УДК 519.63

# СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ

[1]***Арипов М. М.***, [2]***Утебаев Д.***, [3]***Утебаев Б. Д.***
mirsaidaripov@mail.ru; dutebaev-56@mail.ru; bakhadir1992@mail.ru
[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека;
[2]Каракалпакский государственный университет им. Бердаха;
[3]Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова

В настоящей работе предложены и исследованы разностные схемы высокого порядка точности по пространству и по времени решения краевых задач для уравнения конвекции–диффузии. При пространственной аппроксимации задачи рассматривались схемы различного порядка точности: метода конечных разностей второго порядка точности и метода конечных элементов третьего порядка точности. Для абстрактной задачи Коши полученной при пространственной аппроксимации построены разностные схемы метода конечных элементов четвертого порядка точности. Получены соответствующие условия устойчивости и априорные оценки решения построенных разностных схем. Доказаны соответствующие оценки точности построенных схем в классе гладких решений.

**Ключевые слова:** уравнение конвекции-диффузии, разностные схемы, метод конечных разностей, метод конечных элементов, устойчивость, точность

**Цитирование:** *Арипов М.М., Утебаев Д., Утебаев Б.Д.* Схемы повышенной точности для нестационарных задач конвекции – диффузии // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 2(20). — С. 5–13.

## 1 Постановка задачи

Решение сложных прикладных разработок приводит к созданию более точных численных алгоритмов или совершенствованию существующих. Она проявляется особенно при исследовании сложных нестационарных процессов, например, как решения нестационарных задач конвекции – диффузии. Существует много задач, которые приводит к решению нестационарного дифференциального уравнения конвекции – диффузии. Это – задачи гидродинамики, задачи тепломассообмена, проблемы окружающей среды и многие другие [1–3]. В частности, уравнением конвекции-диффузии описывается диффузия электрически заряженных примесей в твердом теле, которые играют важнейшую роль в микроэлектронике [4, 5]. Аналогичная математическая модель получается при исследовании динамики морских и океанических течений. Кроме того, такие задачи возникают при исследовании экологических проблем, связанных с описанием процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод [6]. В настоящей работе рассматриваются вопросы построения и исследования разностных схем повышенной точности для нестационарного уравнения конвекции – диффузии.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения конвекции-диффузии в общем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_1 u + L_2 u = f(x,t) \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset R^3,\ t \in (0,T]\}$$

$$u(x,t)=0,\ \ x\in=\partial\Omega\,,\quad t\in(0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in\Omega \tag{3}$$

Здесь

$$\Omega=\{x:x=(x_1,x_2,x_3),\ \ 0<x_m<l_m,\,m=\overline{1,3}\}\,,\ \ \bar{\Omega}=\Omega\cup,$$

$[L_1u\,]$ – оператор конвективного переноса, $[L_2u]$ – оператор диффузионного переноса. Другие краевые условия рассматриваются аналогично. Приведем некоторые примеры, которые приводит к решению задачи (1) – (3).

**Пример 1.** Трехмерные задачи конвекции – диффузии в симметричном виде задается следующими операторами [7, 8]:

$$L_1u\equiv C_0u=\tfrac{1}{2}\left(C_1+C_2\right),L_2u=-k\sum_{\alpha=1}^{3}\tfrac{\partial^2u}{\partial x_\alpha^2},$$
$$C_1u=\sum_{\alpha=1}^{3}a_\alpha(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_\alpha},C_2u=\sum_{\alpha=1}^{3}\tfrac{\partial(a_\alpha(x)u)}{\partial x_\alpha}.$$

Если $L_1u=C_1u$, то получим задачу конвекции – диффузии в недивергентном виде, а если $L_1u=C_2u$, то получим задачу конвекции –диффузии в дивергентном виде. Здесь $a_\alpha(x),\ \ \alpha=1,2,3$ – компоненты скорости, $k-const$– коэффициент диффузии.

**Пример 2.** Математические модели размещения источников загрязнения в водоемах и прибрежных морях имеет вид (1) с операторами

$$L_1u=\sum_{\alpha=1}^{3}a_\alpha\tfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\sigma u\ ,\ L_2u=-k\tfrac{\partial}{\partial x_3}v\tfrac{\partial u}{\partial x_3}-\mu\sum_{\alpha=1}^{3}\tfrac{\partial^2u}{\partial x_\alpha^2},$$

где $u$– компоненты загрязняющего гидрозоля, $a_\alpha(x),\ \ \alpha=1,2,3$ – компоненты вектора скорости течения, удовлетворяющего уравнению неразрывности

$$div\,a\ =\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}\ =0,\quad x\in\Omega., \tag{4}$$

а остальные параметры определены в [6].

