

УДК 51-7:519.63:519.614

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛИ ТЕРМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ БУНТА ХЛОПКА-СЫРЦА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ И ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

Хужаев Ж.И.

старший научный сотрудник-исследователь
Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий,
тел.: +(99890) 922-26-84, e-mail: jamolhoja@mail.ru

Равшанов З.Н.

научный сотрудник
Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий,
тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Приводится математическая модель процесса теплопередачи в трехмерном объеме в условиях теплообмена с окружающей средой и внутреннего тепловыделения согласно экспоненциальному закону. Форма бунта принята в виде прямоугольного параллелепипеда, на нижней границе которого наложено условие второго рода, на верхней границе – условие третьего рода, а на боковых гранях – условия первого рода. Для численного решения задачи использован дифференциально-разностный метод. Дискретизация свободных переменных и искомой функции произведена в три этапа: по времени и абсциссе, по ординате и по аппликате. В первых двух этапах реализован метод прямых, а на последнем этапе – метод конечных разностей с привлечением прогоночного процесса. Обеспечены первый порядок точности аппроксимации по времени и второй – по декартовым координатам. Представлены примеры результатов вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: математическая модель, бунт хлопка-сырца, термическое состояние, теплопередача, дифференциально-разностный метод, конечно-разностный метод, метод прогонки, визуализация результатов.

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELS OF THE THERMAL STATE OF RAW COTTON WITH THE ACCOUNT OF HEAT EXCHANGE WITH THE ENVIRONMENT AND INTERNAL HEAT RELEASE Khujaev J.I., Ravshanov Z.N.

A mathematical model of the heat transfer process in a three-dimensional volume is presented in the conditions of heat exchange with the environment and internal heat release according to the exponential law. The form of the mass is taken in the form of a rectangular parallelepiped, on the lower boundary of which a condition of second type, on the upper boundary - a condition of the third type, and on the lateral faces - conditions of the first type are imposed. A differential-difference method was used to solve the problem numerically. The discretization of the free variables and the desired function is carried out in three stages: due to time and abscissa, due the ordinate and due to the applicate. In the first two stages, the method of lines, and at the last stage - the method of finite differences with the involvement of the sweeping process is implemented. The first order of accuracy of approximation in time and the second is in Cartesian coordinates is provided. Examples of the results of a computational experiment are presented.

Keywords: mathematical model, raw-cotton mass, thermal state, heat transfer, differential-difference method, finite difference method, sweeping method, visualization of results.

TASHQI MUHIT BILAN ISSIQLIK ALMASHINUVI HAMDA ICHKI ISSIQLIK AJRALIB CHIQUISHI HISOBGA OLINGANDAGI PAXTA BUNTINING ISSIQLIK HOLATI MATEMATIK VA SONLI MODELI Xo'jayev J.I., Ravshanov Z.N.

Tashqi muhit bilan issiqlik almashinuvi hamda eksponensial qonun bo'yicha ichki issiqlik ajralib chiqishi sharoitidagi uch o'lchamli massada (paxta bunti misolida) issiqlik almashinuvi jarayonining matematik modeli keltirilmoqda. Bunt to'g'ri burchakli parallelepiped shaklida qaralgan bo'lib, pastki asosiga ikkinchi jins, ustki asosiga uchinchi jinsva yon yoqlariga birinchi jins chegara shartlari qo'yilgan. Masalani sonli yechish uchun differensial –ayirmali usuldan foydalanilgan. Erkli o'zgaruvchilarni va noma'lum funksiyani diskretlash uch bosqichda amalga oshirilgan: vaqt va absissa bo'yicha, ordinate bo'yicha, applikata bo'yicha. Dastlabki ikki bosqichda to'g'ri chiziqqlar usulidan, so'nggi

bosqichda esa progonka jarayoni jalb etilgan holda chekli ayirmalar usulidan foydalanilgan. Vaqt bo'yicha birinchi darajali, dekart koordinatalari bo'yicha ikkinchi darajali approksimatsiya aniqligi ta'minlangan. Hisob tajribalari natijalari keltirilmoqda.

Tayanch iboralar: matematik model, paxta xom-ashyosi bunti, termik holat, issiqlik o'tkazish, differensial-ayirmali usul, chekli ayirmali usul, progonka (haydash) usuli, natijalarni vizuallashtirish.

1. Введение

Процессы бунтирования и хранения хлопка-сырца регламентированы как единый технологический процесс. Разработаны требования и рекомендации по этому процессу на основе многолетнего опыта [1].

Бунт в плане имеет форму прямоугольника. Притом длинная сторона параллельна меридиану местности. Его высота может составить до 8 м.

Через определенный срок, в зависимости от влажности массы, производится продувание бунта, для чего через нижнее основание по длине бунта проводится проём с высотой 2 м и шириной 1 м. Продувание массы проводится в режиме отсоса через один конец проёма, а второй конец проёма закрывается наглухо. Просачиваемый через массу воздушный поток устраняет локализацию теплового напряжения, а низкое статическое давление отсоса способствует снижению температуры испарения влаги [2-4].

