right) \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_i^j \end{aligned} \tag{5}$$

$$x_{k+i}^j = x_{k+i}^{j-1} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} r_{j-1}^3 \exp(\frac{-3\xi_j}{2m}) \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_{k+i}^j - r_j^2 \exp(-\frac{\xi_j}{m}) x_i^{j-1} - r_{j-1}^3 \exp(-\frac{3\xi_j}{2m}) \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_i^j,$$

где $i = 1, 2, ..., k; j = 1, 2, ...; r_{j-1} = r(x^{j-1}, t^{j-1})$

Тепер формулу (4) мы можем записать следующем виде

$$\begin{gathered} u\left(x^n, t^n\right) = E_{(x^n, t^n)} u(x^{n+1}, t^{n+1}) + \\ + \iint_{Q_r(x^n, t^n)} f\left(y, \tau\right) \left[Z\left(x^n, t^n; y, \tau\right) - \pi^{-\frac{m}{2}} \left|a\right|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}\right] dy d\tau \end{gathered} \tag{6}$$

Лемма 2. *Марковский цепь* $\{(x^n, t^n)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится при* $n \to \infty$ *с вероятностью 1 к случайной точке* $(x^{\infty}, t^{\infty}) \in \partial\Omega = (\partial D \times [0, t)) \, U(\partial\overline{D} \times \{0\})$

Доказательство. Из (5) видно ,что поледовательность $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}-$ убывающая, кроме того $t^n \geqslant 0$. Значить при $n \to \infty$ она имеет предел $t_{\infty} = \lim t_n$. Пусть U_n $-$ σ-алгебра , порожденная случайными величинами $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ и векторами $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Тогда координаты векторного процесса $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ограниченный мартингал относительно $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Из определения U_n и формулы (5) видно, что x_n является U_n-измеримой. $E(x_{n+1}/U_n) = E$. Поэтому процесс $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится с вероятносью 1. Пусть $(x^{\infty}, t^{\infty}) = \lim\limits_{n\to\infty} (x^n, t^n)$. Покажем, что $(x^{\infty}, t^{\infty}) \in \partial\Omega$. Если $t^{\infty} = 0$, то это очевидно. Пуст $t^{\infty} > 0$, тогда

$$E_{(x,t)} \left|x^{n+1} - x^n\right| \leqslant const \times E_{(x,t)} r(x^n, t^n)$$

Пользуясь непрерывностью $r(x, t)$ и применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $E_{(x,t)} r(x^{\infty}, t^{\infty}) = 0$.Значить $r(x^{\infty}, t^{\infty}) = 0$ п.н., Из определения $r(x, t)$ имеем $R(x^{\infty}) = 0$ и $x^{\infty} \in \partial D$. Лемма доказанно .

Определим последовательность случайных величин $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ следуюшим равенством

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} h(x^k, t^k) f(y^k, \tau^k) + u(x^n, t^n)$$

где

$$h(x, t) = \iint_{Q_r(x,t)} \left[Z\left(x, t; y, \tau\right) - \pi^{-\frac{m}{2}} \left|a\right|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}\right] dy d\tau$$

и $\left(y^k, \tau^k\right)$ случайный точка шароида при фиксированном (x^k, t^k) имеющая плотность распределения

$$\frac{Z\left(x^k, t^k; y, \tau\right) - \pi^{-\frac{m}{2}} \left|a\right|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}}{h(x^k, t^k)}$$

Взяв $u(x, t) = t$ и применив формулу (6) для $j = 1$ и из (5) получим

$$h(x, t) = r^2(x, t) E \exp(\frac{\xi}{m}) = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{1+\frac{m}{2}} r^2(x, t). \tag{7}$$

Пусть $\{\mathrm{Im}_i\}_{l=0}^{\infty}$ последовательность σ-алгебр, порожденная случайными величинами $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, последовательностью векторов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ и случайными точками $\left(y^0, \tau^0\right), \left(y^1, \tau^1\right), ..., \left(y^{l-1}, \tau^{l-1}\right)$, $u_{f, f_1, f_2(x,t)}$ решение задачи (1)-(3) отвечающим данным $f(x, t)$, $f_1(x, t)$, $f_2(x)$.

