

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМЫ ВЫРОСТНОГО КАРПОВОГО РЫБОВОДНОГО ПРУДА ТЕПЛОВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

Комилиён Ф. С., Элмуродова Б. Э.

komfaiz@mail.ru

Таджикский национальный университет, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17

Статья посвящена математическому моделированию экосистемы выростного карпового рыболовного пруда тепловодного хозяйства. Целью разработки математической модели является выявление закономерностей функционирования экосистемы пруда, с возможностью управления её биологическими процессами, которые будут задействованы для повышения её рыбопродуктивности.

Описаны функциональные зависимости переменных модели и внешних функций, трофические взаимодействия и трофические функции, действия законов стехиометрии в процессах роста и развития продуцентов, потребление биогенных элементов фитопланктоном, бактериями и макрофитами. Рассмотрены способы учёта воздействия климатических факторов: температурная функция роста организмов, функция освещённости для фитопланктона и макрофитов. Математически отображены процессы бактериальной деструкции, действия законов стехиометрии при разложении детрита до биогенных элементов, питания с переключением для рыб, метаболизм и смертность водных организмов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, экосистема, рыболовный пруд, тепловодное хозяйство, рыба, карп, белый амур, белый толстолобик, пёстрый толстолобик, бентос, макрофит, фитопланктон, зоопланктон, азот, фосфор, углерод, детрит.

**Цитирование:** Комилиён Ф. С., Элмуродова Б. Э. Математическое моделирование экосистемы выростного карпового рыболовного пруда тепловодного хозяйства // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 6(18). — С. 57–77.

## 1 Введение

В блок-схеме концептуальной модели экосистемы выростного карпового рыболовного пруда тепловодного хозяйства [1], являющаяся модификацией трёхрыбной концептуальной модели Ф.С. Комилова, И.Л. Косимова [2]- [14], фигурируют четыре вида рыб – карп (CR), белый амур (BA), белый толстолобик (BT) и пёстрый толстолобик (PT). Т.е. основной разницей данной модели от упомянутой модели состоит в том, что здесь она расширена на одну переменную, и в качестве особого объекта исследования выступает рыба пёстрый толстолобик, излюбленным кормом которой является зоопланктон.

В этой связи в данной модели вместо пяти отработанных управляющих внешних функций учтены уже шесть функций, характеризующих внесение в экосистему пруда искусственных кормов и минеральных удобрений, со следующими обозначениями [2]- [6]- [10]- [14]  $\varphi_{CO}(t)$  – комбикорм,  $\varphi_{CV}(t)$  – куколки тутового шелкопряда – добавочные корма для карпа (CR),  $\varphi_{RS}(t)$  – кормовые растения – добавочный корм для белого амура (BA),  $\varphi_{CO}(t)$  – корма заводского приготовления – добавочный корм для пёстрого толстолобика (PT),  $\varphi_{SU}(t)$  – суперфосфат,  $\varphi_{SE}(t)$  – аммиачная

селитра – добавочные питательные вещества для фитопланктона, с последующей их трансформацией в питание белого толстолобика (ВТ).

В разработанной математической модели также учтены влияние климатических факторов – температуры воды (Т) и интенсивности солнечной радиации ( $I_0$ ).

Другие переменные модели выбраны исходя из кормовой базы рыб и учёта круговорота вещества в экосистеме карпового рыбоводного пруда: МТ – полупогруженные макрофиты, MR – погруженные макрофиты, FT – фитопланктон, ZO – зоопланктон, BK – бактерий, BN – бентос, PW, PS, NW и NS – соответственно, суммарные неорганические фосфора и азота в воде, и фосфора и азота в седиментах, суммарные неорганические углерода в воде – CW и углерода в седиментах – CS не являются переменными моделями, но в математической модели их потребление будет учтено косвенно, и наконец DW и DS – детрит в воде и детрит в седиментах [2]- [10].

Таким образом, в модели всего получено 16 фазовых переменных (CR, BA, BT, PT, MT, MR, FT, ZO, BK, BN, PW, PS, NW, NS, DW, DS).

**Потоковые уравнения, потоки вещества.** В модели предполагается [6], что скорости процессов потребления и роста организмов будут определяться и количеством доступного субстрата, и такими физическими условиями среды как температура воды и солнечная освещённость. Лимитирование этих факторов задаётся мультипликативными членами в общей функции потока вещества

$$A_{ij} = f_i(T) \cdot \xi_j(I_0) \cdot \psi_j\left(\sum i\right) \cdot (1 - \delta_j)$$

где  $A_{ij}$  – поток вещества из  $i$ -го блока к  $j$ -ому блоку (например, из блока зоопланктона к блоку пёстрого толстолобика),  $\psi_j(\sum i)$  – функция выедания суммарного субстрата (продуцентов, консументов или биогентов, т.е. в частности  $\psi_j(\sum i) = r(i, j)$  или  $p(i, j)$ , или же  $q(i)$  и т.д. – различные -образные трофические функции),  $\delta_j$  – потери  $j$ -го организма на метаболизм,  $f_j(T), \xi_j(I_0)$  – функции лимитирования  $j$ -го организма температурой и светом (для продуцентов), соответственно

$$(0 < f_j(T), \xi_j(I_0) \leq 1), j = FT, MT, MR, ZO, BK, BN, BT, PT, CR$$

или BA, T – температура воды,  $I_0$  – интенсивность солнечной радиации на поверхности рыбоводного пруда [6]- [14].

Теперь, полагаясь на блок-схему концептуальной модели [1], приводим для всех переменных модели потоковые обыкновенные дифференциальные уравнения, а также соответствующие формулы для потоков вещества между взаимодействующими блоками (переменными) модели и, необходимые функциональные зависимости, использованные в математической модели экосистемы рыбоводного пруда. В качестве начальных условий системы ОДУ взяты начальные концентрации компонентов экосистемы рыбоводного пруда за исследуемый год [5-8, 11-13]. Отметим, что потоки вещества могут иметь как простую, так и очень сложную структуру. Расшифровка повторяющихся потоков, входящие в уравнения модели, приводится единожды по мере появления этих потоков в уравнениях.

**1) Карп:**

$$\frac{dCR}{dt} = A_{BNCR} + A_{ZOCR} - A_{CRDW} + [\alpha \cdot \varphi_{CO}(t) + \beta \cdot \varphi_{CU}(t) \cdot CR]$$

$$A_{BNCR} = f_{CR}(T) \cdot r(BN, CR) \cdot (1 - \delta_{CR})$$

$$A_{ZOCR} = f_{CR}(T) \cdot \min\{[r(BN_{CR}, CR) - r(BN, CR), r(ZO, CR) \cdot \eta(BN)]\} \cdot (1 - \delta_{CR})$$

$$A_{CRDW} = \left( \delta_{CR} + \delta_{CR}^S \cdot \frac{R_{CR}}{R_{CR}^{\max}} \right) \cdot \frac{R_{CR}}{1 - \delta_{CR}} + k_{CR}^{cm} \cdot CR$$

$$R_{CR} = A_{BNCR} + A_{ZOCR}$$

## 2) Белый амур:

$$\frac{dBA}{dt} = A_{MTBA} + A_{MRBA} + A_{FTBA} - A_{BADW} + \gamma \cdot \varphi_{RS}(t) \cdot BA$$

$$A_{MTBA} = f_{BA}(T) \cdot r(MT, BA) \cdot (1 - \delta_{BA})$$

$$A_{FTBA} = f_{BA}(T) \cdot \min\{[r(MT_{cr}, BA) + r(MR_{cr}, BA)] - [r(MT, BA) + r(MR, BA)], r(FT, BA) \cdot [\eta(MT) + \eta(MR)]\} \cdot (1 - \delta_{BA})$$

