

УДК 512.312

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В АТМОСФЕРЕ

Равшанов Н.

д.т.н., заведующий лабораторией Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Таштемирова Н.

преподаватель кафедры «Информатика» Ташкентского химико-технологического института,
тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: nodira3110@mail.ru

Мурадов Ф.

старший научный сотрудник-исследователь Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99897) 925-05-65, e-mail: farrux1981@umail.uz

Обсуждается решение задачи мониторинга и прогнозирования экологического состояния промышленных регионов, где имеет место нарушение баланса санитарной нормы окружающей среды вследствие большого количества выбросов вредных мелкодисперсных аэрозольных частиц и углекислых газов. Приведена математическая модель процесса переноса и диффузии загрязняющих веществ, выброшенных в окружающую среду из производственных объектов. Указаны основные параметры, которые играют существенную роль в процессе переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере: скорость ветра и его направления; рельеф местности; коэффициент поглощения вредных аэрозольных мелкодисперсных частиц в атмосфере и т.д. Доказано существование единственности решения задачи переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосферу. С целью проведения вычислительного эксперимента на реальных данных для заданной территории и в текущий момент времени разработаны программные интерфейсы для коммуникации с геоинформационными и погодными веб-службами (Weather Underground, World Weather Online, OpenWeatherMap) и программные модули для создания рельефных карт различной степени детализации (SRTM). На основе реальных погодно-климатических факторов и с учетом орографии поверхности рассматриваемого региона проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ, результаты которых приведены в виде двумерных и трехмерных графических объектов. Также приведены интерпретация результатов и выводы по проведенному исследованию в целом.

Ключевые слова: математическая модель, перенос и диффузия вредных веществ, погодно-климатический фактор, гидромеханика, численный алгоритм, программное средство, вычислительный эксперимент.

STUDY OF THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF
THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF TRANSPORT AND
DIFFUSION OF AEROSOL PARTICLES IN THE ATMOSPHERE

Ravshanov N., Tashtemirova N., Muradov F.

The article discusses the solution of the problem of monitoring and forecasting the environmental conditions of industrial regions, where the balance of the sanitary norms of the environment is broken by the large amounts of emission of fine aerosol particles and carbon dioxide. Mathematical model of the transfer and diffusion process of polluting substances, which are ejected into environment from manufacturing entities, is given. Main parameters, which play essential role in the process of transfer and diffusion of harmful substances in the atmosphere, are indicated: wind speed and its direction; relief of the land; coefficient of absorption of harmful fine aerosol particles in the atmosphere, etc. The existence of the uniqueness of the solution of the transfer and diffusion problem to the atmosphere is proved. By conducting the computational experiment in different data for the given area and at the current time, programming interfaces for communicating with web services of geo information and weather (Weather Underground, World Weather Online, OpenWeatherMap) and software modules for creation relief maps of different levels of detail (SRTM) are developed. Computational experiments on the computer are conducted based on the real weather and climatic

factors and considering the surface orography of the concerned region, results of them are shown in the form of two and three dimensional graphical objects. Interpretation of the results and conclusions of provided research is also given.

Keywords: mathematical model, transfer and diffusion of harmful substances, weather and climatic factor, fluid mechanics, numerical algorithm, the software, computational experiment.

ATMOSFERADAGI AEROZOL ZARRACHALARINING KO'CHISHI VA DIFFUZIYASI MASALASI YECHIMINI MAVJUDLIGI VA YAGONALIGINI TADQIQ QILISH

Ravshanov N., Tashtemirova N., Muradov F.

Maqolada zararli kichik dispersiyali aerazol zarralari va karbonat angidrid gazlarining ko'p miqdorda tashlanishi natijasida atrof-muhit sanitar holatlari muvozanati buziladigan joylarda joylashgan sanoat hududlarini ekologik holatini bashoratlash va monitoring qilish masalasining yechilishi muhokama qilingan. Ishlab chiqarish ob'ektlaridan atrof-muhitga tashlanayotgan ifloslantiruvchi moddalarning ko'chishi va diffuziyasi jarayonining matematik modeli keltirilgan. Atmosferada zararli moddalarning ko'chishi va diffuziyasi jarayonida sezilarli rol o'ynovchi asosiy parametrlar: shamol tezligi va yo'nalishi; hudud reliefi; atmosferaga kichik dispersiyali zararli zarralarning singish koeffitsienti va h.k.lar ko'rsatilgan. Atmosferada aerazol zarralarning ko'chishi va diffuziyasi masalasining yechimini mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Berilgan hudud va hozirgi joriy vaqtda real ma'lumotlar asosida hisoblash tajribalarini o'tkazish maqsadida geoinformatsion va ob-havo web-xizmatlari (Weather Underground, World Weather Online, OpenWeatherMap) bilan bog'lanish uchun dasturiy interfeys yaratilgan hamda turli darajadagi belgilangan relf haritasini (SRTM) yaratish uchun dasturiy modullar yaratilgan. Qaralayotgan hudud yuzasi orografiyasini inobatga olgan holda va real ob-havo iqlimi omillari asosida EHMda hisoblash tajribalari o'tkazilgan hamda natijalar ikki va uch o'lchovli grafik ob'ektlar ko'rinishda keltirilgan. Bulardan tashqari, hisoblash natijalari izohlangan va o'tkazilgan izlanishlarning to'liq xulosalari keltirilgan

Tayanch iboralar: matematik model, zararli moddalarning ko'chishi va diffuziyasi, ob-havo va iqlimga oid omillar, gidromexanika, sonli algoritm, dasturiy vosita, hisoblash tajribasi

1. Введение

Для достаточно точного прогнозирования экологического состояния окружающей среды (пограничный слой атмосферы, поверхность земли) промышленных регионов и принятия оперативных решений по преодолению неблагоприятных ситуаций требуется создание специального математического обеспечения, включающего в себя ряд этапов: постановка задачи, создание ее информационного обеспечения; разработка математической модели объекта; разработка численного алгоритма; создание программного средства для проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ; интерпретация результатов проведенных численных расчетов.

Разработанное, таким образом, математическое обеспечение позволяет определять предельно допустимые объемы выбросов загрязняющих веществ и их концентрацию в воздухе, воде и почве грунта.

В последнее время наблюдается большой научно-практический интерес к проблемам математического моделирования процессов переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосфере вследствие техногенного и антропогенного воздействия на природу. Успешное решение задач мониторинга и прогноза уровня загрязнения атмосферы вредными веществами, выброшенными из объектов производства в окружающую среду, основано на использовании математических моделей, учитывающих физические особенности распространения примесей, связи между концентрациями примесей и параметрами среды: изменение скорости и направления ветра по времени,

коэффициент поглощения вредных веществ в атмосфере, рельеф местности, изменения температуры воздушной массы атмосферы, свойства почвы и т.д.

В решение проблемы математического моделирования с целью мониторинга и прогнозирования состояния окружающей среды большой вклад внесли школы, созданные под руководством таких ученых, как Г.И. Марчук, А.А. Беккер, П.Н. Белов. Фундаментальные аспекты математического моделирования процесса загрязнения воздуха сформулированы в работах М.Е. Берлянда, Е.Л. Гениховича, Р.И. Оникула, Н.Л. Бызовой, Ю.А. Анохиной, А.Х. Остромогильского, Т. Iversen., Т.Е. Nordeng, R.Lange, М Рекар, академика С.А. Солодкова и др.

Разработкой автоматизированных систем экологического мониторинга и прогнозирования состояния окружающей среды занимаются проф. Г.В. Аверин, А.А. Любимов, В.Ю. Волков, Ю.Д. Эдельштейн, В.В. Бугровский, А.М. Погорелов, А.В. Бизикин и др.

Указанными учеными и их коллегами, осуществляющими свои исследования в ведущих научных центрах, получены значительные результаты фундаментального и прикладного характера. В частности, в работе [1] приводится гидродинамическая модель дальнего переноса загрязняющих веществ в атмосфере с учетом основных физических процессов в пограничном слое атмосферы. Разработанная математическая модель согласована с оперативной моделью среднесрочного прогноза Гидрометцентра РФ. Автором проведены вычислительные эксперименты на основе региональных и прогностических метеорологических

данных и создан программный блок сбора, обработки и хранения метеорологической информации.