Охватить все эти тонкости технологии хранения хлопка-сырца при разработке математической модели можно. Но трехмерность задачи, сложная конфигурация области расчета и одновременный учет тепло- и влагопереноса с малыми коэффициентами на уровне молекулярного обмена, учет воздействия внешних факторов в виде солнечной радиации и температуры окружающей среды, процесс испарения и другие факторы накладывают определенные трудности как при математическом моделировании объекта, так и в процессе решения задачи и при проведении вычислительного эксперимента. В связи с этим необходимо организовать исследовательскую работу по принципу «от простого к сложному», постепенно усложняя математическую модель и методы решения задачи. Например, в первом приближении можно поставить задачу о термическом состоянии хлопка-сырца в бунте без проёма.

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных разработаны различные методы [5-7]. Но в рамках статьи для численного решения трехмерной задачи теплопередачи использовали дифференциально-разностный метод, сущность которого сводится к построению отдельных дифференциальных уравнений по той или иной координате, минуя прогоночный процесс. В этом методе определенная нагрузка падает на математику: необходимо формировать фундаментальную и диагональную матрицы, необходимые для выделения сеточных функций согласно матрице перехода. В рамках работы фундаментальная и диагональная матрицы заимствованы из работ [8-9], а граничные условия задачи сформированы по результатам этих работ.

2. Постановка задачи

Внешняя форма бунта хлопка-сырца близка к прямоугольному параллелепипеду [1]. Поэтому область расчета можно принимать как прямоугольный параллелепипед. В первом приближении можно и не учитывать сквозной проём бунта.

Процесс теплообмена в нем описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

где $f = f(x, y, z, t)$ – интенсивность внутренних сплошных и дискретных источников тепла ($K \cdot c^{-1}$); a – коэффициент температуропроводности массы ($M^2 c$), изменением которого в зависимости от координат и времени пренебрегается [3, 4].

Параллелепипед расположен в первом октанте декартовой системы координат, и размеры его по координатам составляют l_x, l_y, l_z .

Заданы начальное

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad (2)$$

и граничные условия на гранях прямоугольного параллелепипеда:

$$T(0, y, z, t) = \mu_{x0}(y, z, t), \quad (3)$$

$$T(l_x, y, z, t) = \mu_{xl}(y, z, t), \quad (4)$$

$$T(x, 0, z, t) = \mu_{y0}(x, z, t), \quad (5)$$

$$T(x, l_y, z, t) = \mu_{yl}(x, z, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} = \nu_{z0}(x, y, t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(x, y, l_z, t)}{\partial z} = \eta [T_{oc}(t) - T(x, y, l_z, t)]. \quad (8)$$

Здесь $T_{oc}(t)$ – температура окружающей среды, имеющая постоянное значение. Возможен вариант использования пятиэтапной аппроксимации температуры окружающей среды [10]. Но этот вариант громоздкий для случая решения трехмерной задачи. Поэтому учет температуры окружающей среды в граничных условиях произведем в упрощенном гипотетическом варианте.

Среднесуточное значение температуры окружающей среды в зависимости от даты τ задаем приближенно:

$$T(\tau) = T_{\min g} + (T_{\max g} - T_{\min g}) \sin 2\pi \frac{\tau - 121}{\Pi_p},$$

где Π_p – продолжительность астрономического года земли; $T_{\min g}$ – среднесуточное значение

температуры окружающей среды; $T_{\max g} - T_{\min g}$ – его суточная амплитуда.

Суточное изменение температуры окружающей среды с интервалом 25° C (континентальный климат) опишем формулой

$$T(t) = T(\tau) + 12.5T_a(t),$$

где

$$T_a(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{v=1}^6 \left(A_0 \cos \frac{2\pi vt}{\Pi} + B_0 \sin \frac{2\pi vt}{\Pi} \right)$$

– суточное изменение температуры окружающей среды в интервале [-1; 1] с наилучшим порядком аппроксимации, согласно результатам натурных наблюдений [10]. Коэффициенты тригонометрического полинома составили:

$$A_0 = -0.36800848; A_1 = 0.87952815;$$

$$A_2 = 0.30449003; A_3 = 0.01014991;$$

$$A_4 = -0.03398899; A_5 = -0.00319683;$$

$$A_6 = 0.00810565; B_1 = 0.33607974;$$

$$B_2 = 0.04234428; B_3 = -0.04441236;$$

$$B_4 = -0.01811762; B_5 = 0.00593935; B_6 = 0.00312235.$$

В качестве начальной температуры массы можно принимать среднее значение температуры за τ -е сутки $T_{00} = T(\tau)$.

3. Численный метод решения задачи

Для решения задачи (1)-(8) введем сетку по переменным x, y и z :

$$\omega_x = \left(x_i = ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x + 1; h_x = \frac{l_x}{N_x + 1} \right),$$

$$\omega_y = \left(y_j = jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y + 1; h_y = \frac{l_y}{N_y + 1} \right),$$

$$\omega_z = \left(z_k = kh_z, k = 0, 1, \dots, N_z + 1; h_z = \frac{l_z}{N_z + 1} \right),$$

и по времени $t_n = n\tau$. Осуществляется поэтапный переход к дискретным координатам и функциям согласно положениям дифференциально-разностного метода, известного также как метод прямых [8-9].