$$A_{BADW} = \left( \delta_{BA} + \delta_{BA}^S \cdot \frac{R_{BA}}{R_{BA}^{\max}} \right) \cdot \frac{R_{BA}}{1 - \delta_{BA}} + k_{BA}^{cm} \cdot BA$$

$$R_{BA} = A_{MTBA} + A_{MRBA} + A_{FTBA}$$

## 3) Белый толстолобик:

$$\frac{dBT}{dt} = A_{FTBT} + A_{BKBT} + A_{DWBT} - A_{BTDW}$$

$$A_{FTBT} = f_{BT}(T) \cdot r(FT, BT) \cdot (1 - \delta_{BT})$$

$$A_{BKBT} = f_{BT}(T) \cdot \min\{[r(FT_{cr}, BT) - r(FT, BT), r(BK, BT) \cdot \eta(FT)]\} \cdot (1 - \delta_{BT})$$

$$A_{DWBT} = f_{BT}(T) \cdot \min\{\min\{[r(FT_{cr}, BT) - r(FT, BT), r(BK_{cr}, BT) \cdot \eta(FT)]\} - \min\{[r(FT_{cr}, BT) - r(FT, BT), r(BK, BT) \cdot \eta(FT)]\}, r(DW, BT) \cdot \eta(BK) \cdot \eta(FT)\} \cdot (1 - \delta_{BT})$$

$$A_{BTDW} = \left( \delta_{BT} + \delta_{BT}^S \cdot \frac{R_{BT}}{R_{BT}^{\max}} \right) \cdot \frac{R_{BT}}{1 - \delta_{BT}} + k_{TL}^{cm} \cdot BT$$

$$R_{BT} = A_{FTBT} + A_{BKBT} + A_{DWBT}$$

## 4) Пёстрый толстолобик:

$$\frac{dPT}{dt} = A_{ZOPT} + A_{FTPT} + A_{BKPT} + A_{DWPT} - A_{PTDW} + \sigma \cdot \varphi_{KR}(t) \cdot PT$$

$$A_{ZOPT} = f_{PT}(T) \cdot r(ZO, PT) \cdot (1 - \delta_{PT})$$

$$A_{FTPT} = f_{PT}(T) \cdot \min\{[r(ZO_{CR}, PT) - r(ZO, BT)], r(FT, PT) \cdot \eta(ZO)\} \cdot (1 - \delta_{PT})$$

$$A_{BKPT} = f_{PT}(T) \cdot \min\{[r(ZO_{cr}, PT) - r(ZO, BT)], r(BK, PT) \cdot \eta(ZO)\} \cdot (1 - \delta_{PT})$$

$$A_{DWPT} = f_{PT}(T) \cdot \min\{\min\{[r(ZO_{cr}, PT) - r(ZO, PT)], [r(FT_{cr}, PT) + r(BK_{cr}, PT)] \cdot \eta(ZO)\} - \min\{[r(ZO_{cr}, PT) - r(ZO, PT)], r(FT, PT) + r(BK, PT)] \cdot \eta(ZO)\}, r(DW, PT) \cdot [\eta(FT) + \eta(BK) \cdot \eta(ZO)] \cdot (1 - \delta_{PT})$$

$$A_{PTDW} = \left( \delta_{PT} + \delta_{PT}^S \cdot \frac{R_{PT}}{R_{PT}^{\max}} \right) \cdot \frac{R_{PT}}{1 - \delta_{PT}} + k_{PT}^{cm} \cdot PT$$

$$R_{PT} = A_{ZOPT} + A_{FTPT} + A_{BKPT} + A_{DWPT}$$

### 5) Фитопланктон:

$$\frac{dFT}{dt} = A_{PWFT} + A_{NWFT} + A_{CWFT} - A_{FTZO} - A_{FTBT} - A_{FTPT} - A_{FTBA} - A_{FTDW}$$

$$A_{PWFT} = f_{FT}(T) \cdot \xi_{FT}(I_0) \cdot Y_{FT}^{PW} \cdot (1 - \delta_{FT})$$

$$A_{NWFT} = X_{FT}^{NW} \cdot A_{PWFT}$$

$$A_{CWFT} = X_{FT}^{CW} \cdot A_{PWFT}$$

$$A_{FTZO} = f_{ZO}(T) \cdot r(FT, ZO) \cdot (1 - \delta_{ZO})$$

$$A_{FTDW} = \delta_{FT} \cdot \frac{A_{PWFT} + A_{NWFT} + A_{CWFT}}{1 - \delta_{FT}} + k_{FT}^{cm} \cdot FT$$

## 6) Бактерии:

$$\frac{dBK}{dt} = A_{PWBK} + A_{NWBK} + A_{CWBK} + A_{PSBK} + A_{CSBK} - A_{BKZO} - A_{BKBN} - A_{BKDW} - A_{BKDS} - A_{BKBT} - A_{BKPT}$$

$$A_{PWBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{PW+PS} \cdot \frac{r(PW, BK)}{r(PW, BK) + r(PS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{NWBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{PW+PS} \cdot \frac{r(NW, BK)}{r(NW, BK) + r(NS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{NWBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{NW+NS} \cdot \frac{r(NW, BK)}{r(NW, BK) + r(NS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{CWBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{NW+NS} \cdot \frac{r(CW, BK)}{r(CW, BK) + r(CS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{PSBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{PW+NS} \cdot \frac{r(PW, BK)}{r(PW, BK) + r(PS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{NSBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{NW+NS} \cdot \frac{r(NW, BK)}{r(NW, BK) + r(NS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{CSBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{CW+CS} \cdot \frac{r(CW, BK)}{r(CW, BK) + r(CS, BK)} \cdot (1 - \delta_{BK})$$

$$A_{BKZO} = f_{ZO}(T) \cdot r(BK, ZO) \cdot (1 - \delta_{ZO})$$

$$A_{BKBN} = f_{BN}(T) \cdot r(BK, BN) \cdot (1 - \delta_{BN})$$

$$A_{BKDW} = \delta_{BK} \cdot \frac{A_{PWBK} + A_{NWBK} + A_{CWBK}}{1 - \delta_{BK}} + k_{BK}^{cm} \cdot BK$$

$$A_{BKDS} = \delta_{BK} \cdot \frac{A_{PSBK} + A_{NSBK} + A_{CSBK}}{1 - \delta_{BK}} + k_{BK}^{cm} \cdot BK$$

## 7) Бентос:

$$\frac{dBN}{dt} = A_{BKBN} - A_{BNCR} - A_{BNDS}$$

$$A_{BNDS} = \delta_{BN} \cdot \frac{A_{BKBN}}{1 - \delta_{BN}} + k_{BN}^{cm} \cdot BN$$

**8) Зоопланктон**

$$\frac{dZO}{dt} = A_{FTZO} + A_{BKZO} - A_{ZOPT} - A_{ZOQR} - A_{ZODW}$$

$$A_{ZODW} = \delta_{ZO} \cdot \frac{A_{FTZO} + A_{BKZO}}{1 - \delta_{ZO}} + k_{ZO}^{cm} \cdot ZO$$