В работах [2-4] рассматривается процесс переноса загрязняющих веществ в атмосфере, и формулируются основные критерии опасности загрязнения атмосферы, а также определяется понятие предельно допустимой концентрации загрязняющего вещества в атмосферном воздухе промышленных регионов для важнейших видов загрязняющих веществ. Так же авторами рассматривается понятие особо опасного загрязнения воздуха, и задаются значения концентраций при различных уровнях опасности. Рассматриваются свойства загрязняющих веществ, которые имеют естественные и антропогенные источники. Приводятся сведения о количестве этих веществ в атмосфере и продолжительности их жизни. Также рассматриваются тенденции изменения содержания загрязняющих веществ в атмосфере и влияния этого изменения на глобальный климат.

В [5] исследуется математическая модель для прогноза метеорологических параметров с учетом вертикальной турбулентной диффузии, тепломассы переноса, а также фазового перехода; сформулирована и решена теоретическая задача гидротермодинамики и теплообмена многофазных сред с учетом взаимодействия с подстилающей поверхностью; разработаны методики учета незакрепленного верхнего слоя атмосферы, методики расчета переноса и рассеивания вредных веществ в пограничном и приземном слоях атмосферы, а также методики расчета взаимодействия деятельного слоя почвы с воздушной массой.

В работе [6] приводятся математическая модель, численный алгоритм и программное средство для прогнозирования процесса переноса вредных веществ в условиях горного (городского) рельефа от импульсных источников.

Авторами работ [7-14] проведены исследования переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт рассматривается как однородная среда, а коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере линейно зависит от ее высоты. Разработан численный алгоритм, на основе классической модели переноса радона в системе «грунт-атмосфера», для расчета плотности потока радона с поверхности земли по экспериментальным данным временных рядов радоновых полей, полученных на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне. Исследованы модели переноса радона в системе «грунт-атмосфера», в которой грунт обладает фрактальными свойствами, для режимов аномальной диффузии и аномальной адвекции, а также особенностей и условий смены режимов аномальной диффузии и аномальной адвекции в зависимости от фрактальных свойств грунта. Исследованы особенности и условия смены режимов аномальной диффузии и аномальной адвекции в зависимости от фрактальных свойств грунта.

Исследование [15] посвящено построению математической модели рассеивания примесей любого типа в мезометеорологическом пограничном слое атмосферы, одновременно учитывающей орографическую неоднородность подстилающей поверхности земли, химические трансформации примесей, горизонтальную и вертикальную неоднородности турбулентно-диффузионных свойств воздуха, а также влияние конвективно-стратификационных процессов и влажности на распространение примеси. Численное интегрирование поставленной задачи основано на разностных схемах расщепления по физическим процессам для расчета нестационарных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в естественных переменных для трехмерных областей со сложным рельефом местности, при переменных коэффициентах турбулентности и при учете пограничного слоя атмосферы с включением уравнений: количества движения; несжимаемости; энергии в атмосфере; энергии в почве; концентрации компоненты примеси; влагосодержания в атмосфере.

Н.С. Бузало также проведено численное исследование и выполнена оценка влияния неоднородности рельефа местности, температуры и теплофизических свойств атмосферы и подстилающей поверхности на распространение загрязняющего вещества в воздушной среде. Выявлена зависимость приземной концентрации примеси от времени суток и времени года.

В работах [16-20] проведена верификация моделей турбулентного переноса второго порядка полноты описания при моделировании неоднородных течений: бездвигового слоя смещения и развития следа от линейного источника в поле однородной турбулентности. Дан анализ параметризаций процессов турбулентной диффузии импульса и тепла. Показано, что модель с алгебраическим выражением для деструкции пульсаций концентрации дает результаты наиболее близкие к измеренным опытным путем, а анизотропный характер турбулентной диффузии описывает тензорно-инвариантная модель Ханьялича-Лаундера. Вычислены характеристики нейтрального атмосферного пограничного слоя в условиях скачкообразно меняющейся шероховатости подстилающей поверхности с помощью E-1 и E-e моделей турбулентности. Проведенным вычислительным экспериментом доказано, что модель, включающая e-уравнение, дает реалистичные результаты. Поэтому она может рассматриваться как более предпочтительная, чем алгебраическая модель для масштаба турбулентности, особенно для стратифицированных процессов. Разработана физико-математическая модель турбулентного переноса импульса, тепла и вещества второго уровня замыкания для описания динамики конвективного пограничного слоя атмосферы и распространения в нем примеси от точечного источника. Сформулирован метод замыкания старших моментов термодинамических полей турбулентных стратифицированных течений. На основе анализа

статей баланса уравнений для тройных корреляций были разработаны новые алгебраические параметризации третьих моментов.

Диссертация [21] посвящена проблеме моделирования процессов загрязнения атмосферы и решению таких задач, как прогнозирование, размещение постов мониторинга (стационарных и мобильных), оценка вклада конкретного промышленного объекта в общее загрязнение воздуха в реальном времени с целью принятия управленческих мер по нормированию выбросов.

Авторами статьи [22] разработана модель 3D CFD для исследования процесса переноса и диффузии мелкодисперсных аэрозольных частиц в атмосфере. Математическая модель основана на модели транспортного градиента. Приведены результаты численных экспериментов, проведенных на ЭВМ.

В диссертационной работе [23] сформулированы принципы построения пространственной базы данных мониторинга загрязнения почвенного покрова техногенного статуса и предлагается комплекс программных средств, обеспечивающий эффективную обработку и анализ геохимических данных в геоинформационной оболочке, и получены базовые уравнения регрессии пространственного распределения тяжелых металлов (марганца и цинка) для построения слоя загрязнения почвенного покрова по всей территории г. Тулы. Также предлагаются адаптированные нейросетевые математические модели для комплексного анализа загрязнения почв горнопромышленного региона тяжелыми металлами, инвариантные к смене шкал измерений и обеспечивающие более точный прогноз по сравнению с методами многомерного статистического анализа.

В диссертационной работе [24] разработаны математические модели поглощения атмосферного кислорода, валовых выбросов углекислого газа и радона в приземный слой атмосферы, отличающиеся тем, что учтено влияние протяженных газоотдающих поверхностей, контактирующих с вентиляционными струями, и аэрогазодинамических характеристик очистных и подготовительных участков. Усовершенствована методика инвентаризации источников пылегазовых выбросов от угольных шахт Подмосковского бассейна, отличающаяся тем, что наряду с источниками пылегазовых выбросов, расположенными на поверхности, учитываются поглощение кислорода угольным пластом, а также выделения углекислого газа и радона в шахтный воздух, а также разработан комплекс программных средств, позволяющий автоматизировать процесс расчета пылегазовых выбросов в приземные слои атмосферы от источников поверхностного технологического комплекса угольных шахт, проводить вычислительные эксперименты при моделировании различных геоэкологических и геотехнологических условий.

В работе [25] структурированы показатели, характеризующие возможности реализации токсического действия химических соединений и вероятностей их поведения в атмосферном воздухе для получения новой технологии расчёта

экологического риска загрязнения атмосферного воздуха и обобщены аналитические методы расчёта риска и программных решений его графического отображения для разработки новой комплексной методики оценки экологического риска загрязнения атмосферного воздуха по стоимостному показателю и по показателю здоровья населения.

В [26] рассмотрена возможность моделирования сухого осаждения частиц примесей по аналогии с моделированием свободного падения тела с учетом сопротивления среды. Молекула вредной примеси рассматривается в качестве тела, падающего под действием силы тяжести. Тело, падающее с большой высоты, вовсе не движется равноускоренно, так как по мере набора скорости возрастает сила сопротивления среды.

В статьях [27, 28] предлагается динамическая трехмерная математическая модель тепломассопереноса вредных примесей и теплоты в производственной среде с активной вентиляцией и источниками загрязнения, которая в отличие от существующих моделей распространения производственных вредностей позволяет учитывать завихрения газо-воздушных потоков.

