УДК 517.956.3

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЗНИКАЮЩЕЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ*

[1]***Имомназаров Х. Х.***, [2]***Юсупов Р. К.***
imom@omzg.sscc.ru
[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, пр-т Лаврентьева, 6, г. Новосибирск, Россия;
[2]Каракалпакский государственный университет им.Бердаха, 230112, город Нукус, академик Ч. Абдировская улица, 1

В необратимом гидродинамическом приближении получена замкнутая система динамических интегродифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент скоростей вектора смещений упругого пористого тела, насыщающей жидкости и тензора напряжений. Исследована зависимость дисперсионного соотношения полученной системы от физических и кинетических параметров.

Ключевые слова: пористая среда, сила трение, проницаемость, гиперболическая система, скорость смещений, относительная скорость, интеграл свертки.

Цитирование: *Имомназаров Х. Х., Юсупов Р. К.* Интегродифференциальное уравнение возникающее в динамической теории пороупругости // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 6(18). — С. 51–56.

1 Введение

Присутствие воды и газа в подземных резервуарах приводит к фазовым сдвигам и зависимости от частоты изменения амплитуды сейсмических волн (например, [1, 2]).

В работах [3, 4] ввели двухфазную модель среды для описания взаимосвязанного распространения волн в пористой флюидонасыщенной среде. Большое внимание уделяется также моделям диссипации пористой среды и способам ее учета в уравнениях состояния.

Теория Френкеля-Био является линейной теорией эффективных двухфазных сред (модель среды состоит из жесткого пористого каркаса и насыщающей жидкости заполняющей поры), уравнения которой выводятся при некоторых допущениях на основе постулирования определений функции плотности энергии упругой деформации и кинетической энергии. С использованием методов осреднения разными авторами были получены макроскопические уравнения динамической пороупругости (см., например, [5-11]), которые в целом согласуются с теорией Френкеля-Био в случае слабовязкого насыщающего флюида.

Фундаментальное свойство упруго-пористой насыщенной среды, следующее из теории Био, состоит в том, что в таких средах могут распространяться две продольные волны, быстрая и медленная, а также поперечная волна.

Эта система описывает распространения сейсмических волн в пористой среде и в изотропном случае содержит четыре независимых упругих параметра [3, 4]. Линеаризованная теория континуальной теории фильтрации является замкнутой системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов скорости

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00729, код проекта 16-07-01052)

смещений упругого пористого тела и скорости жидкости [12, 13]. Также как теория Френкеля-Био описывает распространения сейсмических волн в пористой среде. Фундаментальное свойство упруго-пористой насыщенной среды, состоит в том, что в таких средах могут распространяться две продольные волны, быстрая и медленная, а также поперечная волна. В отличие от него в изотропном случае описывается тремя независимыми упругими параметрами.

В 1987 году Джонсон-Коплик-Дашен (JKD) [14] получили общее выражение для диссипации в случае случайных пор. Вязкие силы зависят в этой модели в частотной области от квадратного корня от частоты. Следовательно, это приводит во временной области к интегродифференциальному уравнению с сингулярным ядром.

В данной работе получена одномерная система динамических уравнений первого порядка относительно компонент вектора смещений упругого пористого тела, насыщающей жидкости и тензора напряжений в диссипативном приближении.

2 Одномерная система динамических уравнений пороупругости для поперечных волн в диссипативном приближении

Рассмотрим распространение нелинейных поперечных сейсмических волн в случае, когда парциальные плотности матрицы пористого тела ρ_s, насыщающей жидкости ρ_l, а также модуль сдвига μ являются постоянными, а сила трения, определяющая диссипацию энергии, является функцией разности скоростей $\varphi = \varphi(u-v)$. При таких предположениях система нелинейных одномерных уравнений пороупругости может быть записана в следующем виде [15, 16]:

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{\sigma}_x - \varepsilon\varphi, \\ \tilde{\sigma}_t &= c_t^2\, u_x, \\ v_t &= \varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

где u и v - скорости пористой матрицы и насыщающей жидкости, соответственно; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ - операторы дифференцирования; $\rho_s = \rho_s^f(1-\varphi)$, $\rho_l = \rho_l^f\,\varphi$, φ - пористость, ρ_s^f и ρ_l^f - физические плотности пористого тела и насыщающей жидкости, соответственно; $\rho_s\tilde{\sigma}$ - тензор напряжений, $c_t = \sqrt{\mu/\rho_s}$, $\varepsilon = \rho_l/\rho_s$.

Линеаризуем систему (1), получим систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{\sigma}_x - \varepsilon\chi\rho_l(u-v), \\ \tilde{\sigma}_t &= c_t^2\, u_x, \\ v_t &= \chi\rho_l(u-v), \end{aligned} \tag{2}$$

где χ - коэффициент межфазного трения.