**9) Полупогружённый макрофит:**

$$\frac{dBT}{dt} = A_{PWMT} + A_{NWMT} + A_{CWMT} + A_{PSMT} + A_{NSMT} + A_{CSMT} - A_{MTNA} - A_{MTDW} - A_{MTDS}$$

$$A_{PWMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{PW+PS} \cdot \frac{p(PW, MT)}{r(PW, MT) + q(PS)} \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{NWMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{NW+NS} \cdot \frac{p(NW, MT)}{r(NW, MT) + q(NS)} \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{CWMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{CW+CS} \cdot \frac{p(CW, MT)}{r(CW, MT) + q(CS)} \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{PSMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{PW+PS} \cdot \frac{q(PS)}{r(PW, MT) + q(PS)} \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{NSMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{NW+NS} \cdot \frac{p(NS)}{r(NW, MT) + q(NS)} \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{CSMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{CW+CS} \cdot \frac{q(CS)}{p(CW, MT) + q(CS)} \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{MTDW} = k_{MT}^{liz} \cdot MT \cdot f_{MT}^{cm}(T) \cdot MT + k_{MT}^{cm} \cdot (A_{PWMT} + A_{NWMT} + A_{CWMT} + A_{PSMT} + A_{NSMT} + A_{CSMT}) \cdot \delta_{BK}$$

$$A_{MTDS} = f_{MT}^{zp}(T) \cdot MT + (1 - k_{MT}^{cm}) \cdot (A_{PWMT} + A_{NWM T} + A_{CWMT} + A_{PSTM} + A_{NSMT} + A_{CSMT}) \cdot \delta_{MP}$$

### 10) Погружённый макрофит:

$$\frac{dMR}{dt} = A_{PWMR} + A_{NWMR} + A_{CWMR} + A_{PSMR} + A_{NSMR} + A_{CSMR} - A_{MRBA} - A_{MRDW} - A_{MRDS}$$

$$A_{PWMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{PW+PS} \cdot \frac{r(PW, MR)}{r(PW, MR) + r(PS, MR)} \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{NWMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{NW+NS} \cdot \frac{r(NW, MR)}{r(NW, MR) + r(NS, MR)} \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{CWMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{CW+CS} \cdot \frac{p(CW, MT)}{r(CW, MT) + r(CS, MR)} \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{PSMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{PW+PS} \cdot \frac{q(PS, MR)}{r(PW, MR) + r(PS, MR)} \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{NSMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{NW+NS} \cdot \frac{r(NS, MR)}{r(NW, MR) + r(NS, MR)} \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{CSMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{CW+CS} \cdot \frac{r(CS, MR)}{r(CW, MR) + r(CS, MR)} \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{MRDW} = k_{MR}^{liz} \cdot MR \cdot f_{MR}^{cm}(T) \cdot MR + k_{MR}^{cm} \cdot (A_{PWMR} + A_{NWMR} + A_{CWMR} + A_{PSTR} + A_{NSMR} + A_{CSMR}) \cdot \delta_{MR}$$

$$A_{MRDS} = f_{MR}^{zp}(T) \cdot MR + (1 - k_{MR}^{cm}) \cdot (A_{PWMR} + A_{NWMR} + A_{CWMR} + N_{PSMR} + N_{NSMR} + A_{CSMR}) \cdot \delta_{MR}$$

### 11) Суммарный неорганический фосфор воды:

$$\frac{dPW}{dt} = A_{DWPW} - A_{PWFT} - A_{PWMT} - A_{PWMR} - A_{PWPS} + A_{PSPW} + \varphi_{SU}(t)$$

$$A_{DWPW} = f_{DW}(T) \cdot k_{des}^{DW} \cdot x_{BK}^{PW} \cdot \frac{r(DW, BK)}{x_{BK}^{PW} + x_{BK}^{NW} + x_{BK}^{CW} + k_{DS}^{DW}}$$

$$A_{PWPS} = k_{sed}^{PW} \cdot PW$$

$$A_{PSPW} = k_{dif}^{PS} \cdot PS$$

**12) Суммарный неорганический фосфор седиментов:**

$$\frac{dPS}{dt} = A_{DSPS} - A_{PSMT} - A_{PSMR} - A_{PSMK} - A_{PWPS} - A_{PSPW}$$

$$A_{DSPS} = f_{DS}(T) \cdot k_{des}^{DS} \cdot x_{BK}^{PS} \cdot \frac{r(DS, BK)}{x_{BK}^{PS} + x_{BK}^{NS} + x_{BK}^{CS} + k_{DS}^{DS}}$$

**13) Суммарный неорганический азот воды:**

$$\frac{dNW}{dt} = A_{DWNW} - A_{NWFT} - A_{NWMT} - A_{NWMR} - A_{NWBS} + A_{NSNW} + \varphi_{SE}(t)$$

$$A_{DWNW} = x_{BK}^{NW} \cdot A_{DWPW}$$

$$A_{NWNNS} = k_{sed}^{NW} \cdot NW$$

$$A_{NWNW} = k_{dif}^{NS} \cdot NS$$

**14) Суммарный неорганический азот седиментов:**

$$\frac{dNS}{dt} = A_{DSNS} - A_{NSMT} - A_{NSMR} - A_{NSBK} + A_{NWNNS} - A_{NSNW}$$

$$A_{DSNS} = x_{BK}^{NS} \cdot A_{DSPS}$$

**15) Детрит воды:**

$$\begin{aligned} \frac{dDW}{dt} = & A_{FTDW} + A_{MTDW} + A_{MRDW} + A_{BKDW} + A_{ZODW} + A_{BTDW} + A_{PTDW} \\ & + A_{CRDW} + A_{BADW} - A_{DWPW} - A_{DWNW} - A_{DWCW} - A_{DWBT} \\ & - A_{DWPT} - A_{DWDS} + A_{DSDW} \end{aligned}$$



$$A_{DWCW} = x_{BK}^{CW} \cdot A_{DWPW}$$

$$A_{DWDS} = k_{sed}^{DW} \cdot DW$$

$$A_{DSDW} = k_{dif}^{DS} \cdot DS$$

### 16) Детрит седиментов:

$$\frac{dDS}{dt} = A_{BKDS} + A_{BNDS} + A_{MTDS} + A_{MRDS} - A_{DSPS} - A_{DSNS} - A_{DSCS} + A_{DWDS} - A_{DSDW}$$

$$A_{DSCS} = x_{BK}^{CS} \cdot A_{DSPS}$$

В этих формулах  $\alpha$  и  $\beta$  – соответственно доли комбикорма и куколки, идущих на потребление карпа,  $\gamma$  – доля кормовых растений, идущей на потребление белого амура,  $\sigma$  – доля заводского корма, идущей на потребление пёстроного толстолобика,  $k_{sed}$  – коэффициент седиментации детрита воды,  $k_{dif}$  – коэффициент диффузии детрита седиментов [6]. Некоторые нераскрытые функциональные зависимости, использованные в потоках вещества, приведены ниже.

где  $r(i, j)$ -образная трофическая функция вида (1),  $X_{FT}^{NW}$  – стехиометрический коэффициент фитопланктона при потреблении азота. Потребление азота фитопланктоном будет пропорционально потреблению фосфора

## 2 Трофические функции.

Переход вещества с одного трофического уровня на другой в модели задаётся  $s$ -образными функциями вида [6, 8, 11-14]

$$r(i, j) = \frac{\mu_{ij} \cdot i^s}{K_{ij}^s + i^s} \cdot j \quad (1)$$

описывающими скорости потребления  $i$ -го субстрата  $j$ -ым организмом, находящимся на следующем трофическом уровне (рис. 1), где  $\mu_{ij}$  – максимальная скорость потребления (1/сутки),  $K_{ij}$  – коэффициент полунасыщения (мг/л),  $s$  – параметр, задающий крутизну графика трофической функции.

