УДК 519.711.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА В НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ

Нормуродов Ч. Б., Менглиев Ш. А., Менглиев И. А.

shoydullo@mail.ru

Термезский государственный университет, г. Термез шахри, ул. Баркамол авлод, 43 дом

В статьи приведена математическая моделирования движения вязких несжимаемых жидкостей через трубы внутри которого расположена пучок трубки. Указаны ламинарные и турбулентные режимы движения жидкости, а также анализированы физический смысл возникновения этих режимов. В прямой трубе с гладкой стенкой и постоянным поперечным сечением каждая частица жидкости при небольших числах Рейнольдса движутся по прямолинейной траектории. Из-за наличия вязкости частицы жидкости близкие к стенки движутся медленнее, чем вдали от стенки. Течение движутся в виде упорядоченных слоев движущихся относительно друг от друга. Однако, наблюдения показывают, что при больших числах Рейнольдса течение переходит в неупорядоченное состояние или переходит в турбулентное течение. Проходит сильное перемешивание в жидкости, в этом можно убедиться если ввести в жидкость движущейся в трубе краску. Переход ламинарного форма течения в турбулентное наиболее ярко иллюстрирована с помощью опыта проведенного О. Рейнольдстом об окрашенной струйки и установлены, что такой переход осуществляется при одном и том же критическом значение число Рейнольдса. Когда течение ламинарное краска движутся в виде четко очерченной струйки и как течение становится турбулентным краска растлевается по всей трубе и окрашивает вест жидкость. Это показывает что, в турбулентном течение к жидкости движущейся по оси трубе действует поперечное движение, или возникает движение перпендикулярное к оси трубе. Это же поперечное движение приводит к перемешиванию краску по всей жидкости. Рассмотрим прямую круглую трубу с постоянным по всей длине диаметром. Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю, в середины трубы она имеет наибольшее значение. Рассмотрено цилиндр с характерной длиной и характерным радиусом внутри жидкости, ось которого совпадает с осью трубы и изучены течение жидкости через цилиндра. Выведены расчётные формулы для вычисления максимальной скорости течения, объём жидкости проходящее через поперечное сечение трубки, коэффициента сопротивления к трению в трубки по длине течения, а также максимальное значение касательного напряжения.

Ключевые слова: число Рейнольдса, ламинарное течение, турбулентное течение, параболическое течение, сила трения, интеграл, координата, труба, вязкость, плотность, основная скорость течения, среднее скорость, максимальная скорость, радиус, Гук, Гегин, Пуазейл, Дарси-Вейсбах, объём жидкости, коэффициент сопротивления.

Цитирование: *Нормуродов Ч. Б., Менглиев Ш. А., Менглиев И. А.* Исследование зависимости коэффициента сопротивления от число Рейнольдса в несжимаемых вязких жидкостях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 5(17). — С. 60–68.

1 Введение

Течение реальных жидкостей во многих случаях резко отличается от ламинарных течений. Они обладает таким специальным свойством, который называется турбулентностью. В реальных течениях, который происходит в трубах, каналах и в пограничном слое с возрастанием значения числа Рейнольдса явно наблюдается переход ламинарного форму течения в турбулентное. Такой переход ламинарного течения в турбулентное называется возникновением турбулентности и они играет фундаментальное значение по всей гидродинамики. Первоначально такой переход был обнаружен в течениях происходящий в прямых трубах и каналах. В прямой трубе с гладкой стенкой и постоянным поперечным сечением каждая частица жидкости при небольших числах Рейнольдса движутся по прямолинейной траектории. Из-за наличия вязкости частицы жидкости близкие к стенки движутся медленнее, чем вдали от стенки. Течение движутся в виде упорядоченных слоев движущихся относительно друг от друга. Однако, наблюдения показывают, что при больших числах Рейнольдса течение переходит в неупорядоченное состояние или переходит в турбулентное течение. Происходит сильное перемешивание в жидкости, в этом можно убедиться если ввести в жидкость движущейся в трубе краску.