В случае когда пористая среда является с памятью в системе (2) вводятся интегральные операторы свертки [14, 17]:

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{\sigma}_x - \varepsilon\chi\rho_l * (u-v), \\ \tilde{\sigma}_t &= c_t^2\, u_x, \\ v_t &= \chi\rho_l * (u-v), \end{aligned} \tag{3}$$

где $*$ - является оператором свертки во времени.

В случае, когда поток жидкости в порах относится к типу Пуазейля, диссипативное члены в (3) даются выражением

$$\chi(t) = \chi_0\,\delta(t) \Longleftrightarrow \chi(t) * w(x,t) = \chi_0\, w(x,t),$$

где $\delta(t)$ - функция Дирака.

3 Дисперсионный анализ

Исследуем условие существование решение системы (3) в виде плоских монохроматических волн

$$(u,\, v,\, \tilde\sigma) = (u_0,\, v_0,\, \tilde\sigma_0)\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega\, t)}, \tag{4}$$

Подставляя решения (4) в системе (3), приходим к однородным линейным однородным линейным алгебраическим уравнениям на амплитуды u_0, v_0, $\tilde\sigma_0$:

$$\begin{gathered}(\omega + i\,\varepsilon\,\rho_l\,\hat\chi(\omega))u_0 - i\,\varepsilon\,\rho_l\,\hat\chi(\omega)\,v_0 + k\tilde\sigma_0 = 0,\\ k\,c_t^2\,u_0 + \omega\,\tilde\sigma_0 = 0,\\ i\,\rho_l\,\hat\chi(\omega)\,u_0 + (\omega + i\,\rho_l\,\hat\chi(\omega))\,v_0 = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

В (5) $\hat\chi(\omega)$ - преобразование Фурье от функции $\chi(t)$ по времени.

Условие существования решений вида (4) сводится к равенству нулю определителя системы (5) и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{\omega^2}{k^2}\left(1 + i\,\frac{\hat\chi(\omega)}{\omega}\,\frac{\rho_l}{\rho_s}\,\rho\right) = \frac{\mu}{\rho_s}\left(1 + i\,\frac{\hat\chi(\omega)}{\omega}\,\rho_l\right).$$

Эта выражение позволяет определить скорость $c_t(\omega) = \frac{\omega}{k}$.

Представим $c_t(\omega)$ в виде

$$c_t(\omega) = A(\omega) - i\,B(\omega),$$

где $A(\omega) = Re\, c_t(\omega)$, $B(\omega) = -Im\, c_t(\omega)$. В этом случае выражение (4) можно преобразовать [13]

$$(u,\, v,\, \tilde\sigma) = (u_0,\, v_0,\, \tilde\sigma_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-x/u(\omega))}\,\mathrm{e}^{-x/\lambda_\partial(\omega)}. \tag{7}$$

Скорость поперечной волны $u(\omega)$ и длина поглощения $\lambda_\partial(\omega)$ определяются посредством $A(\omega)$ и $B(\omega)$ формулами

$$\begin{gathered}u(\omega) = \frac{A^2(\omega)+B^2(\omega)}{A(\omega)},\\ \lambda_\partial(\omega) = \frac{A^2(\omega)+B^2(\omega)}{\omega\,B(\omega)}.\end{gathered} \tag{8}$$

Высокочастотным пределам фазовой скорости волн сдвига удовлетворяет соотношение

$$\bar c_t^{\infty} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}.$$

На рисунках 1 и 2 показаны дисперсионные кривые соответствующие скорости и длине поглощения поперечной волны. Физические параметры, используемые в численных экспериментах, взяты из [13, 14]:

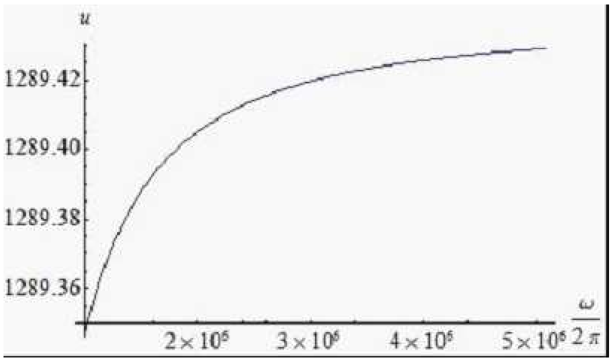

Рис. 1 Дисперсионная кривая скорости поперечной волны.

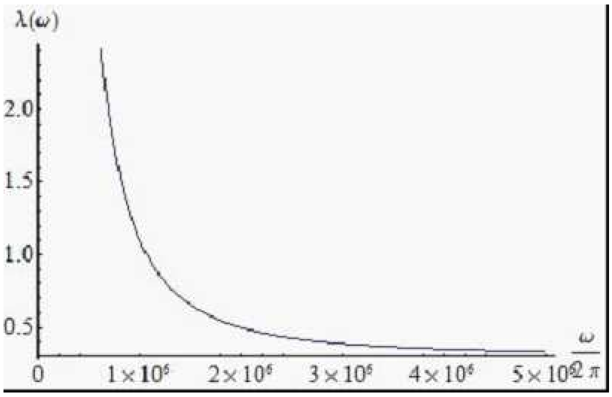

Рис. 2 Дисперсионная кривая длины поглощения поперечной волны.