Сначала в уравнении и краевых условиях переходим к дискретным координатам по времени t и координате x , введя новые искомые $u_i^{n+1}(y, z)$ и функции $f_i^{n+1}(y, z)$, $\mu_{x0}^{n+1}(y, z)$, $\mu_{xl}^{n+1}(y, z)$, $\mu_{y0,i}^{n+1}(z)$, $\mu_{yl,i}^{n+1}(z)$, $\nu_{z0,i}^{n+1}(y)$ и T_{oc}^{n+1} .

Для внутренних узлов $i = 1..N_x$ отрезка с длиной l_x уравнение (1) аппроксимируется в виде

$$\frac{1}{\tau} u_i^{n+1} + \frac{a}{h_x^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^{n+1} + f_i^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_i^n = 0. \quad (9)$$

С учетом реализации граничных условий (3) и (4) в (9) можно составить матричное уравнение

$$\frac{1}{\tau} U^{n+1} + \frac{a}{h_x^2} M_x U^{n+1} + a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^{n+1} + F^{n+1} = 0, \quad (10)$$

где $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N_x}^{n+1})^*$,

$$F^{n+1} = \left(f_1^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_1^n + \frac{a}{h_x^2} \mu_{x0}^{n+1}, f_2^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_2^n, \dots, \right.$$

$$\left. f_{N_x-1}^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_{N_x-1}^n, f_{N_x}^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_{N_x}^n + \frac{a}{h_x^2} \mu_{xl}^{n+1} \right)^*$$

$$M_x = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N_x}$$

Вводятся фундаментальная B_x и диагональная Λ_x матрицы с элементами [8, 9]:

$$b_{x,s,p} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x + 1}} \sin \frac{sp\pi}{N_x + 1},$$

$$\lambda_{x,s} = -2 \left(1 + \cos \frac{s\pi}{N_x + 1} \right)$$

при $s, p = 1, 2, \dots, N_x$.

Известно, что матрицы M_x и Λ_x взаимно подобны:

$$M_x = B_x \Lambda_x B_x^{-1},$$

где B_x^{-1} – обратная B_x матрица, равная в данном случае матрице B_x .

Уравнение (10) умножаем слева на матрицу B_x^{-1} и, с учетом $B_x^{-1} M_x U^{n+1} = \Lambda_x U^{(1)}$, составляем новое матричное уравнение:

$$\frac{1}{\tau} U^{(1)} + \frac{a}{h_x^2} \Lambda_x U^{(1)} + a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^{(1)} + F^{(1)} = 0, \quad (11)$$

где

$$U^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_{N_x}^{(1)})^* = B_x^{-1} U^{n+1} = B_x U^{n+1} =$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{x,1,p} u_p^{n+1}, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,2,p} u_p^{n+1}, \dots, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,N_x,p} u_p^{n+1} \right)^*$$

$$F^{(1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_{N_x}^{(1)})^* = B_x^{-1} F^{n+1} = B_x F^{n+1} =$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{x,1,p} (F^{n+1})_p, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,2,p} (F^{n+1})_p, \dots, \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,N_x,p} (F^{n+1})_p \right)^*.$$

Здесь $(F^{n+1})_p$ – p -й элемент вектор-столбца F^{n+1} .

Из уравнения (11) переходим к N_x автономным уравнениям:

$$\frac{1}{\tau} u_i^{(1)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} u_i^{(1)} + a \left(\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial z^2} \right) + f_i^{(1)} = 0. \quad (12)$$

На втором этапе дискретизации в уравнении (12) из координаты y переходим к конечным разностям, для чего вводим функции $u_{i,j}^{(2)}(z)$ и $f_{i,j}^{(2)}(z)$ взамен функций $u_i^{(1)}(y, z)$ и $f_i^{(1)}(y, z)$.

Нам нужны значения функции $u_{i,j}^{(2)}(z)$ на границах $j = 0$ и $j = N_y + 1$. Находим их согласно введенной замене переменных:

$$\mu_{y0,i}^{(2)}(z) = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} \mu_{y0}^{n+1}(ph_x, z), \quad (13)$$

$$\mu_{yl,i}^{(2)}(z) = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} \mu_{yl}^{n+1}(ph_x, z). \quad (14)$$

Также в последующем нам нужны граничные условия (7) и (8) по третьей координате. Запишем их в виде

$$\frac{\partial u_{i,j}^{(2)}(0)}{\partial z} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} v_{z0,i,p}^{n+1}(jh_y) = v_{z0,i,j}^{(2)},$$

$$\frac{\partial u_{i,j}^{(2)}(l_z)}{\partial z} = \eta [T_{oc}^{(2)} - u_{i,j}^{(2)}(l_z)],$$

где $T_{oc}^{(2)} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} T_{oc}^{n+1}$.

