

УДК 517.956.3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСЫЩЕННЫХ МИНЕРАЛИЗОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОРИСТЫХ СРЕД

**Имомназаров Х.Х.**

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник,  
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
e-mail: imom@omzg.sccc.ru

**Михайлов А.А.**

к.ф.-м.н., научный сотрудник,  
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
e-mail: alex\_mikh@omzg.sccc.ru

В докладе предложен алгоритм численного моделирования распространения сейсмического волнового поля в насыщенной минерализованной жидкостью пористой среде в необратимом приближении. Рассматривается модель двумерно-неоднородной среды, без учета обратного влияния концентрации солей на волновое поле в пористом упругом теле. Исходная задача записывается в виде динамических уравнений первого порядка. Управляющие уравнения для пористой среды записаны в терминах скоростей смещений, напряжений и порового давления. В уравнении концентрации в качестве источника участвует относительная скорость. Для решения задачи предлагается метод на основе совместного использования спектрального метода Лагерра по времени и конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам. Приводится описание численной реализации предлагаемого алгоритма и анализируются его эффективность при расчетах.

**Ключевые слова:** сосредоточенная сила, пористая среда, минерализация, медленная волна, преобразования Лагерра.

## MODELING OF DYNAMIC PROBLEMS FOR POROUS MEDIA SATURATED WITH MINERALIZED LIQUID

Imomnazarov Kh.Kh., Mikhailov A.A.

The paper proposes an algorithm for numerical modeling of the propagation of a seismic wave field in a porous medium saturated with a mineralized liquid in an irreversible approximation. Without taking into account the inverse effect of salt concentration on the wave field in a porous elastic body, a model of a two-dimensional inhomogeneous medium is considered. The initial problem is described in the form of first-order dynamic equations. The control equations for a porous medium are written in terms of the velocities of displacements, stresses, and pore pressure. In the equation of concentration, the relative velocity is involved as a source. To solve the problem, we propose a method based on the combined use of the Laguerre spectral method with respect to time and finite-difference approximation with respect to spatial coordinates. A description of the numerical implementation of the proposed algorithm is given and its efficiency is analyzed in the calculations.

**Keywords:** concentrated force, porous medium, mineralization, slow wave, Laguerre transformations.

## МИНЕРАЛЛАШГАН СУЮҚЛИК БИЛАН ТЎЛДИРИЛГАН ҒОВАК МУҲИТ УЧУН ДИНАМИК МАСАЛАЛАРНИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.

Мақолада минераллашган суюқлик билан тўлдирилган ғовак муҳитда қайтмас жараёнларни ҳисобга олган ҳолда сеймик тўлқинларнинг тарқалишини сонли моделлаштириш алгоритми таклиф этилган. Икки ўлчамли бир жинсли бўлмаган ғовак-эластик муҳитда тўлқин тарқалиши унга туз концентрацияси таъсирини ҳисобга олмасдан модели ўрганилган. Дастлабки масала биринчи тартибли динамик тенгламалар кўринишида ёзилади. Жараённи бошқарувчи тенгламалар силжиш тезликлари, ғовакликдаги босим ва кучланишларга нисбатан ёзилган. Концентрация тенгламасида нисбий тезлик манба сифатида қатнашади. Вақт бўйича Лагеррнинг

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00729).

спектраиал методи ва фазовий координаталар бўйича чекли- айирмали аппроксимация биргаликда қўлланилиб масалани ечиш таклиф этилган. Таклиф этилган алгоритм тавсифи ва унинг ҳисоблашлардаги эффективлигининг таҳлили келтирилган.

**Калит сўзлар:** нуктага қўйилган куч, ғовак муҳит, минераллаштириш, секин тўлқин, Лагерр алмаштириши.

### 1. Введение

Исследование влияния минерализации на динамические свойства гетерофазных сред, на характер фильтрации и распространение акустических волн в насыщенных минерализованными флюидами пористых средах является актуальным для широкого класса прикладных задач. Пористая среда, состоящая из каркаса, заполненной минерализованной вязкой жидкостью, является реалистической моделью, которая позволяет объяснять наблюдаемые эффекты сейсмических исследований свойств горных пород.

В данной работе для моделирования распространения сейсмических волн в насыщенных минерализованной жидкостью пористых средах используется система динамических уравнений первого порядка с учетом примесей. При численном решении рассматриваемая задача сводится к двум последовательно решаемым задачам. А именно, сначала решается система динамических уравнений теории порупругости, а затем решается уравнение для концентрации растворов. Другими словами, не учитывается обратное влияние концентрации растворов на распространения сейсмических волн в пористой среде. Численное моделирование волновых полей в данной среде позволяет объяснять наблюдаемые эффекты распространения сейсмических волн с учетом минерализации насыщающей жидкости. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [1, 2], а затем развит для задач вязкоупругости [3, 4] и теории пористых сред [5].