2. Постановка задачи

Один из основных вопросов при математическом моделировании объекта - исследование существования и единственности решения задачи. Для решения данной проблемы рассмотрим математическую модель процесса переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосферу, описывающуюся на основе закона гидродинамики процесса с помощью многомерного дифференциального уравнения в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}(h\theta) + v \frac{\partial}{\partial y}(h\theta) + (w - w_g) \frac{\partial}{\partial z}(h\theta) + \sigma h \theta = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \delta_{i,j,k} f, \quad (1)$$

$$\theta(x, y, z, t)|_{t=0} = \theta_0(x, y, z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \text{при } (x, y) \in S_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in S_1, \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} = h\beta\theta \quad \text{при } z \in S_2, \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z \in S_3. \quad (6)$$

Здесь θ - концентрация вредных веществ в атмосфере; θ_0 - первичная концентрация вредных

веществ в атмосфере; x, y, z - система координат; u, v, w - скорость ветра по трем направлениям; w_g - скорость осаднения частиц; σ - коэффициент поглощения вредных веществ в атмосфере; μ, λ - коэффициенты диффузии и турбулентности; $\delta_{i,j,k}$ - функция Дирака; f - источник выброса вредных веществ в атмосферу; S_1 - боковая поверхность области G ; S_2 - подстилающая поверхность земли области G ; S_3 - свободная поверхность атмосферы области G .

В данной постановке орография местности и физико-механические характеристики подсти-

лающей поверхности земли учитываются параметрами h и β . При этом параметр h может принимать значения: 0 – если слой находится под землей, 1 – если слой находится в атмосфере и $(\eta - z_{K-0,5})/\Delta z$ – если слой находится под орографической поверхностью. Здесь η – высота возвышенности над плоскостью, параллельной уровню моря, а $\Delta z = z_{k+0,5} - z_{k-0,5}$. Для каждого слоя вводится множитель h ($0 \leq h \leq 1$), определяющий степень блокирования воздушного потока (рис. 1).

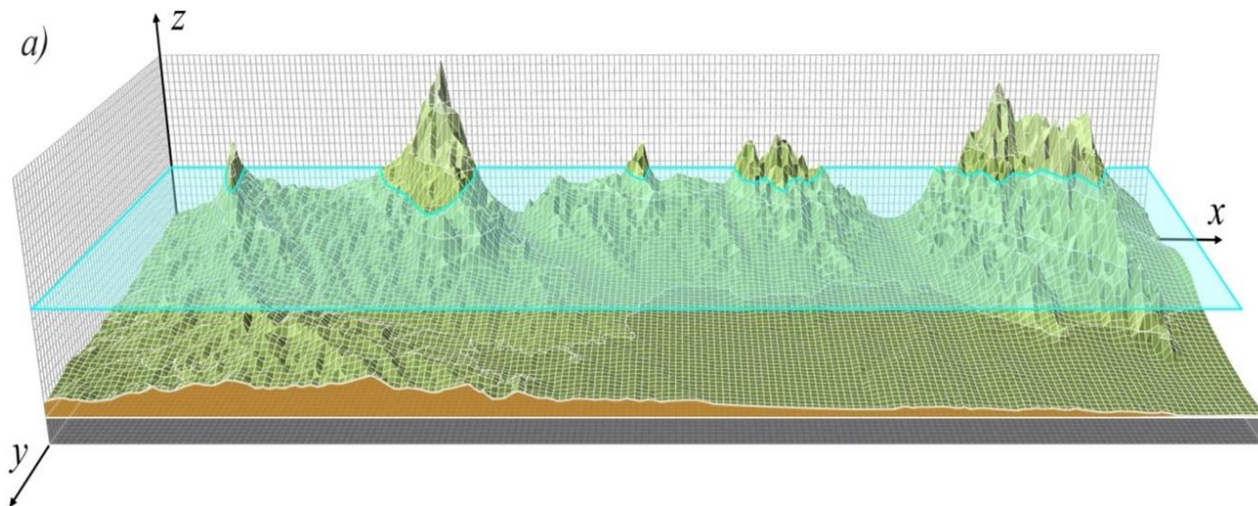


Рис. 1. Рельеф местности вдоль области переноса аэрозольных выбросов:

■ – $h = (\eta - z_{K-0,5})/\Delta z$, ■ – $h = 0$, ■ – $h = 1$, ■ – орографическая поверхность

Из постановки задачи следует, что основными факторами и параметрами, которые существенно воздействуют на ход процесса распространения вредных веществ в окружающую среду по времени и пространственным переменным, являются коэффициенты диффузии, поглощения и взаимодействия с подстилающей земной поверхностью, а также мощность источников загрязнения и их местоположение. Надо отметить, что указанные выше факторы зависят от погодно-климатических факторов, времени суток и времени года.

Другой параметр, который играет существенную роль в процессе переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере – скорость ветра и его направления. На его изменения непосредственным образом влияют барханы, холмы или горные хребты, находящиеся на открытом ландшафте (рис. 1).

Анализ многолетних данных показал, что скорость ветра возрастает с увеличением перепада атмосферного давления, а скорость воздушного потока падает у земли до 20 м/с вследствие трения о шероховатости подстилающей поверхности.

Неоднократно предпринимались попытки выявить зависимость между содержанием загрязняющих веществ в городском воздухе и скоростью ветра. В работах многих авторов указано,

что наибольшие загрязнения воздуха от низких источников наблюдаются при слабом ветре (в пределах от 0 до 1 м/с). При выбросах из высоких источников максимальные концентрации загрязнения фиксируются при опасных скоростях ветра (в пределах от 3 до 6 м/с в зависимости от скорости истечения газов из устья выбросных труб).

Опасная скорость ветра в сочетании с неустойчивой стратификацией и интенсивным переносом примесей приводит к максимальному росту значения концентрации вредных веществ в приземном слое атмосферы. В таких случаях основную роль в рассеивании вредных веществ в атмосфере играют горизонтальные потоки.

3. Метод решения задачи

Для исследования существования и единственности решения задачи (1) - (6) допустим, что существуют два различных решения $\theta^{(1)}(x, y, z, t) \neq \theta^{(2)}(x, y, z, t)$, и для каждого решения получаем соответствующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (h\theta^{(1)}) + v \frac{\partial}{\partial y} (h\theta^{(1)}) + \\ & + (w - w_g) \frac{\partial}{\partial z} (h\theta^{(1)}) + \sigma \theta^{(1)} h = \\ & = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y} \right) + \\ & + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial z} \right) + F^{(1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (h\theta^{(2)}) + v \frac{\partial}{\partial y} (h\theta^{(2)}) + \\ & + (w - w_g) \frac{\partial}{\partial z} (h\theta^{(2)}) + \sigma \theta^{(2)} h = \\ & = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y} \right) + \\ & + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial z} \right) + F^{(2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее вводим обозначения:

$$\bar{\theta} = \theta^{(1)}(x, y, z, t) - \theta^{(2)}(x, y, z, t); \bar{F} = (F^{(1)} - F^{(2)}) \neq 0.$$

Вычитаем из первого уравнения (7) уравнение (8) и получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{\theta}) + v \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{\theta}) + \\ & + (w - w_g) \frac{\partial}{\partial z} (h\bar{\theta}) + \sigma \bar{\theta} h = \\ & = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + \\ & + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) + \bar{F}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее уравнение (9) умножаем на $\bar{\theta}$ и получаем

$$\begin{aligned} & \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{\theta}) + v \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{\theta}) + \\ & + (w - w_g) \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial z} (h\bar{\theta}) + \sigma \bar{\theta} \bar{\theta} h = \\ & = \mu \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \mu \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + \\ & + \lambda \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) + \bar{\theta} \bar{F} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{\theta}) + v \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{\theta}) + \\ & + (w - w_g) \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial z} (h\bar{\theta}) + \sigma \bar{\theta} \bar{\theta} h = \\ & = \bar{\theta} \left(\mu h \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) \right) + \lambda h \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) + \bar{F} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Левую часть полученного уравнения (10) преобразуем и получаем

$$\begin{aligned} & \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{\theta}) + v \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{\theta}) + \\ & + (w - w_g) \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial z} (h\bar{\theta}) + \sigma \bar{\theta}^2 h = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial t} + \bar{\theta} h \left(u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) + \\ & + \sigma \bar{\theta}^2 h = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial t} + \sigma \bar{\theta}^2 h + \bar{\theta} h \operatorname{div}(\bar{\theta} \bullet \bar{U}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{U} = (u, v, (w - w_g))$.