Реализация условий (13) и (14) в (12) и само уравнение (14) при дискретизации по координате y приводят к матричному уравнению:

$$\frac{1}{\tau} U_i^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} U_i^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} M_y U_i^{(2)} + a \frac{d^2 U_i^{(2)}}{dz^2} + F_i^{(2)} = 0, \quad (15)$$

где $U_i^{(2)} = (u_{i,1}^{(2)}, u_{i,2}^{(2)}, \dots, u_{i,N_y}^{(2)})^*$,

$$F_i^{(2)} = \left(f_{i,1}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,1}^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \mu_{y0,i}^{(2)}, f_{i,2}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,2}^{(2)}, \dots, f_{i,N_y-1}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,N_y-1}^{(2)}, f_{i,N_y}^{(2)} - \frac{1}{\tau} u_{i,N_y}^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} \mu_{yl,i}^{(2)} \right)^*$$

$$M_y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N_y}$$

Для уравнения (15) введем фундаментальную B_y и диагональную Λ_y матрицы с соответствующими элементами, как в случае уравнения (10).

Умножаем уравнение (15) слева на матрицу B_y^{-1} и составляем матричное уравнение:

$$\frac{1}{\tau} \bar{U}_i^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \Lambda_x \bar{U}_i^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} \Lambda_y \bar{U}_i^{(2)} + a \frac{\partial^2 \bar{U}_i^{(2)}}{\partial z^2} + \bar{F}_i^{(2)} = 0, \quad (18)$$

где

$$\bar{U}_i^{(2)} = (\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)}, \dots, \bar{u}_{N_y}^{(2)})^* = B_x^{-1} U^{(2)} = B_x U^{(2)} = \left(\sum_{q=1}^{N_y} b_{y,1,q} u_{i,q}^{(2)}, \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,2,q} u_{i,q}^{(2)}, \dots, \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,N_y,q} u_{i,q}^{(2)} \right)^*$$

Здесь использовали обозначение $(F_i^{(2)})_q$ для q -го элемента вектор-столбца $F_i^{(2)}$.

Из (16) переходим к отдельным $N_x N_y$ автономным уравнениям:

Из (16) переходим к отдельным $N_x N_y$ автономным уравнениям:

$$\frac{1}{\tau} \bar{u}_{i,j}^{(2)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} \bar{u}_{i,j}^{(2)} + \frac{a}{h_y^2} \lambda_{y,j} \bar{u}_{i,j}^{(2)} + a \frac{d^2 \bar{u}_{i,j}^{(2)}}{dz^2} + \bar{f}_{i,j}^{(2)} = 0. \quad (17)$$

Граничными условиями для этих уравнений будут служить

$$\frac{d \bar{u}_{i,j}^{(2)}(0)}{dz} = \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,i,q} v_{z0,i,q}^{n+1} = \bar{v}_{z0,i,j}^{(2)},$$

$$\frac{d \bar{u}_{i,j}^{(2)}(l_z)}{dz} = \eta [T_{oc}^{(2)} - \bar{u}_{i,j}^{(2)}(l_z)],$$

где $T_{oc}^{(2)} = \sum_{p=1}^{N_y} b_{y,i,p} T_{oc}^{(1)}$.

Теперь по координате z вводим дискретные функции $u_{i,j,k}^{(3)}$ и $f_{i,j,k}^{(3)}$, и в уравнении (17) переходим к разностным уравнениям для внутренних узлов [7, 8]:

$$\frac{1}{\tau} u_{i,j,k}^{(3)} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} u_{i,j,k}^{(3)} + \frac{a}{h_y^2} \lambda_{y,j} u_{i,j,k}^{(3)} + a \frac{u_{i,j,k+1}^{(3)} - 2u_{i,j,k}^{(3)} + u_{i,j,k-1}^{(3)}}{h_z^2} + f_{i,j,k}^{(3)} = 0.$$

Отсюда составляем уравнение, удобное для применения метода прогонки:

$$a_k u_{i,j,k+1}^{(3)} - b_k u_{i,j,k}^{(3)} + c_k u_{i,j,k-1}^{(3)} = -f_{i,j,k}^{(3)},$$

где $a_k = c_k = \frac{a}{h_z^2}$, $b_k = a_k + c_k - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h_x^2} \lambda_{x,i} + \frac{a}{h_y^2} \lambda_{y,j} \right)$.

Согласно этим обозначениям, прогонка осуществляется по формуле

$$u_{i,j,k}^{(3)} = \alpha_k u_{i,j,k+1}^{(3)} + \beta_k,$$

где $\alpha_k = \frac{a_k}{b_k - c_k \alpha_{k-1}}$, $\beta_k = \frac{c_k \beta_{k-1} + f_{i,j,k}^{(3)}}{b_k - c_k \alpha_{k-1}}$.

Граничное условие при $z = 0$ реализуем со вторым порядком точности:

$$3u_{i,j,0}^{(3)} - 4u_{i,j,1}^{(3)} + u_{i,j,2}^{(3)} = -2h_z v_{z0,i,j}^{(2)}.$$

Так как $a_1 u_{i,j,2}^{(3)} - b_1 u_{i,j,1}^{(3)} + c_1 u_{i,j,0}^{(3)} = -f_{i,j,1}^{(3)}$, то исключив $u_{i,j,2}^{(3)}$ из последних двух уравнений, составляем

$$u_{i,j,0}^{(3)} = \alpha_0 u_{i,j,1}^{(3)} + \beta_0,$$

где $\alpha_0 = \frac{4a_1 - b_1}{3a_1 - c_1}$, $\beta_0 = \frac{-2h_z \bar{v}_{z0,i,j}^{(2)} + f_{i,j,1}^{(3)}}{3a_1 - c_1}$.