В 1983 г. Осборн Рейнольдс, изучая движение воды в круглой трубе, обнаружил, что с увеличением скорости отока устоичивый ламинарный характер движения нарушается. Появляются возмущения, которые выражаются в том, что ранее прямолинейное движение частиц жидкости, ламинарное на некоторых участках становится беспорядочным, сохраняя вместе с тем общую направленность движения. Дальнейшее увеличение скорости приводит к хаотическому движению во всем потоке. Как принято говорить в настоящее время, течение из устойчивого-ламинарного превратилось в неустойчивое, возмущенное-турбулентное [2].

Наличие вязкости в жидкостях сопротивляется передвижению слоев жидкости относительно друг от друга. Другими словами, в ламинарных (слоистых) течениях за счет вязкости возникает внутреннее трение, оно выражается количеством касательных напряжений на границах слоев, или характеризуется количеством касательных сил относящийся на единичной площади. Отдельные концентрические слои жидкости относительно друг от друга движутся таким образом, что скорость жидкости будет направлено по направлению основной оси. Движение жидкости подобного типа называется ламинарным течением [1-12].

При движениях несжимаемой вязкой жидкости начиная при одном и том же значение число Рейнольдса $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$, ламинарное течение переходит в турбулентное, это же , значение число Рейнольдса называется критическим числом Рейнольдса, где ρ-плотность, μ-вязкость жидкости, U-максимальная скорость основного течения, L-характерный масштаб длине. $Re < Re_{krt}$, течение ламинарное, а при, $Re_{krt} < Re$ течение переходит в турбулентный режим.

2 Постановка задачи

В работе [2] приведена сведения о силах действующих для течений в цилиндрической трубе. Будем рассматривать течение жидкости в прямой круглой трубе с постоянным по всей длине диаметром внутри которой расположены пучок n трубки с длиной L и радиусом r. В реальных жидкостях жидкость приляпается к стенкам трубки и передает касательное напряжение к поверхности обтекаемой жидкости. Здесь появляются так называемое сила внутреннего трения, в жидкостях данная сила является вязкостью. Вязкость-является таким свойствам газов и жидкостей, которой является сопротивлением приводящий к движению жидкостей на воздействие внешних сил. Наличие касательных напряжений и прилипание жидкостей к твердым стенкам приводит к качественным различиям реальных жидкостей от идеальных. Теперь изучаем движение жидкостей в трубе внутри которого расположена n трубки одинаковой длине и радиуса. С учётом вязкости на стенках трубки скорость равна нулю, своего максимального значения достигает на середины трубки. На достаточно удаленном расстояние от входа трубки, распределение скорости течения не зависит от координаты направленного вдоль радиуса.

Движение жидкости в трубе происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное. Движение каждого элемента жидкости ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие напряжения сдвига, вызванного трением [2-12].

Давление p считается постоянной, то есть предполагаются что по сечению трубки $p_0, p_l = const$ [3].

В направлении основной оси на трубки действуют силы давления $p_0 n\pi y^2$ и $p_l n\pi y^2$ приложенные к входному и выходному основаниям трубки соответственно, а также касательная сила $2\pi nyL\tau$ действующая на боковую поверхность цилиндра. Требуется определить максимальную скорость течения в трубки, объём жидкости протекающие через поперечное сечение трубы, коэффициент сопротивления трубки к трению по длине течения, а также максимальное значение касательного напряжения.