Теперь интегрируем уравнение (11) с учетом граничного и начального условий по области G , а затем по времени t от $t = 0$ до T и получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint_G \left(\int_0^T \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial t} dt \right) dG + \iiint_G \int_0^T \sigma \bar{\theta}^2 h dt dG + \\ & + \int_0^T \left(\iiint_G \bar{\theta} h \operatorname{div}(\bar{\theta} \bullet \bar{U}) dG \right) dt = \\ & = \frac{1}{2} \iiint_G \left(\int_0^T \bar{\theta}^2(T) \right) dG + \iiint_G \int_0^T \sigma \bar{\theta}^2 h dt dG + \\ & + \int_0^T \left(\iint_S \frac{u^+}{2} \bar{\theta} h dS \right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Интеграл по области G правой части уравнения (10) без учета источника преобразуется в вид

$$\begin{aligned} & \iiint_G \bar{\theta} \left(\mu h \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right) \right) dG + \\ & + \iiint_G \bar{\theta} \lambda h \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} dG = \\ & = \mu h \iiint_G \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} dG + \mu h \iiint_G \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} dG + \\ & + \lambda h \iiint_G \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} dG = \mu h \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right)^2 dG + \\ & + \mu h \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right)^2 dG + \lambda h \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2 dG + \\ & + \mu h \iint_{S_1} \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n} dS_1 + \mu h \iint_{S_2} \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} dS_2 = \\ & = - \left\{ \mu h \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right)^2 dG + \mu h \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right)^2 dG \right\} - \\ & - \lambda h \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2 dG - \lambda h \iint_{S_2} \bar{\theta}^2 dS_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Интеграл от функции источника \bar{F} по области G представим в следующем виде:

$$\iiint_G \int_0^T \bar{F} \bar{\theta} dt dG.$$

Учитывая (11) - (13), уравнение (10) запишем так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint_G \left(\int_0^T \bar{\theta}^{-2}(T) \right) dG + \iiint_G \int_0^T \sigma \bar{\theta}^{-2} h dt dG + \\ & + \int_0^T \left(\iint_S \frac{u^+}{2} \bar{\theta} h dS \right) dt + \\ & + \lambda \beta \int_0^T \iint_{S_2} \bar{\theta}^{-2} dS_2 dt + \mu h \int_0^T \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right)^2 dG dt + \\ & + \mu h \int_0^T \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right)^2 dG dt + \\ & + \lambda h \int_0^T \iiint_G \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2 dG dt = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, получен окончательный вид уравнения, описывающего процесс переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере с учетом заданных краевых условий.

Если последнее слагаемое уравнения (14) было бы больше или равно нулю, то мы получили бы противоречие, так как первое слагаемое больше нуля, следовательно, предположение о существовании двух различных решений неверно и решение единственно. Что и доказывает единственность решения поставленной задачи.

Из постановки задачи (1) - (6) следует, что получить ее аналитическое решение затруднительно. Поэтому для численного интегрирования задачи был разработан численный алгоритм, основанный на замене дифференциальных операторов на конечно-разностные, что в итоге дает систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решая

которую мы получаем в узлах сетки искомые переменные, изменяющиеся по времени [29-32].

В ходе вычислительных экспериментов на реальных данных необходим источник значений параметров модели, актуальных для заданной территории и в текущий момент времени. С этой целью были разработаны программные интерфейсы для коммуникации с геоинформационными и погодными веб-службами [33-34]. Например, значения h для заданной местности загружаются онлайн с помощью API высотных данных сервиса Google Карты. А погодные данные, в частности, скорость и направление ветра u, v, w , извлекаются с таких веб-сервисов, как Weather Underground, World Weather Online или OpenWeatherMap. Кроме того, с целью уменьшения времени расчетов и экономии сетевого трафика были созданы дополнительные (локальные) базы данных радарной топографической съемки, среднегодовых погодных характеристик и розы ветров ряда промышленных регионов, включая г. Ангрен, Алмалык и Навои.

На основе модели и алгоритма решения задачи созданы программные модули и информационное обеспечение для проведения численных расчетов на ЭВМ и определения отклика внешних факторов, действующих на процесс распространения вредных веществ в атмосфере. Программные модули позволяют создавать рельефные карты различной степени детализации на основе общедоступных данных SRTM – проекта радарной топографической съемки земной поверхности (рис. 2). В совокупности с реальными данными веб-сервисов погоды появляется возможность мониторинга и прогнозирования процесса в реальном масштабе времени [34, 35].

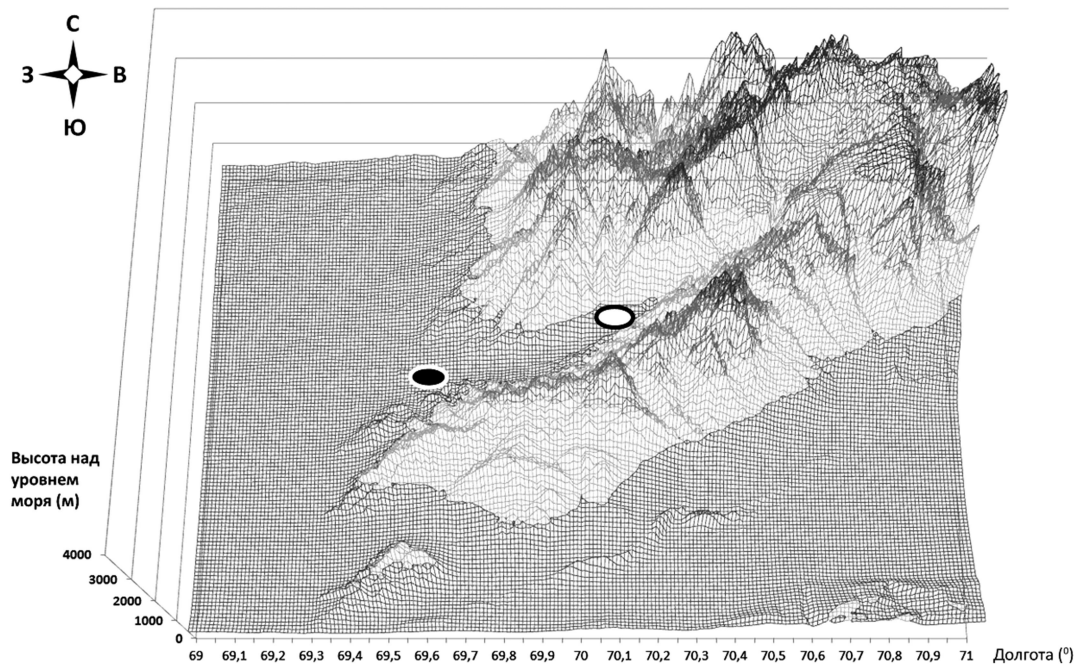


Рис. 2. Рельефная карта региона: ○ - Ангрен, ● - Алмалык

Полученные результаты выгодно отличаются тем, что здесь учитываются погодно-климатические факторы и особенности горно-долинной циркуляции (ГДЦ) атмосферы Центрально-Азиатского региона.

Таким образом, интеграция ряда современных технологий позволила создать информационное и математическое обеспечение поставленной задачи с целью мониторинга и прогнозирования экологического состояния рассматриваемого региона с учетом предельной допустимой концентрации вредных веществ в атмосфере.