Вычисление значений прогоночных коэффициентов начинается с этих формул и продолжается до значений α_{N_z} и β_{N_z} . Далее осуществляется обратная прогонка, для первого шага которой необходимо значение $u_{i,j,N_z+1}^{(3)}$. Находим его из аппроксимации граничного условия при $z = l_z$:

$$3u_{i,j,N_z+1}^{(3)} - 4u_{i,j,N_z}^{(3)} + u_{i,j,N_z-1}^{(3)} = 2h_z \eta (T_{oc}^{(2)} - u_{i,j,N_z}^{(3)}).$$

С учетом $u_{i,j,N_z-1}^{(3)} = \alpha_{N_z-1} u_{i,j,N_z}^{(3)} + \beta_{N_z-1}$ последнее уравнение приобретает вид

$$3u_{i,j,N_z+1}^{(3)} + (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z \eta) u_{i,j,N_z}^{(3)} = 2h_z \eta T_{oc}^{(3)} - \beta_{N_z-1}.$$

Здесь учитываем $u_{i,j,N_z}^{(3)} = \alpha_{N_z} u_{i,j,N_z+1}^{(3)} + \beta_{N_z}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & [3 + (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z \eta) \alpha_{N_z}] u_{i,j,N_z+1}^{(3)} = \\ & = 2h_z \eta T_{oc}^{(3)} - \beta_{N_z-1} - (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z \eta) \beta_{N_z}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$u_{i,j,N_z+1}^{(3)} = \frac{2h_z \eta T_{oc}^{(3)} - \beta_{N_z-1} - (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z \eta) \beta_{N_z}}{3 + (-4 + \alpha_{N_z-1} + 2h_z \eta) \alpha_{N_z}}.$$

Вычислением значения $u_{i,j,N_z+1}^{(3)}$ начинается обратная прогонка по формуле $u_{i,j,k}^{(3)} = \alpha_k u_{i,j,k+1}^{(3)} + \beta_k$ для значений $k = N_z, N_z - 1, \dots, 2, 1, 0$.

Описанный выше алгоритм применяется для каждого нового временного шага $n+1 = 1, 2, \dots$. Но для его первого шага нужны значения $u_{i,j,k}^{(3)}$ для начального времени $t = 0$.

При дискретизации по времени t и координаты x вводим $u_i^0(y, z)$. После диагонализации уравнения (11) переходим к условию

$$u_i^{(1)0}(y, z) = \sum_{p=1}^{N_x} b_{x,i,p} u_p^0(y, z).$$

При дискретизации по y вводим замену $u_{i,j}^{(2)0}(z) = u_i^{(1)0}(y, z)$. При диагонализации уравнения (16) имеем

$$\bar{u}_{i,j}^{(2)0}(z) = \sum_{q=1}^{N_y} b_{y,j,q} u_{i,q}^{(2)0}(z).$$

Далее производим замену

$$u_{i,j,k}^{(3)0} = \bar{u}_{i,j}^{(2)0}(z).$$

В итоге получаем, что для сеточной функции $u_{i,j,k}^{(3)}$ начальным условием будет служить

$$u_{i,j,k}^{(3)0} = \sum_{p=1}^{N_x} \sum_{q=1}^{N_y} b_{x,i,p} b_{y,j,q} u_{p,q,k}^0.$$

Остался последний этап вычислений: переход из $u_{i,j,k}^{(3)}$ к исходной искомой $u_{i,j,k}^{n+1}$. С учетом $B_x^{-1} = B_x$ и $B_y^{-1} = B_y$, этот переход осуществляется по формуле

$$u_{i,j,k}^{n+1} = \sum_{p=1}^{N_x} \sum_{q=1}^{N_y} b_{x,i,p} b_{y,j,q} u_{p,q,k}^{(3)}.$$

Таким образом, точность аппроксимации уравнений и условий составляет первый порядок по времени и второй порядок – по координатам.

На основе представленных математических выкладок составлена программа расчета, состоящая из частей описания и введения скалярных, векторных и матричных данных, формирования матриц B_x , Λ_x и B_y , Λ_y , начального условия $u_{i,j,k}^{(3)0}$, расчетов $u_{i,j,k}^{(3)}$ для следующего временного шага и условной печати.

Расчеты для следующего временного шага состоят из формирования правой части уравнений, реализации граничных условий и вычисления значения $u_{i,j,k}^{(3)}$.

В части условной печати для заранее заданного временного шага осуществляем переход к $u_{i,j,k}^{n+1}$ и из результатов строим графики и таблицы.

Программа освождена АИС РУз [11].

4. Обсуждение результатов вычислительного эксперимента

Расчеты термического состояния хлопкового бунта проведены с учетом внутреннего тепловыделения хлопка-сырца [12]: $f(x, y, z, t) = be^{-at}$.