Теорема 1. *a) Последовательность* $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* σ*-алгебры* $\{\mathrm{Im}_i\}_{l=0}^{\infty}$

b) Если $u_{f^2,0,0}(x, t) < \infty$ *и* $u_{|f|,0,0}(x, t) < \infty$ *то* $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является квадратично интегрируемый мартингал.*

Доказательство. Используя свойство условных математических ожиданий и формулы (6) получим

$$E_{(x,t)}\left(\eta_{l+1}/\operatorname{Im}_l\right) = E_{(x,t)}\left(\sum_{k=0}^{n} h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k) + u(x^{n+1},t^{n+1})/\operatorname{Im}_l\right) =$$

$$= E_{(x,t)}\left(\sum_{k=0}^{n-1} h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k)/\operatorname{Im}_l\right) + E_{(x,t)}h(x^n,t^n)f(y^n,\tau^n)/\operatorname{Im}_l +$$

$$+E_{(x,t)}u(x^{n+1},t^{n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k) + u(x^n,t^n) = \eta_n$$

Отсюда следеут, что $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{\operatorname{Im}_l\}_{l=0}^{\infty}$.

b) Докажем, что $E_{(x,t)}\eta^2 < \infty$ Достаточно показать, что

$$I = E_{(x,t)}\left(\sum_{k=0}^{n-1} h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k)\right)^2 < \infty$$

$$I = E_{(x,t)}\sum_{k=0}^{n-1} h^2(x^k,t^k)f^2(y^k,\tau^k) + 2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1} h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k)h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)$$

Разбивая I на две слагаемых $I = I_1 + I_2$ покажем конечности I

$$I_1 = E_{(x,t)}\sum_{k=0}^{n-1} h^2(x^k,t^k)f^2(y^k,\tau^k) \leqslant$$

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\left(1+\frac{m}{2}\right)} tE_{(x,t)}\sum_{k=0}^{n-1} h(x^k,t^k)f^2(y^k,\tau^k) \leqslant$$

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\left(1+\frac{m}{2}\right)} tu_{f^2,0,0}\,(x,t) < \infty$$

$$I_2 = 2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1} h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k)h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j) \leqslant$$

$$2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=j+1}^{n-1} h(x^k,t^k)|f(y^k,\tau^k)|h(x^j,t^j)|f(y^j,\tau^j)| \leqslant$$

$$2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{n-2} h(x^j,t^j)|f(y^j,\tau^j)|u_{|f|,0,0}\,(x,t) \leqslant$$

$$2(\max_{x\in\overline{D},\tau<t} u_{|f|,0,0}(x,\tau)E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{n-2} h(x^j,t^j)|f(y^j,\tau^j)| \leqslant$$

$$2(\max_{x\in\overline{D},\tau<t} u_{|f|,0,0}(x,\tau)u_{|f|,0,0}(x,t) < \infty$$

Таким образом $E_{(x,t)}\eta^2 < \infty$. Теорема доказано.

Для численной реализации оценки η_n неоходимо оценить значение следуюшего интеграла [см. 3,4]

$$\overline{f}(x,t) = \iint_{Q_r(x^n,t^n)} f\left(y,\tau\right)\left[Z\left(x^n,t^n;y,\tau\right) - \pi^{-\frac{m}{2}}\left|a\right|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}\right] dyd\tau$$

Лемма 3. *Функцию $\overline{f}(x,t)$ можно представить в виде математического ожидания*

$$\overline{f}(x,t) = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{1+\frac{m}{2}} r^2 E_{(x,t)} f\left(y\left(\xi,\zeta,\omega\right),\tau\left(\xi,\zeta\right)\right)$$

где

$$y\left(\xi,\zeta,\omega\right) = e^{-r^2\exp(-\frac{\xi}{m+1})\zeta^{\frac{1}{m}}\beta}x + \left(\frac{m\zeta}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(r^2\exp\left(-\frac{\xi}{m+1}\right)\zeta^{\frac{1}{m}}\right)b^{-1}\omega,$$

$$\tau\left(\xi,\zeta\right) = t - r^2\exp\left(-\frac{\xi}{m+1}\right)\zeta^{\frac{1}{m}},$$

Здесь ξ гамма-распределенная случайная величина с параметром $\left(\frac{m}{2}\right)$, ζ бета распределенная случайная величина с параметром $\left(\frac{m}{2},2\right)$ и ω изотропный единичный вектор в R^m.