4. Вычислительный эксперимент и обсуждение результатов

На основе приведенного выше математического инструмента проведена серия вычислительных экспериментов на ЭВМ при задании различных значений для параметров математической модели объекта. Результаты вычислительных экспериментов показаны на рис. 3 - 7.

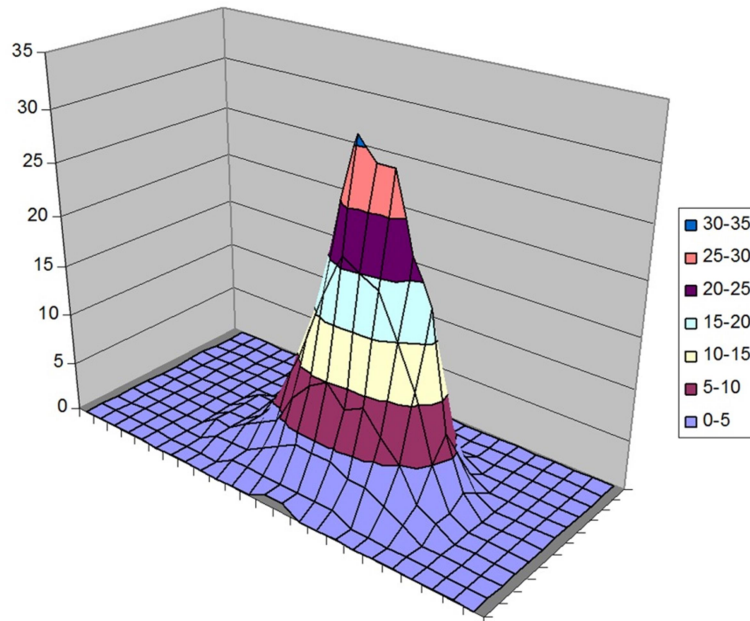


Рис. 3а. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 6,28$ ч, высота $z = 1800$ м

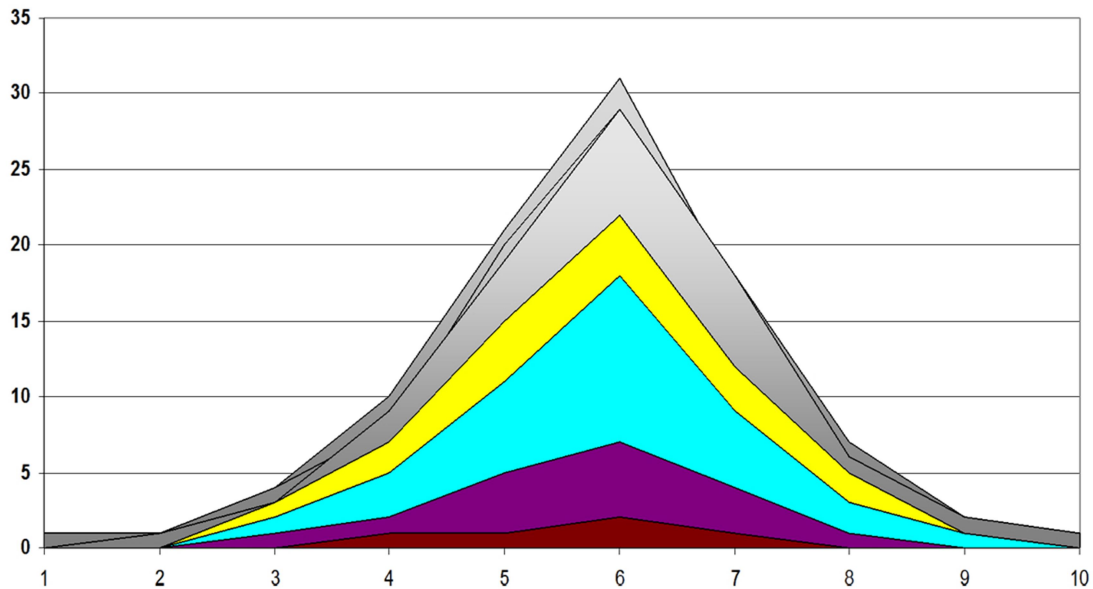


Рис. 3б. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 6,28$ ч, высота $z = 1800$ м; $y = 5000000$ м

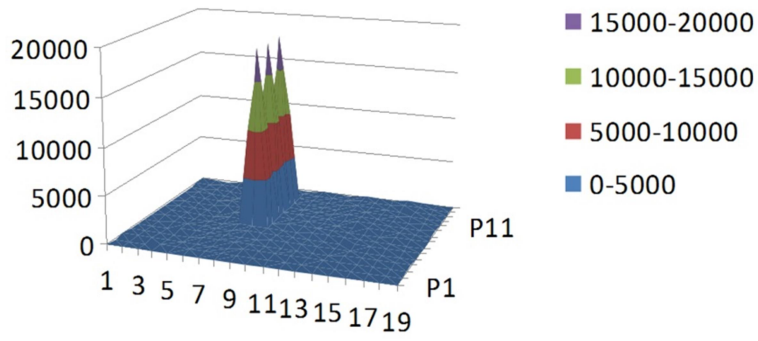


Рис. 4а. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 17,15$ ч на поверхности земли $z = 0$ м

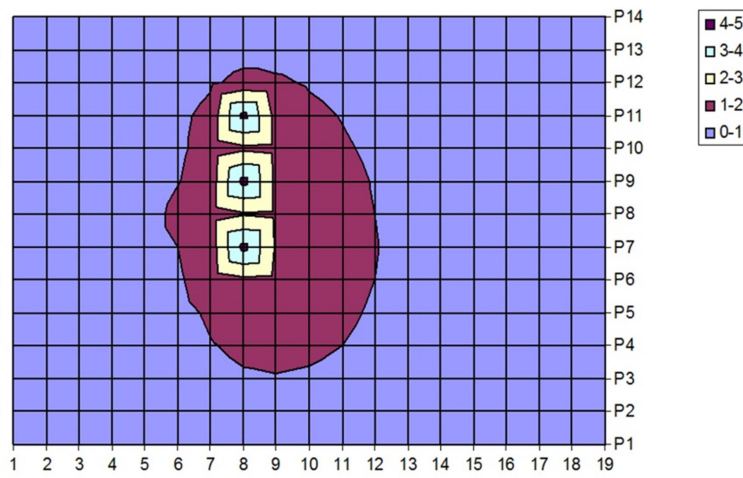


Рис. 4б. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 17,15$ ч на поверхности земли $z = 0$ м

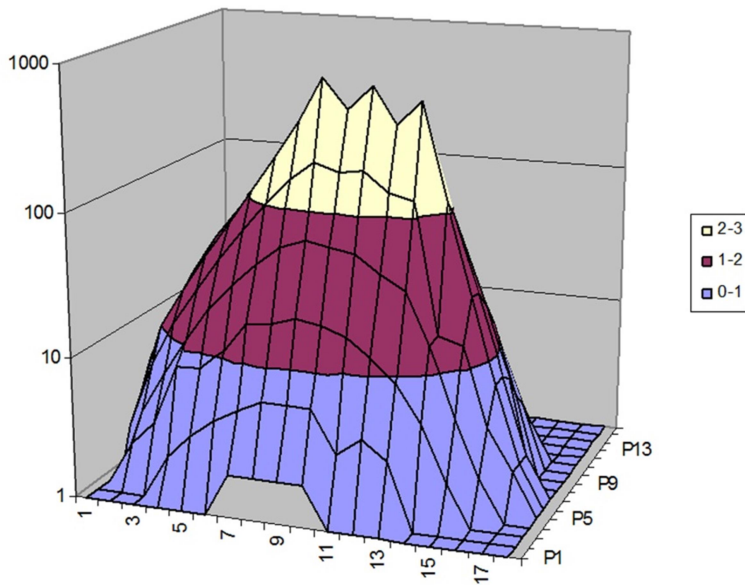


Рис. 5. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 17,15$ ч на поверхности земли $z = 300$ м