3 Решение задачи

Приравнивая сил действующая жидкости в трубки, получаем в качестве условия равновесия в направлении движения уравнение (рис.1.)

$$p_0 n\pi y^2 = p_l n\pi y^2 + 2\pi nyL\tau. \tag{1}$$

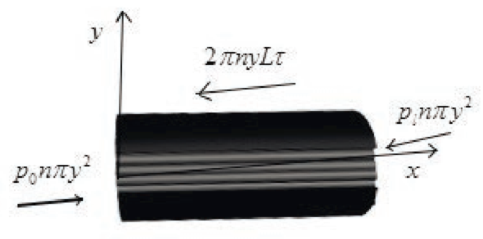

Рис. 1 В трубе расположена пучок n трубки

Проекция сила внутренного трения взята со знаком плюс, потому что, градиент скорости отрицательный (скорость течения слоя с увеличением радиуса y уменьшается). Из формулы (1) определим касательное напряжение τ

$$\tau = \frac{p_0 - p_l}{L} \cdot \frac{y}{2}. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае скорость течения u уменьшается с увеличением координаты y и равна нулю при $y = r$. Поэтому на основании закона трения Гука $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$. Подставляя это выражение в (2) получим

$$-\mu\frac{du}{dy} = \frac{p_0 - p_l}{L} \cdot \frac{y}{2},$$

отсюда, можно видеть, что

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_0 - p_l}{\mu L} \cdot \frac{y}{2}. \tag{3}$$

Теперь, учитывая, что при $y = r$ скорость $u(y) = 0$ и интегрируя уравнение (3) с этим начальным условием имеем

$$u(y) = -\frac{p_0 - p_l}{4\mu L}y^2 + C, \tag{4}$$

для определения постоянной C из уравнение (4), исполуьзуем условие $u(r) = 0$ при $y = r$, или

$$u(r) = -\frac{p_0 - p_l}{4\mu L}r^2 + C = 0,$$

отсюда можно видеть, что

$$C = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L}r^2. \tag{5}$$

Подставляя значение константы C из (5) в уравнение (4) имеем

$$u(y) = -\frac{p_0 - p_l}{4\mu L}y^2 + \frac{p_0 - p_l}{4\mu L}r^2,$$

и в свою очередь, получим уравнение для определения скорости течения следующую формулу

$$u(y) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L}(r^2 - y^2). \tag{6}$$

Таким образом, имеем параболическое распределение скоростей по радиусу трубки (рис. 2.). Наибольшее значение скорость имеет в середине трубы ($y = 0$), где она равна:

$$u_{max} = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L}r^2. \tag{7}$$

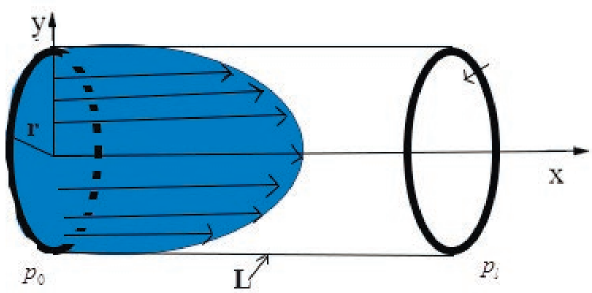

Рис. 2 Расход жидкости для одной трубки

Полное количество Q жидкости, протекающее сквозь сечение трубки (расход жидкости) определяется как объем параболоида вращения (рис.2.) и в свою очерадь определяется следующим образом. Уравнение (6) перепишем в следующем виде:

$$u(y) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} r^2 (\frac{r^2 - y^2}{r^2}) = u_{max}(1 - \frac{y^2}{r^2}). \tag{8}$$

Общий поток жидкости Q через трубки с круглым сечением на основание формулы Гагена-Пуазейля определяется следующим образом [1,3,7,8,11,12]

$$Q = \int\limits_0^r u(y) 2\pi y \,\mathrm{d}y = 2\pi u_{max} \int\limits_0^r \left(y - \frac{y^3}{r^2} \right) \mathrm{d}y = 2\pi u_{max} [\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4r^2}] \Big|_0^r,$$

или учитывая формулу (7), для расхода жидкости имеем формулу

$$Q = 2\pi \cdot \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} \cdot r^2 \cdot \frac{r^2}{4} = \frac{\pi (p_0 - p_l) r^4}{8\mu L}. \tag{9}$$

Вводим среднюю скорость течения, значения которой определяется по поперечному сечению трубка следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi r^2}. \tag{10}$$

Уравнение (10) с учётом формулу (9) записывается в виде

$$\bar{u} = \frac{(p_0 - p_l) r^2}{8\mu L},$$

сравнивая функцию $\bar{u}(y)$ с максимальной скоростью u_{max} определяемый по формуле (7) можно видеть, что $\bar{u}(y) = \frac{1}{2} u_{max}$ или средняя скорость ламинарного течения в трубки равен половину максимальной скорости (рис. 2).