В программе предусмотрен модуль ввода данных (рис. 1). В этом модуле вводятся необходимые входные данные для расчета, такие как конечное время хранения бунта, коэффициент температуропроводности, два коэффициента экспоненциального закона внутреннего тепловыделения, размеры бунта, шаги численного решения задачи, начальная температура бунта, температура окружающей среды, число и места проёмов в бунте и др. Проёмы брались сквозные и параллельные координатной оси Oх.

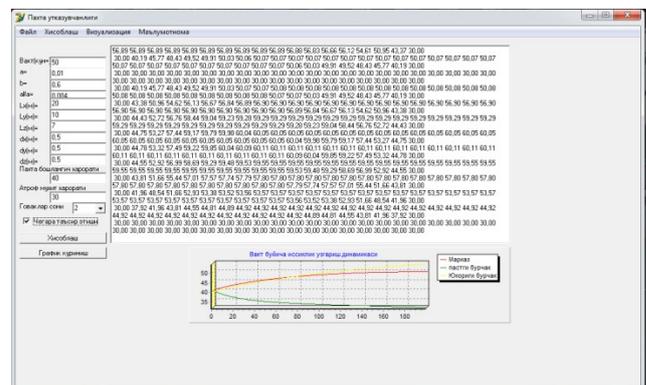


Рис. 1. Модуль программы для ввода данных

В первичном варианте программы температура окружающей среды задана в постоянном виде. Вычислены значения температуры во всех точках бунта, и конечный результат сформирован в виде таблицы Microsoft Excel. С их помощью можно построить графики. Программа имеет возможность графической интерпретации отдельных результатов: временного изменения температуры в центре массы, а также на верхних и нижних вершинах параллелепипеда. Результаты вычислительного эксперимента представляются в трехмерном матричном виде, а также в виде изотерм по трем плоскостям разрезов. Температура в этих плоскостях визуализирована в цветном изображении согласно зонам изотерм.

Представляем некоторые результаты вычислительного эксперимента.

На рис. 2 представлены графические результаты вычислений температуры бунта хлопка-сырца с одним проёмом, полученные при начальной температуре бунта 40°C и при температуре окружающей среды 30°C. Через 50 дней внутренняя часть бунта нагревается до 56,5°C за счет внутреннего тепловыделения. Части, соприкасающиеся с наружной атмосферой, – приграничные, и части вокруг проёма остывают до 30°C, потому что температура окружающей среды меньше начальной температуры бунта.

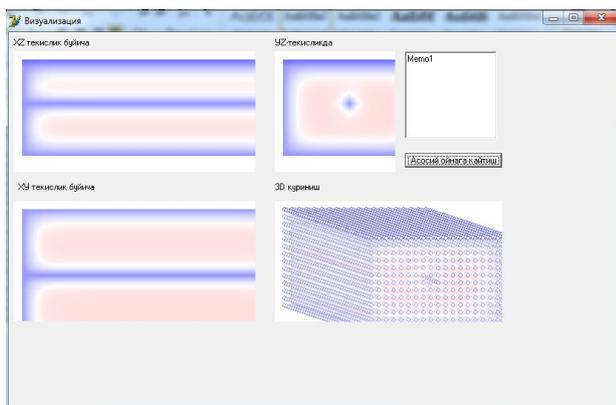


Рис. 2. Распределение температуры в бунте хлопка-сырца с одним проёмом в центральных плоскостях разрезов и в трехмерном виде после хранения в течение 50 сут. $a = 0.01 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$; $l_x = 20 \text{ м}$; $l_y = 10 \text{ м}$; $l_z = 7 \text{ м}$; $h_x = h_y = h_z = 0.5 \text{ м}$; $T_{oc} = 30^0 \text{ C} = \text{const}$; $T(x, y, z, 0) = 40^0 \text{ C} = \text{const}$; $b = 0.5^0 \text{ C} / \text{c}$; $\alpha = 0.04 / \text{c}$

На рис. 3 представлены результаты, которые получены при ослаблении теплообмена с окружающей средой, для чего исходная температура и температура окружающей среды приняты одинаково – 40°C. За счет этого наибольшая температура в бунте, относительно предыдущего варианта расчета, увеличивается на 0,4°C, т.е. в отдельных точках она доходит до 56,9°C.

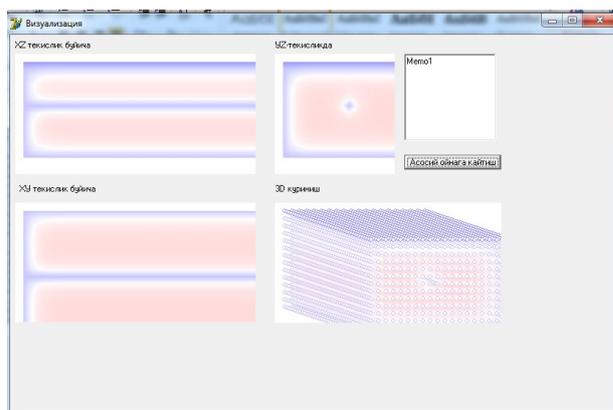


Рис. 3. Распределение температуры в бунте хлопка-сырца с одним проёмом по плоскостям разрезов и в трехмерном виде. Результат получен после 50

$$\text{суток. } T_{oc} = T(x, y, z, 0) = 40^0 \text{ C} = \text{const.}$$

Остальные данные см. на рис. 2

С увеличением влагосодержания хлопка-сырца значения коэффициента температуропроводности и интенсивность тепловыделения увеличиваются. И это приводит к более интенсивному нагреванию внутренней части бунта (до 65-70°C и выше) (рис. 4). Фактор внутреннего тепловыделения становится весомым и это может привести к самовозгоранию бунта или потере природных качеств хлопка-сырца при долгом хранении.