Доказательство. Введем область

$$Q_r = \left\{(y,\tau) : y^T d\left(\frac{1}{\tau}\right) y < m\ln\left(\frac{r^2}{\tau}\right), \tau > 0\right\}$$

Тогда имеем

$$\overline{f}(x,t) = \frac{\|a\|}{\pi^{\frac{1}{2}}r^{2m}}\iint\limits_{Q_r}\left[\exp\left(-y^T d\left(\frac{1}{\tau}\right) ad\left(\frac{1}{\tau}\right)y\right) - 1\right] f\left(e^{-\tau\beta}x + y, t-\tau\right) dyd\tau$$

Сделаем в этом интеграле замену переменныхъ интегрирования (y,τ) на (ρ,λ,θ) по формулам

$$y = \left(2m\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} d\left(\lambda^2\rho^2\right) b^{-1} H\left(\theta\right),$$

$$\tau = t - \lambda^2\rho^2$$

Несложные вычисления показывает, что

$$dyd\tau = \|a\|^{-\frac{1}{2}}\left(2m\right)^{\frac{m}{2}}\lambda^{2m+1}\left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{m}{2}-1} d\rho d\lambda ds$$

$$r^{2m}\tau^{-m}\exp\left(-y^T d\left(\frac{1}{\tau}\right) ad\left(\frac{1}{\tau}\right)y\right) = r^{2m}\rho^{-2m}$$

область интегрирования переобразуется в $\left(0 \leqslant \rho \leqslant r\right) x \left(0 \leqslant \lambda \leqslant 1\right) x S_1\left(0\right)$. Отсюда, получим

$$\overline{f}(x,t)=\frac{(2m)^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{m}{2}}r^{2m}}\int\limits_0^r\rho\left(r^{2m}-\rho^{2m}\right)d\rho\int\limits_0^1\lambda^{2m+1}\left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{m}{2}-1}*$$

$$*\iint\limits_{S_1(0)}f\left(e^{-\lambda^2\rho^2\beta}x+\left(2m\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\rho^2\lambda^2\right)b^{-1}H(\theta),t-\lambda^2\rho^2\right)ds$$

Сначала во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $\lambda=e^{-\frac{z}{2(m+1)}}$, затем во внешнем интеграле $\rho=v^{\frac{1}{2m}}r$, тогда получим

$$\overline{f}\left(x,t\right)=$$

$$\frac{r^2}{2m\pi^{\frac{m}{2}}}c_m\int\limits_0^1v^{\frac{1}{m}}\left(1-v\right)dv\int\limits_0^\infty e^{-z}z^{\frac{m}{2}-1}dz\iint\limits_{S_1(0)}f\left(y\left(z,v,H(\theta)\right),\tau\left(z,v\right)\right)ds=$$

$$r^2c_m\int\limits_0^1\frac{v^{\frac{1}{m}}\left(1-v\right)}{B\left(\frac{1}{m},2\right)}dv\int\limits_0^\infty\frac{e^{-z}z^{\frac{m}{2}-1}}{G\left(\frac{m}{2}\right)}dz\iint\limits_{S_1(0)}\frac{1}{\sigma_m}f\left(y\left(z,v,H(\theta)\right),\tau\left(z,v\right)\right)ds=$$

$$r^2c_m\int\limits_0^1P_1\left(v\right)dv\int\limits_0^\infty P_2(z)dz\iint\limits_{S_1(0)}P_3(H(\theta))f\left(y\left(z,v,H(\theta)\right),\tau\left(z,v\right)\right)ds=$$

$$r^2c_mE_{(x,t)}f\left(y\left(\xi,\zeta,\omega\right),\tau\left(\xi,\zeta\right)\right)$$

Где ξ -случайная величина с плотностью расределения $P_2(z)=\frac{e^{-z}z^{\frac{m}{2}-1}}{G\left(\frac{m}{2}\right)}$ (гамма-распределения), ζ -случайная величина с плотностью распределения $P_3(z)=\frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v)}{B\left(\frac{1}{m},2\right)}$ (бетта -распределения, B(.,.)-бетта функция) , ω случайный вектор с плотностью $P_3(H)=\frac{1}{\sigma_m}$, ($\sigma_m=\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{G(\frac{m}{2})}$)– поверхность единичной сферы Лемма доказана. Вычислительно реализуемая оценка строится следуюшим образом. Пусть ε -достаточно мало ,

$$\left(\partial\Omega\right)_\varepsilon=\left(Dx\left[0,\varepsilon\right]\right)\cup\left(\left(\partial D\right)_\varepsilon x\left[0,t\right]\right)$$

внутренная ε -окрестность границы и N_ε момент первого попадания процесса на $\left(\partial\Omega\right)_\varepsilon$,

$$N_\varepsilon=\min\left\{n:\left(x^n,t^n\right)\in\left(\partial\Omega\right)_\varepsilon\right\}$$

$R2$ наибольшее растояние от начало координат до границы области D.

$$\theta\left(\varepsilon\right)=\min\left\{\frac{\varepsilon^2}{R2},\left(2sh\left(\frac{1}{3}Arcsh\left(\frac{3e\varepsilon^2}{8m}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}},\varepsilon\right\}$$