### 2. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение сейсмических волн в пористой среде насыщенной минерализованным флюидом в необратимом гидродинамическом приближении для Декартовой системы координат описывается следующей системой дифференциальных уравнений [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\rho_l}{\rho \rho_s} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= F_i, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha \rho \rho_s) \operatorname{div} u + \alpha \rho \rho_l \operatorname{div} v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i,$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) +$$

$$+ \left( \frac{\rho_s}{\rho} K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ik} \operatorname{div} u - \frac{\rho_s}{\rho} K \delta_{ik} \operatorname{div} v = 0,$$

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} (\rho D \nabla c + \rho \bar{\lambda} (u - v)) - (j, \nabla c) \quad (3)$$

Здесь  $\bar{u} = (u_1, u_2)$  и  $\bar{v} = (v_1, v_2)$  - вектора скорости матрицы с парциальной плотностью  $\rho_{0,s}$  и минерализованной жидкости с парциальной плотностью  $\rho_{0,l}$  соответственно,  $p$  - поровое давление,  $\sigma_{ik}$  - тензор напряжений,  $\bar{F} = (F_1, F_2)$  - вектор массовых сил,  $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$ ,  $\rho_{0,s} = \rho_{0,s}^f (1 - d_0)$ ,  $\rho_{0,l} = \rho_{0,l}^f d_0$ ,  $\rho_{0,s}^f$  и  $\rho_{0,l}^f$  - физические плотности матрицы и минерализованной жидкости соответственно,  $d_0$  - пористость,  $\chi$  - коэффициент трения (проницаемосить),  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера,  $K = \lambda + 2\mu/3$ ,  $\lambda > 0, \mu > 0$  - коэффициенты Ламе,  $\alpha = \rho_0 \alpha_3 + K / \rho_0^2$ ,  $\rho_0^3 \alpha_3 > 0$  - модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие модули  $K, \mu, \alpha_3$  выражаются через скорость распространения поперечной волны  $c_s$  и две скорости продольных волн  $c_{p_1}, c_{p_2}$  следующими формулами [8, 9]:

$$\mu = \rho_{0,s} c_s^2,$$

$$K = \frac{\rho_0 \rho_{0,s}}{2 \rho_{0,l}} \left( c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} c_s^2 - \sqrt{\left( c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2 \rho_0^2} \left( c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} c_s^2 + \sqrt{\left( c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right).$$

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = c|_{t=0} = p|_{t=0} = \sigma_{ik}|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

и граничных условиях на свободной поверхности при  $x_2 = 0$

$$p + \sigma_{22}|_{x_2=0} = \frac{\rho_l}{\rho} p \Big|_{x_2=0} = D \frac{\partial c}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0. \quad (5)$$

### 3. Численный метод

На первом этапе для решения поставленной задачи (1)-(5) используется интегральное преобразование Лагерра по времени:

$$\bar{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \bar{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht), \quad (6)$$

с формулой обращения

$$\bar{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{m!}{(m+\alpha)!} \bar{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht), \quad (7)$$

где  $l_m^\alpha(ht)$  - функции Лагерра. Для удовлетворения начальным условиям (4) полагаем значение  $\alpha \geq 1$ .

В результате данного преобразования исходная задача (1)-(5) сводится к двумерной пространственной задаче в спектральной области. Для решения полученной задачи используется конечно-разностная схема на сдвинутых сетках с 4-ым порядком точности [10]. Для этого, в расчетной области введем в направлении координаты  $z = x_1$  сетки  $\omega z_1$  и  $\omega z_{1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta z$ , сдвинутые относительно друг друга на  $\Delta z/2$ :

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z, t), \quad \omega z_{1/2} = (x, j\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, t), \quad j = 0, \dots, M.$$

Аналогично, введем в направлении координаты  $x = x_2$  сетки  $\omega x_1$  и  $\omega x_{1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta x$ , сдвинутые относительно друг друга на  $\Delta x/2$ :

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z, t), \quad \omega x_{1/2} = (i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, z, t), \quad i = 0, \dots, N.$$

На данных сетках введем операторы дифференцирования, аппроксимирующие

производные  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$  с четвертым порядком

точности по координатам  $z = x_1$  и  $x = x_2$ .