**Законы стехиометрии.** Потребление биогенных элементов – углерода, азота и фосфора, в экосистеме синхронизировано в соответствии с законами стехиометрии. Соотношение углерода, азота и фосфора в живых организмах поддерживается примерно постоянным:

$$PW : NW : CW = X^{PW} : X^{NW} : X^{CW}$$

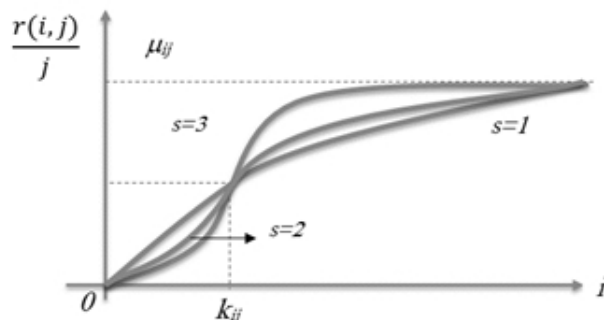


Рис. 1 S-образная функция в трофических взаимодействиях

**Потребление биогенных элементов фитопланктоном.** На основе приведённых соображений, потребление фосфора фитопланктоном будет определяться потоком [6] где  $X^{PW}$  – стехиометрический коэффициент для фосфора, берётся как обычно 1,  $X^{NW}$  – для азота 5-16, а  $X^{CW}$  – для углерода, берётся около 100. Чтобы обеспечить такое соотношение CW, NW и PW в биоте, необходимо выдерживать потоки потребляемых углеродо-, азото- и фосфоросодержащих веществ в таких же отношениях [6, 12].

$$Y_{FT}^{NW} = x_{FT}^{NW} \cdot Y_{FT}^{PW}$$

Таким образом, для синхронизации потоков азота и фосфора используется следующая процедура [6, 12]:

- вычисление потенциально возможных потоков биогенных веществ по формуле (1);
- определение лимитирующего биогенного вещества по формуле (2);
- пересчет потоков. Потребление нелимитирующего биогена происходит со скоростью, определяемой потреблением лимитирующего биогена.

Углерод, как не ограничивающий продукционного процесса биогенный элемент, не является фазовым переменным модели, но его потребление, как основное по весу составляющей биомассы, учитывается из расчёта в количестве

$$Y_{FT}^{CW} = x_{FT}^{CW} \cdot Y_{FT}^{PW}$$

Соответствующая доля  $x_{FT}^{CW}$  выпадает при разложении детрита. Итак, в соответствии с принципом лимитирующих факторов потребление биогенных элементов фитопланктоном определяется с помощью следующей формулы [6, 12]:

$$\psi_{FT}(PW, NW, CW) = Y_{FT}^{PW} + x_{FT}^{NW} \cdot Y_{FT}^{PW} + x_{FT}^{CW} \cdot Y_{FT}^{PW}$$

**Потребление биогенных элементов погружёнными макрофитами.**

Потребление фосфора, азота и углерода погружёнными макрофитами определяется их потоками из воды и со дна. Поэтому на основе законов стехиометрии потребление фосфора вычисляется следующим образом [5]:

$$Y_{MR}^{PW+PS} = \min \left\{ r(PW, MR) + r(PS, MR), \frac{r(NW, MR) + r(NS, MR)}{x_{MR}^{NW}} \right\}$$

где  $(r(i, MR))$  – s-образные трофические функции вида (1),  $i = PW, PS$  или  $NW, NS$ ,  $x_{MR}^{NW}$  – стехиометрический коэффициент погружённого макрофита при потреблении азота. По этой формуле, определяя лимитирующий биогенный элемент, потребляемые потоки азота и углерода погружёнными макрофитами будут заново пересчитываться согласно следующим формулам:

$$Y_{MR}^{NW+NS} = x_{MR}^{NW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}, \quad Y_{MR}^{CW+CS} = x_{MR}^{CW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS},$$

$$\psi_{MR}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) = Y_{MR}^{PW+PS} + x_{MR}^{NW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS} + x_{MR}^{CW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}$$

При этом предполагается, что не существует предпочтения в потреблении биогенов со дна и из воды [5, 6, 8, 12].

#### Потребление биогенных элементов полупогружёнными макрофитами.

Для полупогружённых макрофитов характерно преимущественное потребление биогенов со дна, причем, величина этого потока не столько зависит от биомассы зелёной части растений, сколько от биомассы корней, которая не входит в число переменных модели. Чтобы не вводить ещё одну переменную, будем предполагать, что биомасса корней пропорциональна доступным биогенам седиментов. Тогда поток биогенов, потребляемых из седиментов, можно описать функцией  $q(i)$ ,  $i = PS, NS$  или  $CS$ , вид которой ясен из рис. 2. Потребление биогенов из воды при помощи водных корней начинается лишь при превышении растворёнными питательными веществами определённых пороговых концентраций. Соответствующая трофическая функция  $p(i, MT)$ ,  $i = PW, NW$  или  $CW$ , показана на рис. 2. В итоге потребление биогенных элементов полупогружёнными макрофитами задаётся следующим образом [5, 6, 8, 12]:

$$Y_{MR}^{PW+PS} = \min \left\{ p(PW, MT) + q(PS), \frac{p(NW, MT) + q(NS)}{x_{MT}^{NW}} \right\}$$

$$Y_{MT}^{NW+NS} = x_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS}, \quad Y_{MT}^{CW+CS} = x_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS},$$

$$\psi_{MT}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) = Y_{MT}^{PW+PS} + x_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS} + x_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS}$$

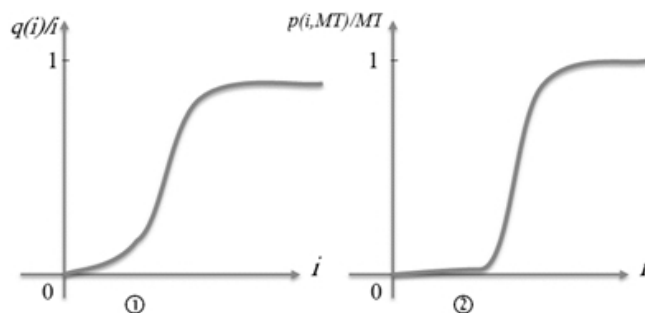


Рис. 2 S-образные трофические функции для полупогружённых макрофитов

#### Потребление биогенных элементов бактериями.

Бактерия как деструктор мёртвого органического вещества, т.е. детрита, может находиться как в толще воды экосистемы пруда, так и её седиментах. Функционируя

во всём пространстве пруда, бактерия имеет доступ ко всем его биогенным элементам. Поэтому в модели потребление биогенных элементов бактериями тоже определяется их потоками из воды и со дна, т.е. описывается аналогично, также, как и для погружённого макрофита, но с другими стехиометрическими коэффициентами  $(x_{BK}^{PW}, x_{BK}^{NW}, x_{BK}^{CW})$  [5, 6, 8, 12]:

$$\psi_{BK}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) = Y_{BK}^{PW+PS} + x_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS} + x_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS}$$

При этом заново предполагается, что для бактерий не существует предпочтения в потреблении биогенов со дна и из воды.

**Температурная функция роста.** Зависимость роста организмов от температуры (рис. 3) описывается модифицированной функцией Лемана [6]:

$$f_j(T) = \begin{cases} \exp \left[ -4,6 \cdot \left( \frac{T_{opt}^j - T}{T_{opt}^j - T_{min}^j} \right)^4 \right], & T < T_{opt}^j \\ \exp \left[ -4,6 \cdot \left( \frac{T - T_{opt}^j}{T_{max}^j - T_{opt}^j} \right)^4 \right], & T \geq T_{opt}^j \end{cases}$$

где  $T_{opt}^j$  – оптимальная температура для развития j-го организма,  $T_{min}^j, T_{max}^j$  – минимальная и максимальная пределы толерантности j-го организма по температуре, соответственно.