Лемма 4

$$E_{(x,t)}N_\varepsilon\leqslant\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{1+\frac{m}{2}}t}{\theta\left(\varepsilon\right)}$$

Доказательство. Взяв $u\left(x,t\right)=t$ и применив формулы (6) и (7) получим

$$t=u_{1,t,0}\geqslant E_{(x,t)}\sum_{j=1}^{N_\varepsilon-1}h\left(x^j,t^j\right)=\frac{m}{m+1}^{1+\frac{m}{2}}E_{(x,t)}\sum_{j=1}^{N_\varepsilon-1}r^2\left(x^j,t^j\right)$$

Из определения $r\left(x,t\right)$ получим

$$r^2\left(x^j,t^j\right)=\min\left\{r_1^2\left(x^j\right),r_2^2\left(x^j\right),t^j\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\min\left\{\frac{\varepsilon^2}{R2},\left(2sh\left(\frac{1}{3}Arcsh\left(\frac{3e\varepsilon^2}{8m}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}},\varepsilon\right\}=\theta\left(\varepsilon\right)$$

отсюда, получим

$$t\geqslant\left(\frac{m}{m+1}\right)^{1+\frac{m}{2}}\theta\left(\varepsilon\right)E_{(x,t)}N_\varepsilon$$

или

$$E_{(x,t)}N_\varepsilon\leqslant\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{1+\frac{m}{2}}t}{\theta\left(\varepsilon\right)}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Случайная величина η_{N_ε} является несмещенной оценкой с конечной дисперсией для $u\left(x,t\right)$.*

Из равномерной интегрируемости η_{N_ε}, конечности N_ε и формулы (10) следует

$$E_{(x,t)}\eta_{N_\varepsilon}=E_{(x,t)}\eta_1=u\left(x,t\right)$$

Из определения η_{N_ε} и η_∞ следует , что $D\eta_{N_\varepsilon}\leqslant D\eta_\infty$. Так как

$$E\eta_\infty^2\leqslant c_m t u_{f^2,0,0}\left(x,t\right)+2\left(\max_{\overline{x}\in\overline{D},\tau<t}u_{|f|,0,0}\left(x,\tau\right)\right)u_{|f|,0,0}\left(x,t\right)+u_{0,f_1^2,f_2^2}\left(x,t\right)+$$
$$+u_{|f|,0,0}\left(x,t\right)u_{0,f_1,f_2}\left(x,t\right),$$

Пусть (x^*,t^*) ближайшая точка границы к точке (x,t), $\psi(x,t)=f_2\left(x\right)$ если $t=0$ и $\psi\left(x,t\right)=f_1\left(x,t\right)$ если $\left(x,t\right)\in\left(\partial D\right)_\varepsilon x\left[0,t\right]$. Заменив $u\left(x^{N_\varepsilon},t^{N_\varepsilon}\right)$ на $\psi\left(x^{*N_\varepsilon},t^{*N_\varepsilon}\right)$ в η_{N_ε} получим сещенная но практически реализумая оценка для $u(x,t)$ η_ε которого конечно .

$$\eta_{N_\varepsilon}=\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k)+u(x^{N_\varepsilon},t^{N_\varepsilon})$$

$$\eta_{N_\varepsilon}^*=\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}h(x^k,t^k)f(y^k,\tau^k)+\psi(x^{*N_\varepsilon},t^{*N_\varepsilon})$$

Если $u\left(x,t\right)$ удовлетворяет условию Липщица

$$\left|u\left(x,t\right)-u\left(y,\tau\right)\right|\leqslant A\left(\left|x-y\right|^2+\left|t-\tau\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