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\begin{aligned} u_1^m(x, z), v_1^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_1, \\ u_2^m(x, z), v_2^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2}, \\ \sigma_{11}^m(x, z), \sigma_{22}^m(x, z), P^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_1, \\ \sigma_{12}^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}. \end{aligned}$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения  $\bar{W}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{W}(m) &= (\bar{V}_0(m), \bar{V}_1(m), \dots, \bar{V}_{M+N}(m))^T, \\ \bar{V}_{i+j} &= \left( u_1^{i,j}, u_2^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, v_1^{i,j}, v_2^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \right. \\ &\quad \left. \sigma_{11}^{i+\frac{1}{2}, j}, \sigma_{22}^{i+\frac{1}{2}, j}, \sigma_{12}^{i, j+\frac{1}{2}}, P^{i+\frac{1}{2}, j} \right)^T. \end{aligned}$$

Тогда, данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как:

$$(A_\Delta + \frac{h}{2} E) \bar{W}(m) = \bar{F}_\Delta(m-1). \quad (8)$$

Последовательность компонент волнового поля в векторе решения  $\bar{V}$  выбирается с учетом минимизации количества диагоналей в матрице  $A_\Delta$ . При этом на главной диагонали матрицы специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве множителя параметр  $h$  (параметр преобразования по Лагерру). Следует отметить, что за счет выбора параметра  $h$  имеется возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений (8) можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля  $\bar{W}(m)$ . Затем, воспользовавшись формулой обращения преобразований Лагерра (7), получим решение исходной задачи (1)-(5).

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (8) наиболее эффективным оказалось использование итерационного метода сопряженных градиентов. В этом случае для матриц систем большой размерности не требуется хранение всей матрицы в машинной памяти. Преимуществом этого метода является также быстрая сходимость к решению задачи при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Наша матрица как раз обладает этим свойством за счет введенного параметра  $h$ . На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряженных градиентов. На уровне входных данных при задании модели среды равносильно декомпозиции исходной пространственной области на множество подобластей, равных количеству процессоров. Такой подход дает возможность распределения памяти, как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

### 4. Результаты расчётов

Результаты расчёта волнового поля для разных моделей сред представлены на рисунках 1 и 2. В первом случае в качестве модели была задана среда, состоящая из двух однородных слоёв: верхний слой – упругая среда; нижний слой – пористая среда. Физические характеристики слоёв были заданы следующими:

1. верхний слой -  $\rho = 1.2 \text{ г/см}^3$ ,  $c_p = 1.5 \text{ км/сек}$ ,  $c_s = 1 \text{ км/сек}$ ;
2. нижний слой -  $\rho_s^f = 1.5 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_l^f = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $c_{p1} = 2 \text{ км/сек}$ ,  $c_{p2} = 0.45 \text{ км/сек}$ ,  $c_s = 1.3 \text{ км/сек}$ ,  $d_0 = 0.1$ .

Толщина верхнего слоя - 18 км. Волновое поле моделировалось от точечного источника типа центра расширения с координатами  $x_0 = 24 \text{ км}$ ,  $z_0 = 12 \text{ км}$ , находящегося в верхнем упругом слое. Временной сигнал в источниках задавался в виде

импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

где  $\gamma = 4$ ,  $f_0 = 30$  Гц,  $t_0 = 0.05$  сек.

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели среды представлены на рисунке 1. На данном рисунке изображен мгновенный снимок волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений  $u_z(x, z)$  в фиксированный момент времени при  $T = 12$  сек. Граница раздела слоёв показана сплошной линией.

Из рисунка видно, что при падении продольной волны, излучаемой источником типа центра расширения, на границу раздела слоёв образуются соответствующие типы волн для упругой и пористой среды. В верхнем слое - продольная и поперечная волна, а в нижнем пористом слое - две продольных и одна поперечная волна.

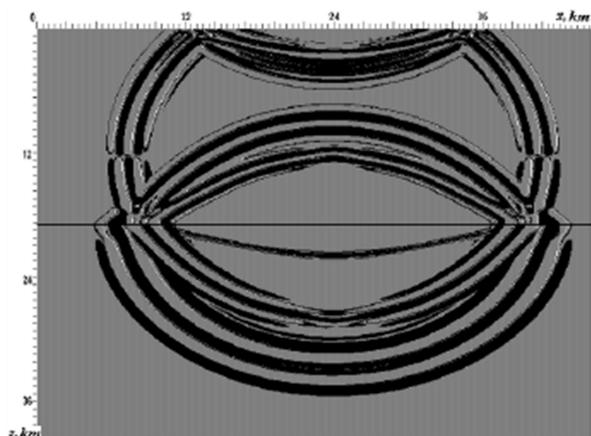


Рис. 1. Мгновенный снимок волнового поля для  $u_z(x, z)$  компоненты скорости смещений в момент времени  $t = 12$  секунд.