**Пример 3.** Линеаризованная математическая модель динамики морских и океанических течений имеет вид (1) с операторами

$$D\frac{\partial u}{\partial t}+L_1u+L_2u=f(x,t).,$$

где

$$D=\begin{bmatrix}\rho_0E&0&0&0&0&0\\0&\rho_0E&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}E&0\\0&0&0&0&0&\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}E\end{bmatrix},$$

$$L_1=\begin{bmatrix}0&-\rho_0lE&0&\frac{\partial}{\partial x}&0&0\\\rho_0lE&0&0&\frac{\partial}{\partial y}&0&0\\0&0&0&\frac{\partial}{\partial z}&-g\alpha_TE&-g\alpha_SE\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}&0&0&0\\0&0&g\alpha_TE&0&0&0\\0&0&g\alpha_SE&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$
L_2 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix},
$$

$R_i = D_0 + D_i,\ D_0 = div\ u^{j-1}$ , $i = 1, 2, 3, 4...,\ D_1 = -\rho_0 \left(\mu\Delta + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ,
$D_2 = D_1,\ D_3 = -\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}\left(\mu_T\Delta + \frac{\partial}{\partial z} v_T \frac{\partial}{\partial z}\right),\ D_4 = -\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}\left(\mu_S\Delta + \frac{\partial}{\partial z} v_S \frac{\partial}{\partial z}\right)$, а остальные параметры определены в [6].

**Пример 4.** В виде (1) записывается задача для параболического уравнения [8]

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha(x)\Lambda_\alpha u = f(x,t),\ \ x \in \Omega,\ \ 0 < t \leqslant T \tag{5}
$$

получающиеся при расчете давления многофазной жидкости [10, 11]. Здесь

$$
\Lambda_\alpha u = -div(a_\alpha(x) gradu),\ \ \alpha = 1, 2, ..., m.
$$

На коэффициенты уравнения накладываются ограничения

$$
\sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha(x) > 0,\quad a_\alpha(x) > 0,\quad x \in \Omega\,,\quad \alpha = 1, 2, ..., m.
$$

Уравнение (5) записывается в эквивалентном виде (1), где

$$
L_1 u = C_\alpha u = w_\alpha gradu,\quad w_\alpha = k_\alpha grada_\alpha,
$$

$$
L_2 u = D_\alpha u = -div(d_\alpha(x) gradu),\ \ d_\alpha = k_\alpha a_\alpha,\ \ \alpha = 1, 2, ..., m.
$$

Следовательно, параболическое уравнение (5) записывается как уравнение конвекции-диффузии.

Как обычно, для исследования устойчивости схемы введем пространство $H = L_2(\Omega)$– гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$ для функции $u(x)$ и $v(x)$, обращающиеся в нуль на $\Gamma$ и нормой вида $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Задача (1)-(3) после дискретизации по пространству записывается в виде эволюционного уравнения первого порядка

$$
D\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t),\quad u(0) = u_0.
$$

Для этой задачи в [7] при предположении $L_2 = L_2^* \geqslant k\lambda_0 E,\ |(L_1 u, u)| \leqslant M_1 \|u\|^2$ и $\|L_1 u\|^2 \leqslant M_2 (L_2 u, u)$ получены априорные оценки по начальным данным:

$$
\|u(t)\| \leqslant \exp((M_1 - k\delta)t)\,\|u(0)\|\,,\quad \|u(t)\| \leqslant \exp(\frac{M_2}{4}t)\,\|u(0)\|
$$

и оценка в более сильной норме

$$
\|u(t)\|_{L_2} \leqslant \exp(\frac{M_2}{4}t)\|u(0)\|_{L_2},
$$

где $M_1,\ M_2$ некоторые постоянные. Соответствующие оценки по правой части получены в [8]:

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \exp(2M_1 t)\|u(0)\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \exp(2M_1(t-\theta))\,\|f(\theta)\|^2_{L_2^{-1}}\,d\theta,$$

$$\|u(t)\| \leqslant \exp(\frac{1}{4}M_2 t)\,\|u(0)\| + \int\limits_0^t \exp(\frac{1}{4}M_2(t-\theta))\,\|f(\theta)\|\,d\theta.$$

Как известно, оператор диффузионного переноса $L_2 = L_2^* \geqslant k\lambda_0 E$, где $E$– тождественный оператор, $\lambda_0{>}0$ – минимальное собственное значение оператора Лапласа. На основе однородных граничных условий (2) устанавливается, что [7, 8] $C_1^* = -C_2,\quad C_0 = -C_0^*.$, т.е. сопряженность с точностью знака операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах друг другу и кососимметричность оператора конвективного переноса в симметричной форме. Кроме того, при выполнении условие несжимаемости (4) кососимметричными будут и операторы конвективного переноса в дивергентном $(C_1)$ и недивергентном $(C_2)$ видах, т.е. при выполнении условие несжимаемости (4) эквивалентным будут уравнения дивергентном и недивергентном видах.

## 2 Аппроксимация по пространству

Построим подпространство $H_h \in H$, аппроксимирующее $H$. При построении разностных схем должны сохраняться основные свойства дифференциальных операторов. Пусть операторы $A_1,\ A_2\ :\ H_h \to H_h$. аппроксимируют, соответственно $-L_1$ и $-L_2$.

Заменим задачу (1) – (3) задачей Коши для функции абстрактного аргумента $u_h(t) \in H_h$ :

$$D\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h} \tag{6}$$

Здесь $A = A_1 + A_2$, $u_{0,h} = P_h u_0$– интерполянт начального условия, $P_h$– оператор проектирования $P_h : H \to H_h$ и $f_h(t) = P_h f(t)$.

Перейдем к выбору подпространства $H_h$. Остановимся на двух способах.

*Первый способ* соответствует разностной аппроксимации уравнения (1) по пространственным переменным. Введем сетку $\bar\omega_h = \bar\omega_{h_1} \times \bar\omega_{h_2} \times \bar\omega_{h_3}$, где $\bar\omega_{h_m} = \left\{x_m = i_m h_m,\ i_m = \overline{0, N}_m,\ \ h_m = l_m/\,h_m\right\},\quad m = \overline{1,3},\ \ \bar\omega_{h_m} = \omega_{h_m} \cup \gamma_h$... В этом случае подпространство $H_h = \overset{\circ}{W}{}_2^1\,(\omega_h)$-пространство сеточных функций $y(x_1, x_2, x_3)$ с нормой $\|y\|_1 = \sqrt{\sum\limits_{i_1=1}^{N_1}\sum\limits_{i_2=1}^{N_2}\sum\limits_{i_3=1}^{N_3} h_1 h_2 h_3 \left((y_{\bar x_1})^2 + (y_{\bar x_2})^2 + (y_{\bar x_3})^2\right)} \leqslant M.$, где постоянная $M$ не зависит от $h_1$, $h_2$, $h_3$ [11]. Множество граничных узлов обозначим через $\gamma_h$. Аппроксимируем операторы $-L_1$ и $-L_2$ на сетке $\omega_h$ разностными операторами $A_1$ и $A_2$ соответственно. Оператор диффузионного переноса и конвективные слагаемые на множестве функции $y \in H_h$ аппроксимируются выражениями [7]:

$$A_2 y = -k\sum_{\alpha=1}^{3} y_{\bar x_\alpha x_\alpha}, \quad y = 0 \text{ при } x \in \gamma_h$$

$$A_1 y = S_1 y = \sum_{\alpha=1}^{3} b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, A_1 y = S_2 y = \sum_{\alpha=1}^{3} (b_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \tag{7}$$

$$A_1 y = S_0 y = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \left( b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + (b_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} \right)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
y_{\bar{x}_1 x_1} &= (y_{i_1+1,i_2,i_3} - 2y_{i_1,i_2,i_3} + y_{i_1-1,i_2,i_3})/h_1^2,\\
y_{\bar{x}_2 x_2} &= (y_{i_1,i_2+1,i_3} - 2y_{i_1,i_2,i_3} + y_{i_1,i_2-1,i_3})/h_2^2,\\
y_{\bar{x}_3 x_3} &= (y_{i_1,i_2,i_3+1} - 2y_{i_1,i_2,i_3} + y_{i_1,i_2,i_3-1})/h_3^2,\\
y_{\overset{\circ}{x}_1} &= (y_{i_1+1,i_2,i_3} - y_{i_1-1,i_2,i_3})/(2h_1)\,,\\
y_{\overset{\circ}{x}_2} &= (y_{i_1,i_2+1,i_3} - y_{i_1,i_2-1,i_3})/(2h_2),\\
y_{\overset{\circ}{x}_3} &= (y_{i_1,i_2,i_3+1} - y_{i_1,i_2,i_3-1})/(2h_3).
\end{aligned}$$