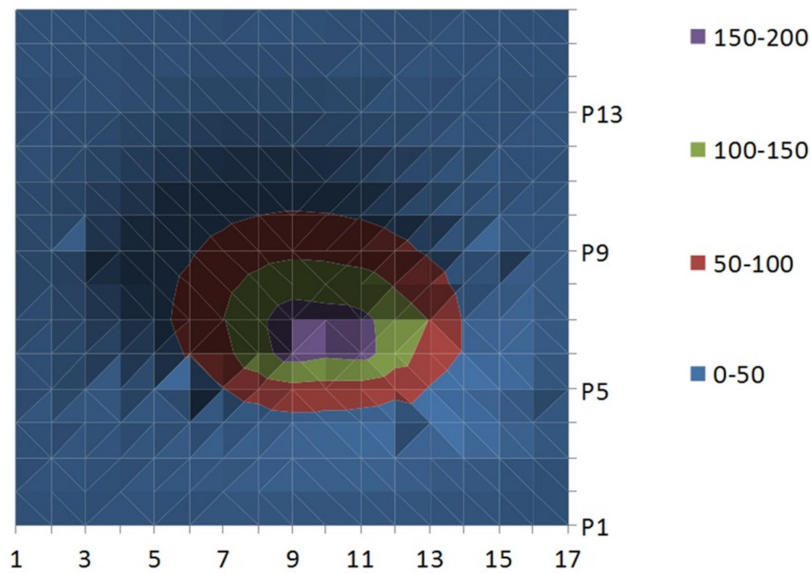


Рис. 6а. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 17,15$ ч на поверхности земли $z = 1000$ м

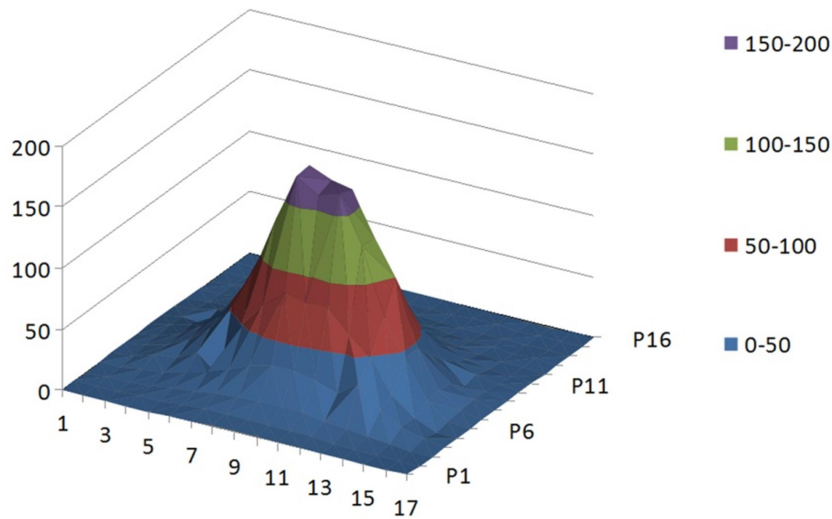


Рис. 6б. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 17,15$ ч на поверхности земли $z = 1000$ м

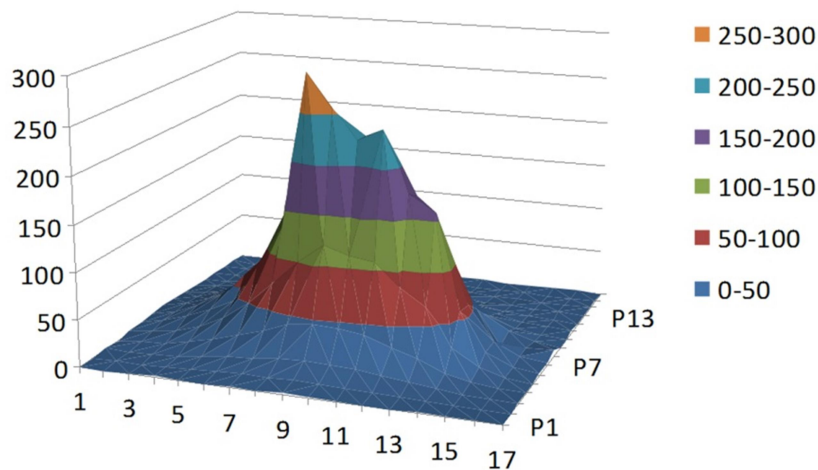


Рис. 7. Изменение концентрации вредных веществ в атмосфере при времени прогноза $t = 17,15$ ч на поверхности земли $z = 600$ м

На основе разработанных алгоритмов создан комплекс программ, позволяющих исследовать распределение концентрации при горно-долинной циркуляции.

Объектом нашего исследования является Ахангаранская долина, расположенная в отрогах Западного Тянь-Шаня. Эта долина выбрана не случайно. Во-первых, наличие большого количества мощных источников загрязнения воздушного бассейна привело к опасной экологической обстановке. Во-вторых, это одна из типичных долин Западного Тянь-Шаня, что позволяет считать ее идеальной для модельных расчетов.

Нижняя часть Ахангаранской долины расположена в 50 км к юго-востоку от Ташкента. С севера долина ограничена самым южным и мощным отрогом Таласского Ала-Тау-Чаткальского хребта (рис. 1, 2). Кураминский хребет является отрогом Чаткальского хребта и ограничивает долину с юга.

Ось Ахангаранской долины направлена с юго-запада на северо-восток, т.е. открыта навстречу господствующим в тропосфере воздушным потокам. Выше населенного пункта Камар долина имеет направление с юго-запада на северо-восток. Долина в нижней и средней своих частях сравнительно орографически спокойна, т.е. не имеет резких

поворотов, существенных сужений и расширений, изменений в уклоне.

Долина в районе Ахангарана имеет ширину 17-20 км, далее суживается возле Турка и имеет ширину 1,5-3 км. Длина долины от замыкающего долину хребта до восхода составляет 105 км.

Средняя высота ограничивающих долину хребтов около 3,5 км. Общий уклон дна долины $(2,5 - 2,7) \cdot 10^{-2}$ рад.

По целому ряду морфометрических характеристик эта долина схожа с другой долиной Западного Тянь-Шаня – Пскемской. Обе долины занимают одинаковое положение в горной системе, открыты на юго-запад, т.е. навстречу господствующим в тропосфере воздушным потокам. Длина и уклон долин примерно одинаковы. Ширина долин на уровне полувывсоты боковых хребтов одинакова и равна 2 км, они симметричны и V-образны.

В соответствии с физико-географическим положением долин в них в теплую часть года (апрель-октябрь) возникает хорошо выраженная горно-долинная циркуляция. В холодное время года (ноябрь-март) преобладающими являются стоковые ветра и ветра высасывания (таблица).

Основные характеристики долинного и горного ветра

№ п/п	Характеристики ГДЦ	Долинный ветер		Горный ветер	
		Ахангаран	Пскем	Ахангаран	Пскем
1	Направление (румб)	ЮЗ	ЮЗ	СВ	СВ
2	Скорость ветра у земли	5,0	4,9-5,5	3,0	2,6
3	Скорость ветра в потоке	7,0	8,9	5,0	5,0
4	Мощность потока (км)	1,0	1,4	0,7	1,6

Как видно, структура воздушного потока в обеих долинах почти одинакова. Мощность долинного ветра не превышает 1,0 - 1,4 км, а горного - в пределах 1,1 - 2,1 км.

Параметр устойчивости направления воздушного потока определяется как отношение модели скорости ветра к величине его продольной составляющей. Оба параметра получены на основании достаточно обеспеченного аэрологического материала, полученного по экспедиционным данным в Пскемской долине. Для долинного ветра характерна умеренная термическая неустойчивость по направлению, т.е. в осевой части долин поперечная составляющая ветра практически отсутствует. В холодное время в Ахангаранской долине преобладают северо-восточные ветра, охватывающие, как правило, всю долину, как по длине, так и по высоте. Скорости ветра могут достигать 15-17 м/с и более. В период холодных вторжений ветра имеют направление по долине, т.е. юго-западное направление.