Определим разность давлений $(p_0 - p_l)$

$$p_0 - p_l = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2},$$

отсюда имеем

$$p_0 - p_l = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2} = \frac{32\mu \bar{u}}{2r} \cdot \frac{L}{2r} = \frac{32\mu \bar{u}}{D} \cdot \frac{L}{D}, \tag{11}$$

здесь $D = 2r$ диаметр трубка.

Потер давления по длине течения определяется по уравнению Дарси-Фейсбаха [4] обобщаем для пучок n трубки

$$p_0 - p_l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \rho \bar{u}^2 \cdot \frac{L}{D}, \tag{12}$$

здесь λ_n-коэффициент гидравлического потеря по длине трубки или коэффициент сопротивления трубки. Из последнего уравнения имеем

$$\lambda_n = n \cdot \frac{p_0 - p_l}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \cdot \frac{D}{L}. \tag{13}$$

Подставляя значение $p_0 - p_l$ из формулы (11) в уравнению (12) получим, для коэффициента сопротивления трубки следующую формулу

$$\lambda_n = \frac{32\mu\bar{u}}{nD} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{2}{\rho\bar{u}^2} \cdot \frac{D}{L} = \frac{64\mu}{n\rho\bar{u}D},$$

или отсюда можно видеть, что

$$\lambda_n = \frac{64}{nRe}, \tag{14}$$

здесь n- количество трубки, с ростом количество трубки коэффициент сопротивления уменьшается, где $Re = \frac{\rho\bar{u}D}{\mu}$-число Рейнольдса.

Из формулы (12), имеем

$$\frac{p_0 - p_l}{L} = n\frac{\lambda_n}{D}\frac{\rho}{2}\bar{u}^2. \tag{15}$$

Касательное напряжение достигает свое максимальное значение в стенке трубка, здесь данное напряжение определяется по формулу.

$$\tau_0 = \frac{p_0 - p_l}{L}\frac{r}{2}, \tag{16}$$

данная формула имеет место независимо оттого на каком режиме (ламинарное или турбулентное) находится течение. Таким образом, касательное напряжение на стенке трубка определяется путем измерения уменьшения давления экспериментальным образом.

Подставляя значение $\frac{p_0-p_l}{L}$ из (15) в (16) имеем следующую формулу

$$\tau_0 = n\frac{\lambda_n}{8}\rho\bar{u}^2. \tag{17}$$

Это является формулой для вычисления максимального значения касательного напряжения.

4 Анализ результатов

Согласно формулу (14) для вычисления коэффициента сопротивления приведем результаты расчётов для различного числа пучок трубки n. (3-рис.).

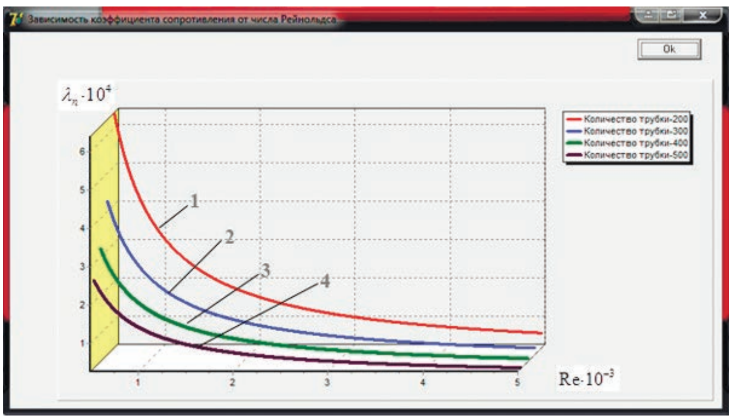

Рис. 3 Зависимость коэффициента сопротивления для гладких трубки от количество трубки n и число Рейнольдса Re: 1) $n = 200$, 2) $n = 300$, 3) $n = 400$, 4) $n = 500$.