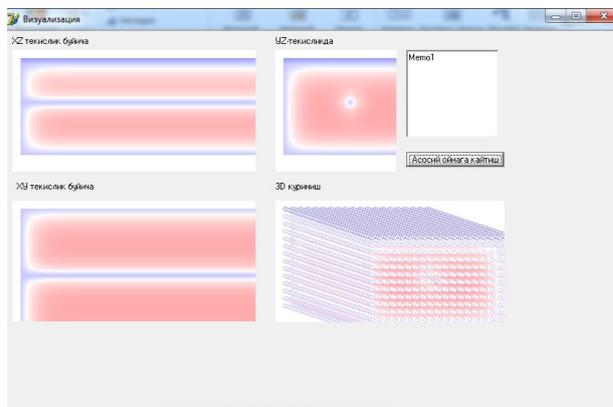


Рис. 4. Распределение температуры в бунте хлопка-сырца с одним проёмом, полученные после 70 дней хранения. $T_{oc} = 40^0 \text{ C}$; $T(x, y, z, 0) = 30^0 \text{ C}$;

$$b = 0.8^0 \text{ C} / \text{c}; \alpha = 0.03 / \text{c}.$$

Остальные данные см. на рис. 2

При уменьшении размеров бунта теплообмен с окружающей средой протекает интенсивно, и фактор внутреннего тепловыделения оказывается на втором плане. На рис. 5 показано, что при длительном хранении (70 суток) внутренние точки бунта, который имеет размеры 15 м, 9 м и 6 м, нагреваются до 53°C. Расчеты показали, что при уменьшении значения коэффициента температуропроводности роль фактора внутреннего тепловыделения увеличивается. Например, после 60-и суток хранения при $a = 0.01 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ максимальная температура внутри бунта достигает 58°C (рис. 6).

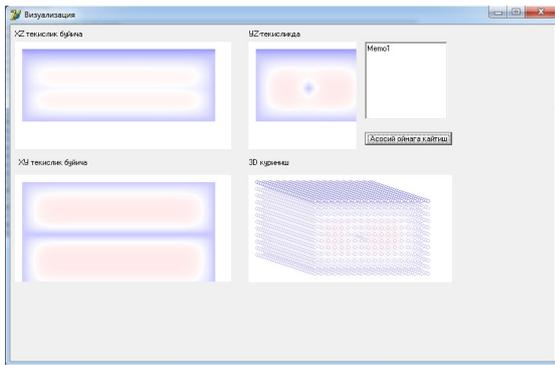


Рис. 5. Распределение температуры в бунте хлопко-сырца с одним проёмом после хранения на 70-е сутки. $l_x = 15$ м; $l_y = 9$ м; $l_z = 6$ м;

$$h_x = h_y = h_z = 0.5 \text{ м};$$

$$T_{oc} = 40^{\circ} \text{ C}; T(x, y, z, 0) = 30^{\circ} \text{ C};$$

$$b = 0.6^{\circ} \text{ C} / \text{ c}; \alpha = 0.04 / \text{ c}$$

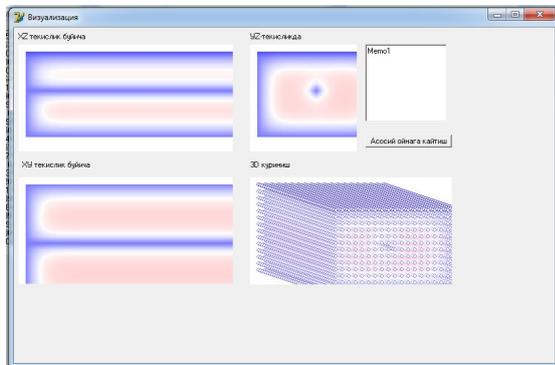


Рис. 6. Распределение температуры в бунте хлопко-сырца с одним проёмом после 60 суток хранения.

$$a = 0.01 \text{ м}^2 \text{ c}^{-1}, b = 0.5^{\circ} \text{ C} / \text{ c}.$$

Остальные данные см. на рис. 2

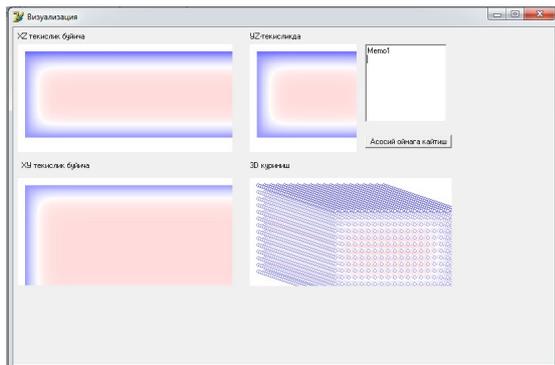


Рис. 7. Распределение температуры в бунте хлопко-сырца без проёма после 50 суток хранения.