При этом

$$A_2 = A_2^* \geqslant k\lambda_0 E, S_1^* = -S_2, \quad S_0 = -S_0^*. \tag{8}$$

Разностные операторы $A_1$ и $A_2$ приближают дифференциальные со вторым порядком погрешности аппроксимации.

*Второй способ* соответствует аппроксимации уравнения (1) по пространственным переменным методом конечных элементов. Сформулируем обобщенную постановку задачи (1), (3). Назовем обобщенным решением задачи функцию $u(x,t)$, которая при каждом $t \in (0,T]$ принадлежит $H = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, обладает производной $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ и почти всюду для всех $t \in (0,T]$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{gathered}
\left( \frac{du(t)}{dt}, \vartheta \right) + a_1(u(t),\vartheta) + a_2(u(t),\vartheta) = (f(t),\vartheta),\\
(u(0) - u_0, \vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta(x) \in H.
\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь в симметричном случае

$$a_1(u,\vartheta) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{3} \left[ {}_k(x) u_{x_k} + ({}_k(x) u)_{x_k} \right] \vartheta dx,$$

$$a_2(u,\vartheta) = -k \int\limits_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^{3} {}_k(x) u_{x_k} \vartheta_{x_k} \right) dx,$$

а в недивергентном и в дивергентном случаях:

$$a_1(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{3} ({}_k(x)u)_{x_k} \vartheta dx, \;\; a_1(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{3} ({}_k(x)u)_{x_k} \vartheta dx;$$

$u = u(t)$- функция абстрактного аргумента $t \in [0,T]$ со значениями в $H$.

Дискретизируем задачу по пространственным переменным с помощью метода конечных элементов. Пусть $H_h \subset H$ множество элементов вида

$$\vartheta_h = \sum_{m=1}^{M} a_m \Phi_m(x) \tag{10}$$

Здесь $\{\Phi_m = \Phi_m(x)\}_{m=1}^M$ базис из кусочно-полиномиальных функций, являющихся многочленом степени $p$ на каждом конечном элементе [12, 13].

Приведем пример базиса на основе многочленов третьей степени. Введем разбиение области $\Omega$ на $M = N_1 * N_2 * N_3$ параллелепипедов:

$$\Omega_{ijk} = \{(i-1)h_1 \leqslant x_1 \leqslant ih_1,\ (j-1)h_2 \leqslant x_2 \leqslant jh_2,\ (k-1)h_3 \leqslant x_3 \leqslant kh_3\}, \tag{11}$$

$$i = \overline{1, N_1},\ \ j = \overline{1, N_2},\ \ k = \overline{1, N_3},\ h_s = l_s/N_s,\ s = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Выберем систему базисных функций:

$$\Phi_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2)\varphi_k(x_3),\ i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2},\ k = \overline{1, N_3},$$

где $\varphi_l(x)$ - базисная функция, построенная на основе $B_3$-сплайна [12]. В этом случае $p = 3$. При этом, свойства операторов (8) не меняются. Поставим в соответствие (9) полудискретную задачу для $t \in [0, T]$ :

$$\left(\frac{du_h(t)}{dt}, \vartheta_h\right) + a_1(u_h, \vartheta_h) + a_2(u_h, \vartheta_h) = (f(t), \vartheta_h), \tag{13}$$

$$(u_h(0) - u_0, \vartheta_h) = 0, \quad \forall \vartheta_h \in H_h \tag{14}$$

Задаче (11), (12) соответствует задача Коши (6). Операторы $D$, $A$ действуют из $H_h$ в $H_h$. Им соответствуют матрицы жесткости $D = (\varphi_l, \varphi_m)_{l,m=1}^M$ и $A = (a_1(\varphi_l, \varphi_m))_{l,m=1}^M + (a_2(\varphi_l, \varphi_m))_{l,m=1}^M$. Кроме того, $u_{k,h} = P_h u_k(x),\ k = 0, 1$ где $P_h$ - оператор проектирования $P_h H = H_h$.