На рис.3 для н гладких трубки приведен результаты иллюстрирующие завлемость коэффициента сопротивления λ_n от числа Рейнольдса Re.

Сравнение полученных результатов показывают что при всех значениях число Рейнольдса теоретическая формула (14) имеет место. В вычислительном эксперименты рассматривались следующий диапазон изменения характерных параметров Re и λ_n: $Re = 500 \div 5000$, $\lambda_n = 0.0001 \div 0.0007$. Из рис.3 видно, что с ростом количество трубки n коэффициент сопротивления уменьшается.

Диапазон изменения приведенного критического число Рейнольдса, находится в хорошем согласие с критическим числом Рейнольдса для плоскопараллельных течений [5,17-24].

5 Заключение

Таким образом, показаны что движение несжимаемых вязких течений в каналах, трубах и в пограничном слое могут быть ламинарном и турбулентном режиме а также, указаны физический смысл возникновения этих режимов. Для жидкости протекающих через n трубки расположенного внутри трубы выведены формулы вычисления максимальной скорости объёма жидкости протекающие через поперечное сечение трубки, коэффициента сопротивления трубки к трению по длине течения.

Литература

[1] *Reynolds O.* On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels – Phil. Trans.roy.soc. 1883. № 174. P. 935–982.

[2] *Нармурадов Ч. Б., Менглиев Ш. А.* Трубадаги суюқликлар ҳаракатини математик моделлаштириш // Ҳисоблаш ва математика муаммолари., 2018. №. 2(14). Б. 36–47.

[3] *Гордин В. А.* Дифференциальные и разностные уравнения – Изд. – М.: «Высшая школа экономики», 2016. 517 с.

[4] *Горшков-Кантакузен В. А.* К вопросу вычисления коэффициента Дарси методом регрессионного анализа // Материалы XXI Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред"имени А.Г. Горшкова, 16-20 февраля 2015, Вятичи. Том 1./МАИ.:ООО "ТРП 2015. С. 59-60.

[5] *Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б.* Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости – Изд. – Т.: «Fan va texnologiya», 2011. 188 с.

[6] *Кочен Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика – М: Физматлиз, 1963. 728 с.

[7] *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой – М: Физматлиз, 1962. 479 с.

[8] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. 571 с.

[9] *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамической устойчивость и турбулентность. – Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1977. 366 с.

[10] *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. – М.: Физматлит, 2005. 88 с.

[11] *Thomas H. H.* Paper title // The stability of plane Poiseuille flow.. – Phys.rev., 1953. №. 4(91). P. 780–783.

[12] *Patera A. T.* Paper title // A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion.. – Comp. Phys., 1984. Vol. 54. P. 468–488.

[13] *Бахвалов К. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // вычисл. матем. и матем. физ., 1969. №. 4(9). С. 841–854.

[14] *Loer St.* Paper title // Examination of the stability of disturbed boundary-layer flow by a numerical method. – Phys fluids., 1969. №. 12(12). P. 139–143.

[15] *Brown W. B.* Paper title // A stability criterion for there-dimensional laminar boundary layers. – In: Boundary layer and flow control. London, 1961. vol. 2. – P. 913–923.

[16] *Гольдштик М. А., Сапожников В. А.* Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил // РАН. Сер. Механика жидкости и газа., М.: Издательство, 1968. №. 5. С. 42–46.

[17] *Нармурадов Ч. Б., Соловьев А. С.* О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // РАН. Сер. Механика жидкости и газа., М.: Издательство, 1986. №. 1. С. 46–50.

[18] *Нармурадов Ч. Б., Соловьев А. С.* Устойчивость двухфазного потока газ – твердые частицы в пограничном слое // РАН. Сер. Механика жидкости и газа., М.: Издательство, 1987. №. 2. С. 60–64.