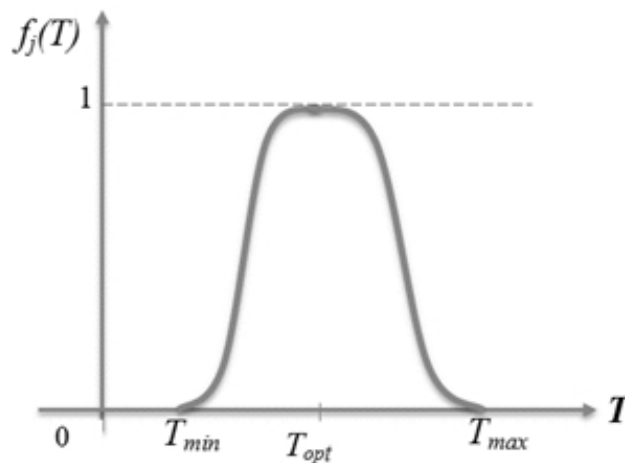


Рис. 3 Температурная функция лимитирования роста

**Функция освещённости для фитопланктона.** Функцию, описывающую лимитирование роста фитопланктона светом (рис. 4) зададим в виде функции Стила [6]:

$$\xi_{FT}(I_o) = \frac{I_h}{I_{opt}^{FT}} \cdot \exp \left( 1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{FT}} \right),$$

где  $I_{opt}^{FT}$  – оптимальная освещённость для фитопланктона,  $I_h$  – освещённость на заданной глубине пруда h.

Для вычисления  $I_h$  используется эмпирический закон Бэра-Ламберта об экспоненциальном затухании света с увеличением глубины:

$$I_h = I_0 \cdot e^{-vh},$$

где  $I_0$  – суммарная солнечная радиация на поверхности пруда. Коэффициент затухания света –  $v$ , естественно, предположить пропорциональным концентрациям взвешенных в воде веществ – фитопланктона, макрофитов и детрита:

$$v = k_w + k_{fr} \cdot (FT + MR) + k_{dm} \cdot d_{dm} \cdot (DW + MT),$$

где  $k_w$  – коэффициент затухания в чистой воде,  $k_{fr}$  – коэффициент затемнения фитопланктоном – FT и погружённым макрофитом – MR,  $k_{dm}$  – коэффициент затемнения детритом – DW и полупогружённым макрофитом – MT,  $d_{dm}$  – суммарная доля детрита и полупогружённого макрофита, взвешенная в воде.

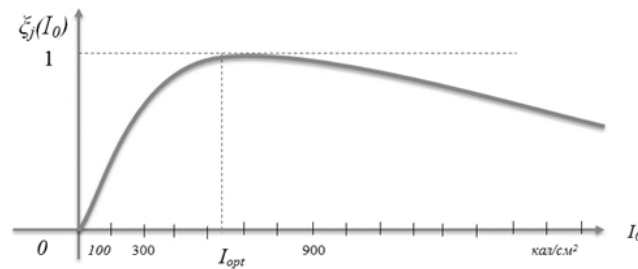


Рис. 4 Общепринятый вид зависимости скорости фотосинтеза от интенсивности света

**Функция освещённости для полупогружённых макрофитов.** Для описания лимитирования роста полупогружённого макрофита светом используется модифицированная формула Стила. В зависимости от его роста она работает в двух режимах [5, 6, 8, 11]:

$$\xi_{MT}(I_0) = \begin{cases} \frac{I_h}{I_{opt}^{MT_1}} \cdot e^{\left(1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{MT_1}}\right)}, & MT < MT_{cr} \\ \frac{I_0}{I_{opt}^{MT_2}} \cdot e^{\left(1 - \frac{I_0}{I_{opt}^{MT_2}}\right)}, & MT \geq MT_{cr} \end{cases}$$

где, по-прежнему,  $I_h$  – освещённость на заданной глубине  $h$  (вычисляется по формуле Бэра-Ламберта) и  $I_0$  – суммарная солнечная радиация на поверхности водоёма, а  $I_{opt}^{MT_1}$  и  $I_{opt}^{MT_2}$  – оптимальные освещённости для роста полупогружённого макрофита под и над водой ( $I_{opt}^{MT_1} \leq I_{opt}^{MT_2}$ ) соответственно и  $MT_{cr}$  – его критическая концентрация, которая оценивается его биомассой в момент выхода стебля из воды.

**Функция освещённости для погружённых макрофитов.** Функция, описывающая лимитирование роста погружённого макрофита светом, является функцией Ди Торо [6]:

$$\xi_{MR}(I_0) = \frac{e}{vh} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{I_h}{I_{opt}^{MR}} \cdot e^{-vh}\right) - \exp\left(-\frac{I_h}{I_{opt}^{MR}}\right) \right],$$

где  $I_{opt}^{MR}$  – оптимальная освещённость для его роста и развития, а остальные коэффициенты и параметры имеют тот же смысл, что и раньше.

**Бактериальная деструкция.** Процессы бактериальной деструкции аппроксимируются уравнениями химической кинетики 1-го порядка, причем предполагается, что детрит вновь распадается на азото- и фосфоросодержащие питательные вещества в соответствии с их стехиометрическим содержанием, и для бактерий нет предпочтения в разложении детрита из воды или со дна.

Тогда скорость протекания процесса бактериального разложения детрита в воде будет описываться формулой [6, 11-14]:

$$r(DW, BK) = \frac{\mu_{DWBK} \cdot DW^s}{K_{DWBK}^s + DW^s} \cdot BK,$$

где  $\mu_{DWBK}$  – максимальная скорость разложения детрита в воде бактериями,  $K_{DWBK}$  – соответствующая константа полунасыщения.

Разложение детрита седиментов будет описываться аналогичной формулой, но с другими коэффициентами. В данном случае  $s$  ( $s=2$ ) можно интерпретировать как количество молекул субстрата (т.е., детрита), «обрабатываемых» одной молекулой фермента, т.е. одним микроорганизмом одновременно.

**Влияние температуры на процесс деструкции.** На скорости процессов деструкции мёртвого органического вещества, в результате которого образуются важнейшие биогенные элементы – фосфор, азот и углерод, существенно влияет температура и наличие в воде растворенного кислорода. Поскольку бактериальные процессы ингибируются температурами практически недостижимыми в условиях естественных водоёмов ( $> 50 - 60^\circ C$ ) то для описания температурной зависимости деструкции мёртвого органического вещества в воде, в этом случае, используется формула Вант-Гоффа [6]:

$$f_{DW}(T) = 2^{\frac{(T-T_0)}{10}},$$

отражающая факт увеличения скорости процессов в два раза при увеличении температуры на  $10^\circ C$ . Здесь  $T$  – температура воды в толще водоёма,  $T_0$  – температура, при которой измерены остальные коэффициенты, входящие в описание процесса. Температурная зависимость процесса деструкции детрита седиментов  $f_{DS}(T)$  задаётся аналогично.

**Действия законов стехиометрии в процессе разложения детрита до биогенных элементов.** Скорость разложения детрита воды до фосфора воды определяется следующей формулой [6-14]:

$$A_{DWPW} = f_{DW}(T) \cdot k_{des}^{DW} \cdot x_{BK}^{PW} \cdot \frac{r(DW, BK)}{x_{BK}^{PW} + x_{BK}^{NW} + x_{BK}^{CW} + k_{DS}^{DW}}$$

где  $k_{des}^{DW}$  – коэффициент деструкции детрита в воде ( $0 < k_{des}^{DW} < 1$ ),  $x_{BK}^{PW}$ ,  $x_{BK}^{NW}$ ,  $x_{BK}^{CW}$  – стехиометрические коэффициенты бактерий при разложении детрита в воде для фосфора, азота и углерода воды, соответственно,  $k_{DS}^{DW}$  – доля детрита воды выходящего из круговорота в виде труднорастворимых фракций и осевшего на дне водоёма.