## 3 Аппроксимация по времени

Рассмотрим теперь дискретизацию задачи Коши (6) по временной переменной. Пусть $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, 2, ...\}$ сетка на отрезке $t \in [0, T]$ (для простоты равномерная). Для любого интервала $(t_n, t_{n+1}) \in [0, T]$ из (6) имеет место тождество:

$$\begin{gathered}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (-Du_h\dot{\vartheta} + Au_h\vartheta)dt + Du_h\vartheta|_{t_n}^{t_{n+1}} = \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\vartheta(t)dt,\ \ \forall\vartheta(t) \in H_h,\ \ u_h(0) = u_{0,h}\end{gathered} \tag{15}$$

Приближенное решение задачи (6) ищем в виде эрмитового сплайна третьей степени, как в [14]

$$u_h(t) \approx y(t) = y^n\varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n\varphi_{10}^n(t) + y^{n+1}\varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1}\varphi_{11}^n(t) \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}y^n = y(t_n),\ \dot{y}^n = \tfrac{dy}{dt}(t_n),\ \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1,\ \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi),\ \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2),\ \xi = (t - t_n)/\tau.\end{gathered}$$

Учитывая (14) и выбирая различные весовые функции $\vartheta(t)$ из (13), получим следующую двухпараметрическую векторную разностную схему для неизвестных $\overset{\wedge}{y}$, $\overset{\wedge}{\dot{y}}$ :

$$D\frac{\overset{\wedge}{y}-y}{\tau}-\frac{\tau^2}{12}A\frac{\overset{\wedge}{\dot{y}}-\dot{y}}{\tau}+A\frac{\overset{\wedge}{y}+y}{2}=\varphi_1$$

$$\gamma D\frac{\overset{\wedge}{\dot{y}}-\dot{y}}{\tau}+\alpha A\frac{\overset{\wedge}{y}-y}{\tau}+\beta A\frac{\overset{\wedge}{\dot{y}}+\dot{y}}{2}=\varphi_2 \qquad (17)$$

$$y^0=u_{h,0},\dot{y}^0=\dot{u}_{h,0},$$

где

$$\dot{u}_{h,0}=D^{-1}(f_h^0-Au_{h,0}),$$

$$\varphi_1=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}f(t)dt,\ \ \varphi_2=\frac{12}{\tau^3}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}f(t)\left(s_1\vartheta_2^{(1)}+s_2\vartheta_2^{(3)}\right)dt,$$

$$s_1=15\gamma-35\alpha/3, s_2=140\gamma-350\alpha/3,$$

$$\vartheta_2^{(1)}=t-(t_n+\tau/2)\ ,\upsilon_2^{(3)}=\tau(\xi^3-3\xi^2/2+\xi/2),\ \xi=(t-t_n)/\tau.$$

Схема (15) подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации по времени $\alpha+\beta=\gamma;\alpha,\ \beta,\ \gamma\ =\ O(\tau^2)$.

По вычисленным значениям $y^{n+1}, y^n, \dot{y}^{n+1},\ \dot{y}^n$ можно восстановить приближение к $u_h(t)$ для любого $t\in[t_n,t_{n+1}],\ n=0,1,...$ по формуле (14).

Комбинируя аппроксимации по пространству и по времени, рассмотрим два метода решения задачи (1) – (3):

**схема** $1^0$ –разностная аппроксимация второго порядка точности по пространству (7) и схема метода конечных элементов четвертого порядка точности (15) по времени;

**схема** $2^0$ –аппроксимация метода конечных элементов с бикубическими элементами по пространству (10) и схема метода конечных элементов четвертого порядка точности (15) по времени.

## 4 Об устойчивости и точности

Известно (см. [14]), что схема (15) с операторами $D^*=D>0,\ \ A^*=-A$ устойчива по начальным данным и по правой части, если выполнены условия

$$\alpha=\tau^2/12,\ \ \beta>0,\quad \gamma>0 \qquad (18)$$

Кроме того, при выполнении условия аппроксимации $\alpha+\beta=\gamma;\alpha,\ \beta,\ \gamma=O(\tau^2)$ имеет место оценки

$$\|u_h(t)-y(t)\|_{A^2}\leqslant M\tau^4,\ \ \|\dot{u}_h(t)-\dot{y}(t)\|_{A^2}\leqslant M\tau^4,$$

если только $u_h(t)\in C^6[0,T]$. Здесь учитывалось кососимметричность операторов $A_1$, самосопряженность и положительно-определенность $A_2$.