[19] *Нармурадов Ч. Б., Чулиев Э. А., Хужаёров Б. Х.* Устойчивость пограничного слоя двухфазных потоков с учетом сил Стокса и Архимеда // Проблемы механики, Ташкент, 1998. №. 4. С. 13–17.

[20] *Нармурадов Ч. Б., Подгаев А. Г.* Сходимость спектрально–сеточного метода // Узбекский математический журнал, Ташкент, 2003. №. 2. С. 64–71.

[21] *Нармурадов Ч. Б.* Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Докл. АН РУз., Ташкент, 2004. №. 1. С. 19–26.

[22] *Нармурадов Ч. Б.* Об одном эффективном методе решения уравнения Орра-Зоммерфельда // Математическое моделирование., Москва, 2005. №. 9(17). С. 35–42.

[23] *Нармурадов Ч. Б.* Спектр собственных значений для двухфазного течения Пуазейля и пространственная зависимость характерных параметров // Техника и технология., Москва, 2007. №. 5(23). С. 55–57.

[24] *Нармурадов Ч. Б.* Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование., Москва, 2007. №. 6(19). С. 53–60.

Поступила в редакцию 15.08.2018

UDC 519.711.3

INVESTIGATION OF THE DEPENDENCE OF THE COEFFICIENT OF RESISTANCE ON THE REYNOLDS NUMBER IN INCOMPRESSIBLE VISCOUS LIQUIDS

Normurodov Ch. B., Mengliyev Sh. A., Mengliyev I. A.
shoydullo@mail.ru
Termez State University, 43 Barkamol Avlod st., Termez

The article presents a mathematical simulation of the motion of viscous incompressible fluids through tubes inside which a tube bundle is located. Laminar and turbulent regimes of fluid motion are indicated, and the physical meaning of the appearance of these regimes is analyzed. In a straight pipe with a smooth wall and a constant cross section, each particle of the liquid, with small Reynolds numbers, moves along a rectilinear trajectory. Due to the presence of viscosity, particles of liquid close to the walls move more slowly than far from the wall. The flow moves in the form of ordered layers moving relative to each other. However, observations show that for large Reynolds numbers the flow goes into an unordered state or goes into turbulent flow. Strong stirring takes place in the liquid, this can be seen if the paint moving in the pipe is introduced into the liquid. The transition of laminar flow to turbulent flow is most clearly illustrated by the experiment of O. Reynoldst on the colored trickle, and it is established that such a transition occurs at the same critical value as the Reynolds number. When the flow laminar flow moves in the form of a clearly delineated trickle and as the flow becomes turbulent the paint is crimped all over the pipe and stains the vest liquid. This shows that, in the turbulent flow, a transverse motion acts on the liquid of the axis moving along the axis, or there is a motion perpendicular to the axis of the tube. This same lateral movement leads to mixing of the paint throughout the liquid. Consider a straight circular tube with a constant diameter over its entire length. The velocity of flow on the walls of the pipe due to adhesion is zero, in the middle of the pipe it has the greatest value. We consider a cylinder with a characteristic length and a characteristic radius inside a fluid whose axis coincides with the axis of the tube and the flow of liquid through the cylinder is studied. Calculation formulas are derived for calculating the maximum flow velocity, the volume of liquid passing through the cross section of the tube, the coefficient of resistance to friction in the tubes along the length of the flow, and also the maximum value of the tangential stress.

Keywords: Reynolds number, laminar flow, turbulent flow, parabolic flow, frictional force, integral, coordinate, pipe, viscosity, density, main flow velocity, mean velocity, maximum speed, radius, Guk, Gegin, Poiseuille, Darcy-Weisbach, volume of liquid, coefficient of resistance.

Citation: Normurodov Ch. B., Mengliyev Sh. A., Mengliyev I. A. 2018. Investigation of the dependence of the coefficient of resistance on the Reynolds number in incompressible viscous liquids. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(17): 60–68.