Численные эксперименты проводились для различных значений скорости ветра, соответствующих наиболее характерным этапам развития горно-долинной циркуляции рассматриваемого района, а также с учетом различных

синоптических положений. По данным расчета получены поля распределения концентраций в долях предельно допустимых концентраций (ПДК) для 13 видов загрязнения воздуха (ЗВ), выбрасываемых в атмосферу долины. Это окиси азота (NO_x), сернистый ангидрид (SO_2), угарный газ (CO), зола, пыль, неорганическая пыль цемента, пыль Клиникера, фтороводород (FH), серная кислота (H_2SO_4), соединения мышьяка (AS), свинца (Pb), меди (Cu) и цинка (Zn).

При анализе полей горизонтального и вертикального распределения концентраций NO_x хорошо видно, что наиболее опасные в экологическом отношении положения складываются при смене ГДЦ. В эти промежутки времени по всей Ахангаранской долине формируется широкая полоса загрязнения с превышением нормы вблизи очагов выбросов (г. Алмалык, Ангрэн) свыше 1 ПДК.

При установлении долинного и горного ветров ситуация существенно изменяется. В период максимального развития долинного ветра (1,7-1,8; 1,13) наблюдается значительное уменьшение концентрации в 9-10 раз и сужение опасной зоны. В случае установления горного ветра (1,16, 1,17, 1,22) вымывание не такое полное, концентрация ЗВ уменьшается только в 3-5 раз. Это объясняется тем,

что вертикальная мощность горного ветра и его характерные скорости в потоке меньше, чем у долинного.

Также интересно прогнозировать динамику распространения ЗВ при различных синоптических положениях, которым соответствуют случаи усиления долинного или горного ветров. При долинном ветре его усиление (1,9-1,14) способствует еще более полному выносу ЗВ из рассматриваемого района. Усиление горного ветра (1,11, 1,12, 1,15) в этом случае ослабляет долинный ветер, что приводит к накоплению ЗВ вблизи источников выброса.

При горном ветре ситуация несколько иная. Усиление долинного (1,18, 1,19, 1,23) вызывает уменьшение площади загрязнения практически в два раза, однако при этом концентрация ЗВ вблизи очагов выброса остается на том же уровне. При усилении горного ветра (1,20, 1,21, 1,24) наряду с сокращением площади загрязнения происходит снижение максимальной концентрации ЗВ до 0,2 ПДК. Это объясняется тем, что максимальные составляющие скорости ветра на этом уровне ($z = 330$ м) имеют восходящий характер для случая усиления горного ветра и нисходящий – для усиления горного ветра.

Результаты расчетов полного количества NOx, находящегося в взвешенном виде, показывают, что при различных условиях за период времени в 3 часа в области расчета накапливается от 0,3 до 3,6 тонн окисей азота.

Загрязнение области выбросами SO₂ имеет, в общем, такую же тенденцию, как и в случае загрязнения NOx. Максимальное накопление наблюдается в период смены ГДЦ, превышение нормы при этом составляет около 4 ПДК, а ЗВ распространяется по всей площади долины.

Во время развития долинного ветра выбросы SO₂ локализуются вокруг источников, концентрация ЗВ существенно падает (до 0,5 ПДК). При установлении горного ветра зона загрязнения уменьшается, но насыщенность ЗВ остается довольно высокой.

Влияние усиления долинного или горного ветра носит такой же характер, как и для первого ингредиента. То есть при долинном ветре его усиление приводит к снижению значений концентраций ЗВ, а при усилении горного ветра происходит расширение границы области загрязнения с увеличением значений ПДК в ее центре. При горном ветре усиление долинного ветра опять вызывает сокращение зоны загрязнения, не снижая концентрации SO₂ вблизи источников. Более сильные вертикальные и горизонтальные составляющие скорости при усилении горного ветра способствуют вымыванию и размыванию ЗВ по западной части долины.

Что касается содержания полного количества SO₂ в бассейне Ахангаранской долины, то расчеты показывают: в области долины за три часа накапливается от 4,5 до 4,5 тонн. Из всех газообразных ингредиентов SO₂ вырабатывается в наибольшем количестве и является одним из основных веществ, загрязняющих долину.

5. Заключение и выводы

Надо отметить, что в ходе решения поставленной выше задачи можно вычислить следующие основные показатели рассматриваемого процесса:

- полное количество аэрозолей в области D за время $[0, T]$ -

$$J_{D_T} = \int_0^T \int_D \theta(x, y, z) dD dt;$$

- среднее значение количества аэрозолей в области D_T или D_i за период T -

$$J_{D_{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{D_{cp}} \theta(x, y, z, t) dD_{cp} dt;$$

$$J_{D_{cpi}} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{D_{cpi}} \theta(x, y, z, t) dD_{cpi} dt;$$

- количество аэрозолей, выпавших на подстилающую поверхность D и D_i -

$$J_{D_S} = (w_g + \beta) \int_0^T \int_{D_S} \theta(x, y, z_0, t) dD_S dt;$$

$$J_{D_{Si}} = (w_g + \beta) \int_0^T \int_{D_{Si}} \theta(x, y, z_0, t) dD_{Si} dt;$$

- количество аэрозолей, выпавших на подстилающую поверхность в момент времени t_n в точке $z_k \in S$ -

$$J_{z_k} = (w_g + \beta) \theta(x_k, y_z, z_0, t_n),$$

откуда следует, что количество выпавших частиц на подстилающую поверхность земли в основном зависит от размера частиц, вертикальной скорости осаждения w_g и коэффициента β , а также от концентрации вредных веществ в атмосфере.

Численными расчетами установлено, что изменение концентрации аэрозолей в атмосфере существенно зависит от коэффициента поглощения частиц в атмосфере. Этот параметр изменяется в зависимости от степени влажности воздушной массы атмосферы, времени года и суток. При этом максимальное поглощение вредных аэрозольных частиц в атмосфере характерно для утреннего и вечернего времени суток.

Проведенные численные эксперименты при различных направлениях и скоростях ветра показали, что на изменение концентрации аэрозольных выбросов в атмосфере непосредственно влияют эти параметры. Также установлено, что с увеличением мощности аэрозольных генераторов растет площадь области, где концентрация превышает допустимую санитарную норму (рис. 3 а, б). При неустойчивой стратификации ветра область распространения вредных веществ имеет пикообразный характер (рис. 4 а, б) и максимально увеличивается со временем, причем за короткий промежуток.

Расчетные данные показали, что в изменении скорости и направления ветров существенную роль играют возвышенности – холмы или горные хребты,

находящиеся на открытом ландшафте. Над возвышенностями скорость ветра выше по сравнению с окружающей равнинной территорией. Так как область высокого давления фактически расширяется на некотором расстоянии до возвышенности, ветер изменяет свое направление прежде, чем достигнуть ее. Если воздушная масса встречается с крутым холмом с неровной поверхностью, то скорость ветра резко увеличивается, что приводит к росту коэффициента турбулентности. Скорость ветра возрастает с увеличением перепада атмосферного давления, а скорость воздушного потока падает у земли вследствие трения о шероховатости подстилающей поверхности.

Вычислительными экспериментами установлено, что при распространении вредных мелкодисперсных

частиц в атмосфере особую роль играет учет коэффициента взаимодействия с подстилающей поверхностью (рис. 5, 6).

При задании различных высот источника загрязнения установлено, что при выбросах из высоких источников максимальные концентрации загрязнения фиксируются при опасных скоростях ветра (в пределах от 3 до 6 м/с в зависимости от скорости истечения газов из устья выбросных труб) (рис. 6, 7). Опасная скорость ветра в сочетании с неустойчивой стратификацией и интенсивным переносом примесей приводит к максимальному росту значения концентрации вредных веществ в приземном слое атмосферы. В таких случаях основную роль в рассеивании вредных веществ в атмосфере играют горизонтальные потоки.