$$T_{oc} = 30^{\circ} \text{ C}; T(x, y, z, 0) = 40^{\circ} \text{ C};$$

$$a = 0.01 \text{ м}^2 \text{ c}^{-1}; b = 0.5^{\circ} \text{ C} / \text{ c}.$$

Остальные данные см. на рис. 2

При хранении бунта хлопко-сырца без проёма внутренняя часть более интенсивно нагревается и температура внутри бунта достигает до 58° C . Этот показатель на $3 - 4^{\circ} \text{ C}$ больше, чем в случае с одним проёмом (рис. 7). Проёмы обеспечивают теплообмен

внутренней части бунта хлопка с окружающей средой и способствуют остыванию массы. Фактор внутреннего тепловыделения становится заметным при хранении бунта долгое время.

Температура внутренних точек достигает до 63° C и выше при хранении бунта хлопка в течение 90 суток (рис. 8).

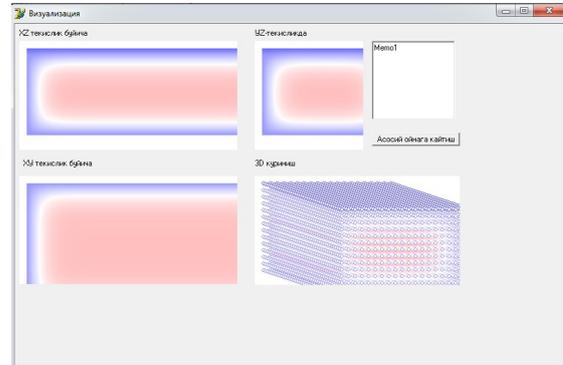


Рис. 8. Распределение температуры в бунте хлопко-сырца без проёма после 90 суток хранения.

Остальные данные см. на рис. 2

5. Заключение

Для изучения термического состояния бунта хлопко-сырца в динамике составлены математическая и численная модели процесса хранения хлопко-сырца. Учитывали внутреннее тепловыделение массы за счет биологических и химических изменений в живых клетках хлопко-сырца, полагая, что с увеличением влажности массы увеличивается значение коэффициента в экспоненциальном законе тепловыделения.

При решении задачи впервые применен дифференциально-разностный метод, значительно уменьшающий объем вычислений при численных расчетах. При этом опирались на результаты работ [8, 9], где аналитически найдены значения элементов диагональной и фундаментальной матриц. Обеспечен второй порядок точности аппроксимации уравнения и граничных условий по координатам, для чего в третьем этапе дискретизации (по оси z) использованы неявная аппроксимация и метод прогонки.

Этапы ввода исходных данных и представления результатов расчета в программе сформированы в экранном режиме. Этим создано благоприятное условие для пользователей: можно визуально наблюдать за изменением температурного поля за заданный срок хранения хлопко-сырца.

Результаты расчетов показали следующие особенности термического состояния бунта хлопко-сырца:

- во-первых, с увеличением размеров бунта роль теплообмена с окружающей средой становится незначительной и наблюдается повсеместное увеличение температуры хлопко-сырца за счет внутреннего тепловыделения;

- во-вторых, при больших значениях влажности массы, что учитывается значением коэффициента b ,

температура хлопка-сырца растет интенсивно, чем при малых значениях влажности;

- в-третьих, наличие проёма, через который масса хлопка-сырца сообщается теплом окружающей

среды, приводит к уменьшению наибольшего значения температуры в бунте хлопка-сырца.

Литература

- [1] Пахтани қайта ишлаш: ўқув қўлланма / Э. Зикрияев умумий тахрири остида. – Тошкент: Мехнат, 2002. – 408 б.
- [2] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II: Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1975. – 552 с.
- [3] Маматов А.З. Моделирование технологии сушки хлопка-сырца с целью повышения качества волокна. – Автореф. дис... доктора техн. наук. - Ташкент, 1995. – 32 с.
- [4] Партиева А.П., Мардонов Б.М., Усманкулов А.К. Тепло- и массообменные процессы в хлопке-сырце и его компонентах. – Ташкент: Фан ва технология, 2013. – 219 с.
- [5] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
- [6] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
- [7] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
- [8] Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
- [9] Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949. - Т. 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).
- [10] Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н., Шарипов Д.К. Программа расчета температурного состояния бунта хлопка-сырца в форме параллелепипеда с учетом внутреннего тепловыделения // Агентство по интеллектуальной собственности РУз. Свидетельство № DGU 04272. 30.01.2017 г.
- [11] Тошов Б.Р., Хужаев Ж.И. Вычислительный эксперимент по прогнозированию термического состояния одно- и трехмерной массы с тепловыделением // Современные техника и технологии горно-металлургической отрасли и пути их развития: Материалы Международной научно-технической конференции, 14-16 мая 2013. – Навои, 2013. – С. 195-197.