Для оценки точности схемы $1^0$ и $2^0$ необходимо дать оценку погрешности $z=u_h-$ $-u$. Используя методику такой оценки в теории разностных схем [11] сформулируем следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (16). Тогда решение схемы $1^0$ сходится к достаточно гладкому решению задачи (1)-(3) и справедливы оценки точности:

$$\|y(t) - u(t)\|_{A^2} \leqslant M(h^2 + \tau^4), \quad \|\dot{y}(t) - \dot{u}_h(t)\|_{A^2} \leqslant M(h^2 + \tau^4).$$

Теперь используя методику получения такой оценки теории метода конечных элементов [12, 13] сформулируем следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (16). Тогда решение схемы $2^0$ сходится к достаточно гладкому решению задачи (1)-(3) и справедлива оценка точности:

$$\|y(t) - u(t)\|_1 + \|\dot{y}(t) - \dot{u}_h(t)\|_1 \leqslant M(h^3 + \tau^4).$$

Третий порядок точности по пространству связан с выбором многочлена третей степени (14).

**Замечание.** Алгоритмам реализации и тестовым задачам будет посвящена отдельная статья.

## Литература


[1] *Patankor S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. — Washington, DC: Hemiaphere, 1980.

[2] *Poache P.J.* Computational Fluid Dynamics. — Albuquerque, NM: Hermosa, 1982.

[3] *Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М.,* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.

[4] *Зи С.* Технология СБИС. — М.: Наука, 1986.

[5] *Selberherr S.,* Analysis and Simulation of Semiconductor Devices. – Wien: Springer–Verlag, 1984.

[6] *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982. 320 с.

[7] *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. — Минск, 1998. 442 с.

[8] *Афанасьева Н.М., Вабищевич П.Н.* Устойчивые разностные схемы для некоторых параболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014. Т. 54. №7. С. 1186–1193.

[9] *Peaceman D.W.,* Fundamentals of numerical reservoir simulation. — Amsterdam: Elsevier, 2000.

[10] *Aziz K., Settari A.* Petroleum reservoir simulation. — London: Applied Sci. Pub. 1979

[11] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. 656 с.

[12] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. 416 с.

[13] *Quarteroni A., Valli A.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. — Berlin: Springer–Verlag, 1994. 544 p.

[14] *Утебаев Д.,* Разностные схемы для гиперболических систем уравнений с обобщенными решениями. — Ташкент: Фан ва технология, 2017. 236 с.


*Поступила в редакцию 01.12.2018*

UDC 519.63

# SCHEMES OF INCREASED ACCURACY FOR NON-STATIONARY CONVECTION – DIFFUSION PROBLEMS

[1]***Aripov M.M.***, [2]***Utebaev D.***, [3]***Utebaev B.D.***

mirsaidaripov@mail.ru; dutebaev-56@mail.ru; bakhadir1992@mail.ru

[1]National University of Uzbekistan. Mirzo Ulugbek;

[2]Karakalpak State University named after Berdakh;

[3]Tashkent State Technical University named after Islam Karimov

In the present paper, we proposed and investigated difference schemes of high order of accuracy on space and time for solving boundary value problems for the convection-diffusion equation. With the spatial approximation of the problem, schemes of a different order of accuracy were considered: the method of finite differences of second order of accuracy and the method of finite elements of the third order of accuracy. For the abstract Cauchy problem obtained with spatial approximation, finite-difference schemes of finite element method of the fourth order of accuracy are constructed. The corresponding stability conditions and a priori estimates of the solution of the constructed difference schemes are obtained. The corresponding estimates of the accuracy of the constructed schemes in the class of smooth solutions are proved.

**Keywords:** convection-diffusion equation, difference schemes, finite difference method, finite element method, stability, accuracy

**Citation:** Aripov M.M., Utebaev D., Utebaev B.D. 2019. Schemes of increased accuracy for non-stationary convection – diffusion problems. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(20): 5–13.