Разложения детрита в воде до азота и углерода воды, соответственно, будут: ]

$$A_{DWNW} = x_{BK}^{NW} \cdot A_{DWPW},$$

$$A_{DWCW} = x_{BK}^{CW} \cdot A_{DWPW}$$

Разложения детрита в осадках до фосфора, азота и углерода осадков определяется аналогично, но с соответствующими другими коэффициентами.

**Взаимопереходы биогенных элементов воды и осадков:** осадочение, диффузия. Растворенный кислород воды расходуется при так называемом биохимическом потреблении кислорода (БКП). Так как кислород по объективным причинам не является переменной модели, то предполагается, что скорость деструкции от концентрации этого важнейшего элемента не зависит. На самом же деле, в анаэробных условиях разложение детрита идёт значительно более медленно (в 5-7 раз), чем в аэробных. Однако, другой процесс, – поступление фосфора из осадков, – при этом происходит более интенсивно: нерастворимые формы переходят в растворимые и возвращаются в круговорот. Наоборот, в аэробных условиях минеральный фосфор переходит в нерастворимые формы и оседает на дно. Процесс оседания фосфора воды на дно пруда и его смешивания с фосфором осадков в модели описывается формулой

$$A_{PWPS} = k_{sed}^{PW} \cdot PW,$$

где  $k_{sed}^{PW}$  – коэффициент осадочения нерастворимых соединений фосфора воды. Растворение детритного фосфора осадков и его возвращение в круговорот задается формулой

$$A_{PSPW} = k_{dif}^{PS} \cdot PS,$$

где  $k_{dif}^{PS}$  – коэффициент диффузии фосфора осадков.

Соответствующие взаимодействия между азотом воды и осадков задаются формулами:

$$A_{NWNW} = k_{sed}^{NW} \cdot NW, A_{NSNW} = k_{dif}^{NS} \cdot NS,$$

где  $k_{sed}^{NW}$  – коэффициент осадочения азота воды, а  $k_{dif}^{NS}$  – коэффициент диффузии азота осадков. Точно такие же формулы применяются для описания взаимодействий детрита воды и осадков [6].

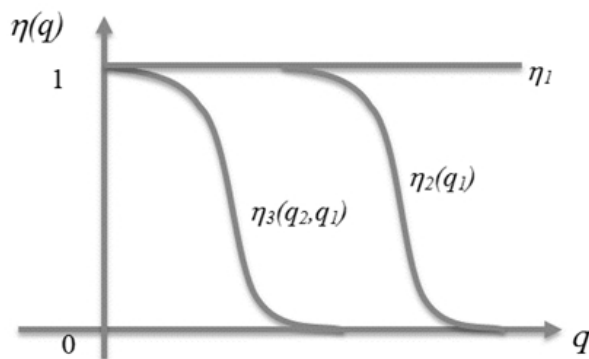
**Выборное питание рыб.** Рыбам свойственно избирательность питания, т.е. питание с переключением. Например, излюбленным кормом пестрого толстолобика является зоопланктон. Но когда зоопланктона мало или не подходит его видовой состав, пестрый толстолобик переходит на питание заменяющим кормом – бактериопланктоном или фитопланктоном. Если и эта пища становится недостаточной, то он может перейти на вынужденный корм, т.е. детрит.  $\eta_j < \eta_i$

**Математическое описание питания с переключением.** Для описания питания с переключением используем практику моделирования по рыбоводному пруду с белым амуром [6, 11-14]. Пусть имеющиеся корма –  $q_i$

( $i = 1, 2, \dots$ ) упорядочены по предпочтению  $q_1, q_2, \dots$ , причём  $q_i$  – концентрация излюбленного корма. Зависимость вероятности потребления объекта  $i$ -го типа  $\eta_i$  от суммарной концентрации объектов питания

$$q = \sum_{i=1}^n q_i,$$

где  $q_i$  – концентрация  $i$ -го вида жертв, находится следующим образом: вероятность  $\eta_i = 1$  при любом наборе  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , а вероятность перехода на менее предпочтительный корм  $\eta_i$  есть функция концентрации  $q_{i-1}$ , т.е.  $\eta_i(q_{i-1})$ ,  $i = 2, 3, 4, \dots$ . Кривые  $\eta_i(q)$ ,  $i = 2, 3, \dots$  имеют перевернутый s-образный вид (рис. 5), причем при  $j > i$  и



**Рис. 5** Питание с переключением для рыб:  $q = q_i$  – концентрации объектов питания,  $i = 2, 3, 4, \dots$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \eta_i(q) = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \eta_i(q) = 0.$$

Это означает, что переходный режим не чётко выражен, а охватывает полосу значений  $q$ , хотя зависимость  $\eta_i$  от  $q$  при больших  $q$  кажется сомнительной. Видимо, ближе к реальности зависимость  $\eta_2(q_1)$ ,  $\eta_3(q_1, q_2)$ ,  $\eta_4(q_1, q_2, q_3)$  и т.д. Так, например, для описания переключения пёстрого толстолобика – РТ от питания излюбленным кормом, т.е. зоопланктоном – ZО, на питание заменяющим кормом, т.е. бактериями – ВК в модели используется функция

$$\eta(ZO) = \frac{e^{-\lambda_{ZO} \cdot (ZO - m_{ZO})}}{1 + e^{-\lambda_{ZO} \cdot (ZO - m_{ZO})}},$$

где  $\lambda_{ZO}$  – параметр, характеризующий крутизну кривой,  $m_{ZO}$  – коэффициент полуобеспеченности зоопланктоном, т.е. значение ZО, при котором  $\eta(ZO) = 1/2$  Тогда потребление бактерий пёстрым толстолобиком в случае недостатка зоопланктона запишется в виде [6, 11, 12]

$$A_{BKPT} = f_{PT}(T) \cdot \min\{[r(ZO_{sr}, PT) - r(ZO, BT)], r(BKPT) \cdot \eta(ZO)\} \cdot (1 - \delta_{PT}),$$

где  $ZO_{sr}$  – критическое значение зоопланктона, при котором пёстрый толстолобик переходит на питание бактериями. Разность двух трофических функций под знаком минимума обеспечивает ограничение скорости роста рыб так, чтобы она была не выше той, которая достигнута на излюбленном корме (при  $ZO = ZO_{sr}$ ). При нехватке бактерий или же одновременно и второго заменяющего корма, т.е. фитопланктона – FT, потребление которой описывается аналогично как потребление бактерий – ВК, пёстрый толстолобик – РТ переходит на питание вынужденным кормом, т.е. детритом – DW:

$$A_{DWPT} = f_{PT}(T) \cdot \min\{\min\{[r(ZO_{cr}, PT) - r(ZO, PT)], [r(FT_{cr}PT) + r(BK_{cr}, PT)] \cdot \eta(ZO)\} - \min\{[r(ZO_{cr}, PT) - r(ZO, PT)], r(FT, PT) + r(BK, PT)] \cdot \eta(ZO)\}, r(DW, PT) \cdot [\eta(FT) + \eta(BK) \cdot \eta(ZO)] \cdot (1 - \delta_{PT})\}.$$