В следующем примере расчётов в качестве модели была задана среда, состоящая из пористого слоя и упругого полупространства. Физические характеристики среды были заданы следующими:

1. пористый слой –  $\rho_0 = 0.4$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{0,l}^f = 0.01$  г/см<sup>3</sup>,  $c_{p1} = 1.1$  км/сек,  $c_{p2} = 0.25$  км/сек,  $c_s = 0.7$  км/сек, коэффициент пористости  $d = 0.5$ ;
2. нижнее упругое полупространство –  $\rho = 1.5$  г/см<sup>3</sup>,  $c_p = 1.2$  км/сек,  $c_s = 0.8$  км/сек.

Толщина верхнего пористого слоя – 20 метров. Волновое поле моделировалось от точечного

источника типа центра расширения с координатами  $x_0 = 200$  метров,  $z_0 = 4$  метра, расположенным в верхнем пористом слое.

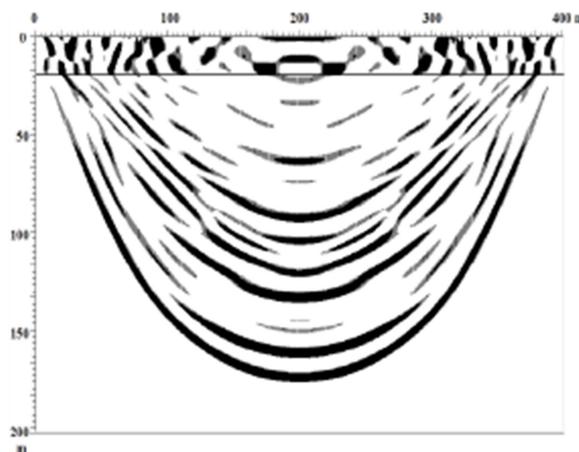


Рис. 2. Мгновенный снимок волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений  $u_z(x, z)$  в момент времени  $t = 0.15$  секунды.

На рисунке 2 изображен мгновенный снимок волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений  $u_z$  в фиксированный момент времени при  $t = 0.15$  секунды. Временной сигнал в источнике задавался в виде импульса Пузырёва с несущей частотой 100 Гц. Из рисунка видно, что в пористом слое возникают многократно отраженные волны, которые генерируют в упругом полупространстве различные продольные и поперечные волны.

## 5. Заключение

Анализ тестовых расчетов показывает устойчивость представленного алгоритма даже для моделей сред, имеющих резкоконтрастные границы раздела слоев или содержащих тонкие слои, сравнимые с пространственной длиной волны. Так как, в отличие от классических преобразований Фурье и Лапласа, применение преобразования Лагерра приводит к системе уравнений, в которой параметр разделения по гармоникам входит только в правую часть в рекуррентном виде. В результате, матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

## Литература

- [1] *Mikhailenko B.G.* Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. 1999. 12. P. 105-110.
- [2] *Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A.* Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics. 2001. Vol. 9, 4. P. 1523-1541.
- [3] *Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.* Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Journal Pure and Applied Geophysics. 2003. 160. P. 1207-1224.

- 
- [4] *Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V.* Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // *Geophysical Prospecting*. 2003. 51. P. 37-48.
- [5] *Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.* Применение спектрального метода для численного моделирования сейсмических волн в пористых средах при наличии диссипации энергии // *СибЖВМ*. 2014, Т. 17, 2. С. 139-147.
- [6] *Доровский В.Н., Подбережный М.Ю., Нефедкин Ю.А.* Зависимость длины поглощения волны Стоунли от концентрации солей в жидкости, насыщающей пористую среду // *Геология и геофизика*. 2011. Т. 52, 2. С.312-321.
- [7] *Перепечко Ю.В.* Уравнение течения минерализованной жидкости в пористой среде // *Актуальные вопросы анализа : материалы научн. конф., Карши: Изд. КаршиГУ*. 2016. С. 162-164.
- [8] *Имомназаров Х.Х.* Несколько замечаний о системе уравнений Био // *Доклады РАН*. Т. 373, 4. 2000. С. 536–537.
- [9] *Imomnazarov Kh.Kh.* Some Remarks on the Biot System of Equations Describing Wave Propagation in a Porous Medium // *Appl. Math. Lett.* Vol. 13, 3. 2000. P. 33–35.
- [10] *Levander A.R.* Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // *Proc. 57-th SEG Annual Meeting*. New Orleans. 1987. P. 234–245.
- [11] *Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Korobov P.V., Kholmuradov A.E.* About one direct initial-boundary value problem for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations// *Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk*, 2015, № 18, pp.1-8.