Литература

- [1] *Штырева Н.В.* Численная модель дальнего переноса загрязняющих веществ в атмосфере, реализованная на суперЭВМ CRAY Y-Y-MP8E // Труды Гидроменцентра РФ. – 2000. – Вып. 334. – С. 121-129.
- [2] *Iversen T., Nordeng T. E.* A numerical model suitable for the simulation of a broad class of circulation systems on the atmospheric mesoscale // Norwegian Institute for Air Research Techn. Rep. – 2001. – № 2. – Pp. 38-51.
- [3] *Lange R.* ADPIC - A three-dimensional particle-in-cell model for the dispersal of atmospheric pollutants and its comparison to regional tracer studies // Journal Applied Meteorology. – 1978. – Vol. 17. – Pp. 320-329.
- [4] *Pekar M.* Regional model LPMOD and ASIMD. Algorithms, parameterization and results of application to PB and CD in Europe scale for 1990 : ЕМЕР/МСС-Е Report 9/96. – Moscow, 1996. – 78 p.
- [5] *Заурбеков Н.С.* Математическое моделирование антропогенной нагрузки атмосферного воздуха промышленных регионов при реальных климатических условиях: Дис.... докт. техн. наук. – Тараз, 2009. – 234 с.
- [6] *Алборов И.В., Алехин В.И., Вагин В.С.* Математическое моделирование процесса переноса вредных веществ в условиях горного (городского) рельефа от импульсных источников // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2003. – № 11. – С. 1-3.
- [7] *Паровик Р.И.* Математическое моделирование процессов переноса радона в системе «грунт-атмосфера»: Дис. ... канд. техн. наук. – Актюбе, 2009. – 134 с.
- [8] *Паровик Р.И.* Моделирование процессов переноса радона в средах с фрактальной структурой / Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов // Математическое моделирование. - 2009. - Т. 21, № 8. - С. 30-36.
- [9] *Паровик Р.И.* Обобщенная одномерная модель массопереноса радона (ОА 222Rn) и его эксхалация в приземный слой атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Математическое моделирование. - 2007. - Т. 19, № 11. - С. 43-50.
- [10] *Паровик Р.И.* Математическая диффузионная модель массопереноса радона (ОА 222Rn) в грунте и его эксхалации в приземном слое атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Вестник КРАУНЦ. Серия «Науки о Земле». - 2006. - № 1, вып. 7. - С. 110-114.
- [11] *Паровик Р.И.* Модель массопереноса радона (ОА 2221п) в приземном слое атмосферы / Р.И. Паровик, И.А. Ильин, П.П. Фирстов // Вестник КРАУНЦ. Серия «Науки о Земле». - 2006. - № 2, вып. 8. - С. 128-133.
- [12] *Паровик Р.И.* Моделирование процессов переноса радона 2221п в средах с фрактальной структурой и его стока в приземный слой атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия «Науки о Земле». - 2008. - № 1, вып. 12. - С. 188-193.
- [13] *Паровик Р.И.* Алгоритм расчета плотности потока радона с поверхности Земли / Р.И. Паровик, П.П. Фирстов // Вестник ТГУ. Серия «Математика и Механика». - 2008. - № 3 (4). - С. 96-102.
- [14] *Паровик Р.И.* Модель переноса радона (222Ип) в режиме супердиффузии во фрактальной среде / Р.И. Паровик, Б.М. Шевцов, П.П. Фирстов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. - 2008. - Т. 10, № 2. - С. 79-85.
- [15] *Бузало Н.С.* Математическое моделирование переноса примеси в мезометеорологическом пограничном слое атмосферы: Дис. ... канд. техн. наук. - Новочеркасск, 2003. – 167 с.
- [16] *Илюшин Б.Б.* Моделирование турбулентного переноса импульса, тепла и вещества в пограничном слое атмосферы: Дис. ... докт. техн. наук. – Новосибирск, 2003. - 198 с.
- [17] *Eswaran V., Pope S.B.* (1988) Direct numerical simulations of the turbulent mixing of a passive scalar // J.Phys.Fluids. - V. 31, № 3. - Pp. 506-520.
- [18] *Galperin B., Kantha L.N., Hassid S., Rosati A.* (1988) A quasi-equilibrium turbulent energy model for Geophysical flows // J. Atmos. Sci. - V. 45, № 1. - Pp. 55-62.

- [19] *Ilyushin B.B.* Higher moment diffusion in stably stratified and swirled flows. In Closure strategies for turbulent and transitional flows. Ed. B.E.Launder & N.D.Sandham. Cambridge University Press 2001 (a). - Pp. 424-448.
- [20] *Veeravalli S., Warhaft Z.* Thermal dispersion from a line source in the shearless turbulence mixing layer // J.Fluid Mech. – 1990. - V. 216. - Pp. 35-70.
- [21] *Пушилина Ю.Н.* Совершенствование методов моделирования и мониторинга загрязнения атмосферного воздуха горнопромышленного региона: Дис. ... канд. техн. наук. - Тула, 2011. - 156 с.
- [22] *Radkevich A.V, Bieliaiev M.M., Stepanenko O.O., Yakovlev S.O., Shaptala O.I., Lysniak V.M.* Calculation of air pollution in case of an accident based on the model convective and diffusion of the pollutant transfer // Springer Science & Business Media. – 2012. – 298 p.
- [23] *Миненко А.А.* Совершенствование методики оценки загрязнения почв горнопромышленного региона тяжелыми металлами: Дис. ... канд. техн. наук. - Тула, 2007. - 141 с.
- [24] *Серёгина О.В.* Оценка пылегазовых выбросов в атмосферу угольными шахтами и совершенствование отраслевой методики инвентаризации источников загрязнения: Дис. ... канд. техн. наук. - Тула, 2011. - 147 с.
- [25] *Данилов Д.Е.* Оценка экологического риска загрязнения атмосферного воздуха территорий техногенными выбросами: Дис. ... канд. техн. наук. – М., 2001. - 172 с.
- [26] *Уалханова А.Т.* Численное моделирование покомпонентного переноса вредных примесей в воздушном бассейне промышленного города: Автореферат дис. ... магистра естественных наук. - 2012. – 18 с.
- [27] *Соловьев Ю.И., Булыгин Ю.И., Корончик Д.А.* Конечно-элементное моделирование процессов массопереноса загрязнений в производственной среде с учетом завихрений воздушных потоков // Вестник ДГТУ. - 2012. - № 6.
- [28] *Месхи Б.Ч., Маслов Е.И., Соловьев А.Н., Булыгин Ю.И., Корончик Д.А.* Математическое и экспериментальное моделирование процессов распространения оксидов углерода и избытков теплоты в газовой среде помещения // Вестник ДГТУ. - 2011. - Т.11, № 6. - С. 862-874.
- [29] *Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N.* Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // American Journal of Modeling and Optimization. – 2015. – Vol. 3, № 2. – Pp. 35-39.
- [30] *Sharipov D.K.* Development of mathematical software aerosol transport and diffusion of the atmospheric emissions // European Applied Sciences. – 2013. –Vol. 1, № 1. – Pp. 233-240.
- [31] *Равшанов Н., Шарипов Д.К.* Модель и численный алгоритм для исследования процесса распространения вредных веществ в атмосфере // Актуальные вопросы технических наук: Материалы международной научной конференции. – Пермь, 2011. – С. 20-27.
- [32] *Ravshanov N., Sharipov D.* A physical splitting method for the solution of a problem of spread of harmful substances into the atmosphere // Intellectual Archive. – 2013. – Vol. 2, № 6. – Pp. 27-39.
- [33] *Sharipov D.K., Toshtemirova N., Narzullayeva N.* Numerical modeling of the spread of harmful substances in the atmosphere taking into account terrain // Problems of computational and applied mathematics. – Tashkent, 2016. – № 1. – Pp. 60-71. – <http://goo.gl/CPgK9L>.
- [34] *Ravshanov N., Sharipov D., Muradov F.* Computational experiment for forecasting and monitoring the environmental condition of industrial regions // Theoretical & Applied Science : International Scientific Journal. – 2016. – Vol. 35. – Issue 3. – Pp. 132-139. – Doi: <http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.03.35.22>
- [35] *Sharipov D.* A Mathematical Model and Computational Experiment for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // American Journal of Computation, Communication and Control. – 2016. – № 2(6). – Pp. 48-54.