Этот процесс может продолжаться и дальше. В этом случае переключение – двух-ступенчатое, трехступенчатое и т.д. Потребление излюбленного корма, т.е. зоопланктона пёстрым толстолобиком представляется в виде

$$A_{ZOPT} = f_{PT}(T) \cdot r(ZO_{cr}, PT) \cdot (1 - \delta_{PT})$$

**Метаболизм.** Выделение живыми объектами водоёма продуктов метаболизма можно в первом приближении считать пропорциональным суммарному потреблению кормовых объектов. Выделение продуктов метаболизма и переход их в детрит в модели представлен следующим образом (на примерах фитопланктона, бентоса и пёстрого толстолобика, соответственно) [6]:

$$A_{FTDW}^1 = (A_{PWFT} + A_{NWFT} + A_{CWFT}) \cdot \frac{\delta_{FT}}{(1 - \delta_{FT})},$$

$$A_{BNDS}^1 = A_{BKBN} \cdot \frac{\delta_{BN}}{(1 - \delta_{BN})},$$

$$A_{PTDW}^1 = (A_{ZOPT} + A_{FTPT} + A_{BKPT} + A_{DWPT}) \cdot \frac{\delta_{PT}}{(1 - \delta_{PT})},$$

где  $\delta_{FT}$ ,  $\delta_{BN}$ ,  $\delta_{PT}$  – соответственно, коэффициенты метаболизма фитопланктона, бентоса и пёстрого толстолобика,  $A_{PWFT}$ ,  $A_{NWFT}$ ,  $A_{CWFT}$  – потоки, описывающие потребление фосфора, азота и углерода воды фитопланктоном,  $A_{BKBN}$  – поток, описывающий потребление бактерий бентосом и  $A_{ZOPT}$ ,  $A_{FTPT}$ ,  $A_{BKPT}$ ,  $A_{DWPT}$  – потоки, описывающие потребление зоопланктона, фитопланктона, бактерий и детрита воды пёстрым толстолобиком, соответственно.

Кроме того, для рыб учитывается зависимость усвоения пищи от величины рациона. Так, например, при обильном питании пёстрого толстолобика пища заглатывается непрерывно и проходит через кишечник с такой быстротой, что лишь 30-40 % ее усваивается, тогда, как при умеренном питании усваивается в 2 раза больше [6]. Таким образом:

$$A_{PTDW}^2 = R_{PT}^2 \cdot \frac{\delta_{PT}^2}{R_{PT}^{\max}},$$

где

$$R_{PT} = A_{ZOPT} + A_{FTPT} + A_{BKPT} + A_{DWPT},$$

$R_{PT}^{\max}$  – максимальный рацион для пёстрого толстолобика,  $\delta_{PT}^S$  – суммарный метаболический параметр для пёстрого толстолобика.

**Смертность.** Известно, что смертность живых организмов зависит от наличия растворенного кислорода в воде. В нашей модели предполагается, что наличие кислорода в воде не лимитирует процессов жизнедеятельности организмов и находится на уровне насыщенности. Поэтому, смертность организмов, жизнедеятельность которых проходит в толще воды и их переход в детрите воды задаётся линейной функцией биомассы или концентрации этих живых объектов [6]:

$$A_{iDW}^3 = k_i^{cm} \cdot i,$$

где  $k_i^{cm}$  – коэффициент смертности  $i$ -го организма, живущего в толще воды  $i = FT, ZO, BK, BT, PT, CR$  или  $BA$ . Образующийся при этом детрит состоит из углерода, азота и фосфора, причём лишь только азот и фосфор воды включены в число переменных модели. Смертность донных организмов, таких как бентос и бактерий, на дне аналогично задаётся линейной функцией их биомассы с той лишь разницей, что они после гибели превращаются в детрит седиментов. Процесс смертности или точнее отмирания макрофитов связано с колебанием температурного фактора среды, на рассмотрение который остановимся чуть позже. В итоге поток, характеризующий, например, переход фитопланктона в детрит воды, определяется следующим образом

$$A_{FTDW} = A_{PTDW}^1 + A_{PTDW}^3 = (A_{PWFT} + A_{NWFT} + A_{CWFT}) \cdot \frac{\delta_{FT}}{(1-\delta_{FT})} + k_{FT}^{cm} \cdot FT.$$

Соответствующий поток превращения бентоса в детрите дна вычисляется так:

$$A_{BNDS} = A_{BNDS}^1 + A_{BNDS}^3 = A_{BKBN} \cdot \frac{\delta_{BN}}{(1-\delta_{BN})} + k_{BN}^{cm} \cdot BN.$$

Естественная смертность рыб в условиях оптимального режима в выростном нагульном пруду должна отсутствовать. Но, учитывая вероятности паразитических и прочих инфекционных заболеваний рыбных популяций пруда, в модели учтена смертность рыб. Таким образом, например, поток  $A_{PTDW}$  характеризуется так [6]:

$$A_{PTDW} = \left( \delta_{PT} + \delta_{PT}^S \cdot \frac{R_{PT}}{R_{PT}^{max}} \right) \cdot \frac{R_{PT}}{1-\delta_{PT}} + k_{PT}^{cm} \cdot PT.$$

**Описание жизненного цикла макрофитов.** Теперь рассмотрим описание процессов, связанных с макрофитами, опыт моделирования динамики которых для прудов пока ничтожен. Предполагается, что жизненный цикл, т.е. процессы роста, развития, лизис растений, запасание биогенов в корнях и отмирания макрофитов в экосистеме происходят согласно следующей схеме [5, 6, 8] (рис. 6):

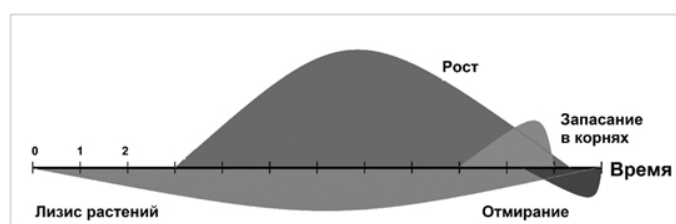


Рис. 6 Жизненный цикл макрофитов

**Рост.** Как отметили выше, продукционный процесс для всех продуцентов, в общем, и для макрофитов, в частности, лимитируется биогенными элементами, согласно принципу лимитирующих факторов, а также температурой и солнечным светом. Стехиометрическое потребление биогенных элементов макрофитами, с учётом закона лимитирующих факторов Либиха –  $\psi_{MT}(PW, PS, NW, NS, CW, CS)$ ,  $\psi_{MR}(PW, PS, NW, NS, CW, CS)$ , и связанных с ними лимитирующих функций освещённости –  $\xi_{MT}(I_0)$ ,  $\xi_{MR}(I_0)$  и температуры –

$$f_{MT}(T), f_{MR}(T),$$

т.е. описание процесса роста макрофитов, были подробно рассмотрены выше. Здесь рассмотрим остальные процессы.

**Лизис.** Лизис растений, так же, как и смертность для остальных живых организмов, считается пропорциональным концентрации (биомассе) макрофитов, т.е. задается функцией

$$A_i^{liz} = k_i^{liz} \cdot i,$$

где  $k_i^{liz}$  – коэффициент автолиза  $i$ -го организма ( $i = MT, MR$ ).