тогда смешение не перевосходит $A\varepsilon$. Таким образом

$$\left|u\left(x,t\right)-\eta_{N_\varepsilon}^*\right|\leqslant A\varepsilon$$

и

$$D\eta^*_{N_\varepsilon} \leqslant D\eta_{N_\varepsilon} + 8A^2\varepsilon.$$

3 Алгоритм и численные результаты

1. Ввести точку $(x,t) \in \Omega$ число траектории N и ε
2. $s1 \leftarrow 0, s2 \leftarrow 0, s3 \leftarrow 0, i \leftarrow 0$
3. $i \leftarrow i+1$
4. $(x0,t0) \leftarrow (x,t), s \leftarrow 0, s4 \leftarrow 0$
5. Найти $R(x0), R1(x0)$ и вычислить $r(x0,t0)$
6. Получить реализации ξ и ω гамма-распределенной случайной величины с параметром $\left(1+\frac{m}{2}\right)$ и изотропного вектора, вычислить $t1$ по первой формуле, начальный k компоненты x по второй, остальные k по третьей формулы из ()
7. Если $(x,t) \in (\partial\Omega)_\varepsilon$ то перейти к пункту 11,иначе к пункту 8
8. Получить реализации ξ_1, η и ω гамма-распределенной случайной величины с параметром $\left(\frac{m}{2}\right)$,бета распределенной случайной величины с параметром $\left(2, \frac{2}{m}\right)$ и и изотропных векторов соответственно ,вычислить $(y1, \tau 1)$ по формуле ()
9. $s \leftarrow s + h(x1,t1) * f(y1,\tau 1), s4 \leftarrow s4+1$
10. $(x0,t0) \leftarrow (x1,t1)$ goto 5
11. $s \leftarrow s + u(x1^*, t1^*)$
12. $s1 \leftarrow s1+s, s2 \leftarrow s2+s*s, s3 \leftarrow s3+s4$
13. Если $i < N$ тогда перейти к пункту 4, иначе к пункту 14
14. $s1 \leftarrow \frac{s1}{N}, s2 \leftarrow \frac{s2}{N} - s1*s1, s2 \leftarrow 3*\sqrt{\frac{s2}{N}}, s3 \leftarrow \frac{s3}{N}.$
15. Выводить $s1, s2, s3$.

Чиленные результаты. Пусть $x = (x_1,x_2) \in D \subset R^2, t \in [0,T], D$ единичный квадрать. Решим следующую задачу.

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2} = f(x_1,x_2,t)$$

$$u(x_1,x_2,t) = f_1(x_1,x_2,t), (x_1,x_2) \in \partial D$$

$$u(x_1,x_2,0) = f_2(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in \overline{D}$$

где

$$f(x_1,x_2,t) = \left(x_1x_2 - (x_2t)^2 + x_1^2 t\right)\exp(x_1x_2t)$$

$$f_2(x_1,x_2) = 1$$

$$f_1(x_1,x_2,t) = \begin{cases} 1 \text{ if } x_1 = 0 \\ \exp(x_2t) \text{ if } x_1 = 1 \\ 1 \text{ if } x_2 = 0 \\ \exp(x_1t) \text{ if } x_2 = 1 \end{cases}$$

Точное решение $u(x,t) = \exp(x_1x_2t), \varepsilon = 0.05$

N	Точка (x_1, x_2, t)	Точное решение	Оценка	3σ	EN_ε
1000	$(0.5, 0.5, 0.5)$	1.1331	1.1636	0.0132	9.356
1000	$(0.4, 0.4, 0.4)$	1.0661	1.0884	0.0084	10.172
1000	$(0.3, 0.3, 0.4)$	1.0274	1.042	0.0047	12.378
1000	$(0.6, 0.6, 0.4)$	1.2411	1.2869	0.0191	9.316
1000	$(0.3, 0.3, 0.3)$	1.065	1.0886	0.0112	14.143
1000	$(0.5, 0.5, 0.7)$	1.1912	1.2315	0.0196	9.812

Литература

[1] Barucci E., S.Polidoro,V.Vespti. Some results on partial differential equations and Asian options. *hppt://cvgmt.sns.it/papers/barpolves01.*

[2] L.P.Kupsov. (1978). Svoystvo srednego i prinsip maksimuma dlya parabolicheskix uravneniy vtorogo poryadka. *DAN SSSR*. Vol. **242 N 3**, pp. 529-532 (In Russian).

[3] S.M.Ermakov, V.V.Nekrutkin, A.S.Sipin. (1989). *Random processes for classical equation of mathematical physics*. Kluwer academic publisher, Dordrecht,The Netherlands.

[4] A.Rasulov, M.Mascagni,G.Raimova. (2006). *Monte Carlo methods for solution linear and nonlinear boundary value problems* . UWED PRESS ,Tashkent.

Поступила в редакцию 09.07.2018

UDC 519.2

SOLUTION OF THE MIXED PROBLEMS FOR THE KOLMOGOROV EQUATION

Bakoev M.T.
matyokub.bakoev@gmail.com
University of World Economy and Diplomacy,
54 Mustakillik Ave. Tashkent, Uzbekistan

In this work we consider a mixed boundary value problems for multidimentional Kolmogorov equations.For the solution of the problem using random walk algorithms baised and unbaised estimators are constructed. Finity variance of the estimator are proved. Numerical results are given

Keywords: Kolmogorov equation, mean value theorem, fundamental solutions, balloid,Markov chain, unbaised estimator

Citation: Bakoev M.T. 2019. Solution of the mixed problems for the Kolmogorov equation. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(20): 60–70.