1. $\hat{\chi}(\omega) = \frac{\eta}{\varkappa\rho\rho_l} / \sqrt{1 + i\frac{\omega}{\Omega}}, \qquad \Omega = \frac{\eta\,\varphi^2\Lambda^2}{4\,a^2\,\varkappa^2\,\rho_l^f},$
2. $\rho_l^f = 1040\,(\text{кг}/\text{м}^3), \qquad \rho_s^f = 2650\,(\text{кг}/\text{м}^3),$
3. $\eta = 1.5 \cdot 10^{-3}\,(\text{Па·с}), \qquad \mu = 2.93 \cdot 10^9\,(\text{Па}), \qquad \varphi = 0.335,$
4. $a = 2, \qquad \varkappa = 10^{-11}\,(\text{м}^2), \qquad \Lambda = 2.19 \cdot 10^{-5}\,(\text{м}).$

Систему (3) можно представить в случае с переменными коэффициентами в виде интегро-дифференциального уравнения относительно скорости смещений упругого пористого тела. В случае для малых значений пористости данное уравнение имеет вид [18]

$$u_{tt}(t,x) - c_t^2(t,x)\,u_{xx} + \alpha_1(t,x)u_t(t,x) + \alpha_2(t,x)u_x(t,x) +$$

$$+\alpha_3(t,x)u(t,x) + \int_0^t \alpha_4(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = f(t,x),$$

где коэффициенты $\alpha_k(t,x)u_t(t,x)$ (k=1,2,3,4) – заданные не обращающиеся в нуль ни в одной точке функции, $f(t,x)$ – описывает источник.

4 Заключение и выводы

Построена термодинамически согласованная математическая модель для описания распространения сдвиговых акустических волн в насыщенных жидкостью пористых средах с учетом дисперсии обусловленной межкомпонентным трением. Проведен дисперсионный анализ построенной математической модели. Представлены результаты численного моделирования распространения сейсмических волн для скорости и длины поглощения пробной модели среды.

Литература

[1] Castagna J.P., Sun S., Wu S.R. Instantaneous spectral analysis: detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons // The Leading Edge, 2003, v. 22, pp. 120–127.

[2] Korneev V.A., Goloshubin G.M., Daley T.V., Silin D.B. Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs // Geophysics, 2004, v. 69, pp. 522–532.

[3] Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8, №4. С. 133–150.

[4] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid I. // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. Vol. 28. P. 168–178.

[5] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.

[6] Burridge R., Keller J. Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. Vol. 70. pp. 1140–1146.

[7] Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М., 1984. 232 с.

[8] Berryman J.G., Thigpen L. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids // J. Appl. Mech. 1985. Vol. 52. pp. 345–350.

[9] Whitaker S. 1) Flow in porous media. I. A technical derivation of Darcy's law // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1. pp. 3–25; 2) Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1. pp. 105–125; 3) Flow in porous media. III. Deformable media // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1. pp. 127–154.

[10] Pride S.R., Gangi A. F., Morgan F.D. Deriving the equations of motion for porous isotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1992. No. 6. pp. 3278–3290.

[11] Молотков Л.А. Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 347 с.

[12] Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва - 1993. - No 1. - С. 100-111.

[13] Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum, Nova Science, New York, 1995.

[14] Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // J. Fluid Mech., 1987, v. 176, pp. 379–402.

[15] Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Коробов П.В., Холмуродов А.Э. Прямая и обратная задача для нелинейных одномерных уравнений пороупругости // Доклады Академии Наук, 2014, том 455, № 6, С. 640-642.

[16] Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.

[17] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, Мир, 1974

[18] Yangiboev Z. The first Darboux problem for second order hyperbolic equations with memory // Mathematical Modeling in Geophysics. — 2015. — No. 18. — pp. 49-52.

Поступила в редакцию 10.09.2018

UDC 517.956.3

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ARISING IN THE DYNAMIC POROELASTICITY THEORY

[1]***Imomnazarov Kh.Kh.***, [2]***Yusupov R.K.***
imom@omzg.sscc.ru
[1]The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Prospekt Akademika Lavrentyeva, 6, Novosibirsk, Novosibirskaya oblast, Rossiya, 630090;
[2]Karakalpak state university named after Berdakh, 230112, Nukus city, Academician Ch. Abdirov streeet, 1

In an irreversible hydrodynamic approximation, a closed system of first order dynamic integro-differential equations with respect to the velocity component of the displacement vector of an elastic porous body, a saturating fluid, and a stress tensor has been obtained. The dependence of the dispersion relation of the obtained system on physical and kinetic parameters is investigated.

Keywords: porous medium, force friction, permeability, hyperbolic system, displacement velocity, relative velocity, convolution integral.

Citation: Imomnazarov Kh.Kh., Yusupov R.K. 2018. Integro-differential equation arising in the dynamic poroelasticity theory. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 6(18): 51–56.