**Запасание биогенов в корнях.** Начало процесса запасания биогенов в корнях (а в нашем случае в детрите дна) определяется температурой (рис.7) и вычисляется по следующей формуле [5, 6]:

$$f_i^{zp}(T) = \begin{cases} \frac{1}{T} - \Theta_1 T < T_{\min}^{zp} \\ 0, T_{\min}^{zp} \leq T < T_{\max}^{zp} \\ \frac{1}{T_{cr}^{zp} - T} - \Theta_2, T \geq T_{\max}^{zp} \end{cases}$$

где  $T$  – температура воды,  $T_{\min}^{zp}$ ,  $T_{\max}^{zp}$  – минимальная и максимальная температуры, при которых макрофиты начинают запасать биогенные элементы в корнях,  $T_{cr}^{zp}$  – некоторая критическая температура ( $T_{cr}^{zp} > T_{\max}^{zp}$ ), при которой макрофиты запасают биогены с бесконечной скоростью,

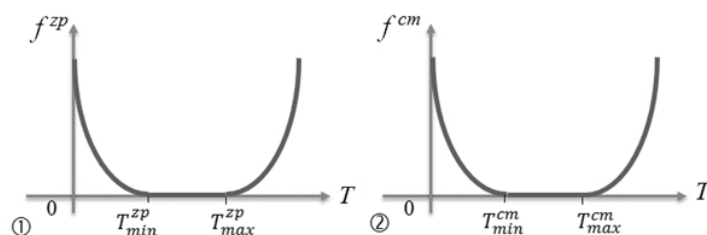
$$\Theta_1 = \frac{1}{T_{\min}^{zp}}, \Theta_2 = \frac{1}{T_{cr}^{zp} - T_{\max}^{zp}}$$

**Отмирание макрофитов.** Начало процесса отмирания описывается аналогично, но с другими критическими температурами (рис. 7) [5, 6]:

$$f_i^{cm}(T) = \begin{cases} \frac{1}{T} - \Xi_1 T < T_{\min}^{cm} \\ 0, T_{\min}^{cm} \leq T < T_{\max}^{cm} \\ \frac{1}{T_{cr}^{cm} - T} - \Xi_2, T \geq T_{\max}^{cm} \end{cases}$$

где  $T$  – опять температура воды,  $T_{\min}^{cm}$ ,  $T_{\max}^{cm}$  – минимальная и максимальная пределы толерантности макрофитов по температуре, при которых они начинают вымирать и превращаться в детрит,  $T_{cr}^{cm}$  – некоторая критическая температура ( $T_{cr}^{cm} > T_{\max}^{cm}$ ), при которой макрофиты вымирают мгновенно,

$$\Xi_1 = \frac{1}{T_{\min}^{cm}}, \Xi_2 = \frac{1}{T_{cr}^{cm} - T_{\max}^{cm}}.$$



**Рис. 7** Определение начала процессов запасания (1) и отмирания (2) макрофитов. Здесь  $T_{\min}^{zp} > T_{\min}^{cm}$ ,  $T_{\max}^{zp} < T_{\max}^{cm}$ .

### 3 Заключение

Итак, нами достаточно детально представлены основные математические выражения и соотношения для потоков вещества, математически описывающие эффекты распределения веществ в водоёме и учёта специфических внешних управляющих воздействий на экосистему выростного карпового рыбоводного пруда тепловодного хозяйства. Далее, предстоит трансформировать данную математическую модель в компьютерную, т.е. необходимо проектировать и реализовать компьютерный инструментарий для целей исследования, прогнозирования и управления продуктивностью рыбоводных прудов Узбекистана.

### Литература

- [1] *Мирзоев С. Х., Элмуродова Б. Э., Комилийён Ф. С.* О двух моделях управляемых экосистем карповых рыбоводных прудов, внедрённых в условиях Таджикистана. — Душанбе: ФМГУ. 2018. С. 60–66.
- [2] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Концептуальная модель экосистемы пруда с тремя видами рыб. — Известия вузов Кыргызстана. 2015. №7. С. 6–9.
- [3] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Белый амур: математическое моделирование. — Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел. (Матер. междунауч. конф. посвящ. 85-летию со дня рожд. проф. Г.Б. Бабаева). — Душанбе. 2013. С. 35–36.
- [4] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Белый амур: проведение компьютерных экспериментов с моделью рыбоводного пруда. — Наука и инновация. 2014. №1. С. 8–13.
- [5] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Жизненный цикл макрофитов: описание протекающих процессов, математическое моделирование. — Вестник Таджикского национального университета, 2012. №1/3 (85). С. 42–47.
- [6] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Имитационная модель динамики экосистемы макрофитного рыбоводного пруда. — ISBN 978-3-659-80543-1. — 135 с.
- [7] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Имитационная модель экосистемы рыбоводного пруда с белым амуром. — Душанбе: ТНУ. 2014. С. 63–65.
- [8] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Имитационное моделирование рыбной популяции экосистемы пруда. — Известия АН РТ. Отд-ние физ.мат., хим., геол. и техн. наук, 2013. №2 (151). С. 52–64.
- [9] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Инструмент исследования по экспериментированию и прогнозированию динамики экосистемы рыбоводного пруда. — Наука: 2015. №5. С. 27–29.
- [10] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Концептуальное моделирование экосистемы макрофитно-рыбоводного пруда. — Вестник Таджикского национального университета, Душанбе: 2012. №1/3 (85). С. 58–66.
- [11] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Математическое моделирование эколого-экономической системы пруда. — Вестник Таджикского национального университета, Душанбе: 2013. №1. С. 57–64.
- [12] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* Математическое моделирование экосистемы макрофитно-рыбоводного пруда с белым амуром. — Вестник Педагогического университета, 2013. №5 (54). С. 109–115.
- [13] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л.* О разработке математической модели экосистемы рыбоводного пруда. — Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2015. №5. С. 18–22.

- [14] *Комилов Ф. С., Косимов И. Л., Одинаев Р. Н.* Ғояҳои асосии тархрезии компютериҳои динамикаи экосистемаи макрофитии ҳавзи моҳипарварӣ бо таҳқиқи маҳсулнокии амурри сафед [Основные концепции компьютерного моделирования динамики макрофитной экосистемы рыбоводного пруда с исследованием белого амура на максимальной продуктивности]. — Вестник Таджикского национального университета, 2016. № 1-1 (192). С. 65-73.

*Поступила в редакцию 28.09.2018*

UDC 519.6

## MATHEMATICAL MODELING OF THE GROWING CARP FISHPOND ECOSYSTEM OF WARM-WATER FARM

*Komiliyon F. S., Elmurodova B. E.*

komfaiz@mail.ru

Tajik National University, Rudaki Ave., 17, Dushanbe, Tajikistan

The article is devoted to the mathematical modeling of the growing carp fishpond ecosystem in the warm-water farm. The purpose of developing a mathematical model is to identify the regularities of the functioning of the pond ecosystem, with ability to manage its biological processes that will be used to improve its fish productivity.

The functional dependencies of model variables and external functions, trophic interactions and trophic functions, the effects of stoichiometric laws in the process of growth and development of producers, the consumption of biogenic elements by phytoplankton, bacteria and macrophytes are described. The ways of taking into account the influence of climatic factors are considered: the temperature function of the growth of organisms, the illumination function for phytoplankton and macrophytes. The process of bacterial destruction, the effects of stoichiometry laws during the decomposition of detritus to biogenic elements, nutrition with switching for fish, metabolism and mortality of aquatic organisms are mapped.

**Keywords:** mathematical modeling, ecosystem, fishpond, warm-water farm, fish, carp, grass carp, white silver carp, variegated silver carp, benthos, macrophyte, phytoplankton, zooplankton, nitrogen, phosphorus, carbon, detritus.

**Citation:** Komiliyon F. S., Elmurodova B. E. 2018. Mathematical modeling of the growing carp fishpond ecosystem of warm-water farm. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 6(18):57–77.