

УДК 512.312

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ПОТОКА В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ И ЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Равшанов Н.

д.т.н., заведующий лабораторией Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99871) 237-62-34, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Кодиров К.Р.

заведующий по учебным делам Национального Института художеств и дизайна имени Камолиддина Бехзода,
тел.: +(99894) 646-50-59, e-mail: qahramon@rambler.ru

Исламов Ю.Н.

к.б.н., доцент кафедры Ташкентского педиатрического медицинского института,
тел.: +(99893) 514-39-24, e-mail: yuldosh-islomov@rambler.ru

Куканова М.А.

преподаватель, Ангренский профессиональный колледж промышленности и сферы услуг,
тел.: +(99893) 608-80-18, e-mail: maloxat-kukanova@rambler.ru

Рассматривается актуальная экологическая задача, связанная с защитой подземных вод от технологических источников загрязнения. Приводится математическая модель процесса неустановившейся безнапорной фильтрации потоков жидкостей в неоднородных пористых средах, которые отличаются друг от друга гидрогеологическими характеристиками, и при наличии галереи скважин. Решение поставленной задачи безнапорной фильтрации потоков, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, получено в аналитическом виде с применением интегрального преобразования Лапласа по переменной t . Реализованное математическое обеспечение позволяет выявлять изолированные области, препятствующие проникновению различных ядохимикатов в зоны с относительно благоприятными экологическими условиями, что помогает специалистам принимать соответствующие управленческие решения.

Ключевые слова: математическая модель, аналитическое решение, пластовая фильтрация, пористая среда, массообмен, интегральное преобразование Лапласа.

MATHEMATICAL MODEL OF FLOW FILTRATION IN THREE-PLY SEAM AND ITS ANALYTICAL SOLUTION

Ravshanov N., Kadirov K.R., Islamov Yu.N., Kukanova M.A.

The article deals with the environmental problem related to the protection of groundwater from technological pollution. There is given a mathematical model of unsteady filtration of free fluid streams in heterogeneous porous media with the presence of well gallery. The fluid streams differ from each other by hydrogeological characteristics. The model is described by a system of differential equations in partial derivatives. Its solution was obtained in an analytical form using Laplace transform in the variable t . Implemented software can detect isolated areas preventing the penetration of various pesticides into areas with relatively favorable environmental conditions. That is helpful to professionals to make appropriate management decisions.

Keywords: mathematical model, analytical solution, reservoir filtration, porous media, mass transfer, integral Laplace transform.

UCH QAVATLI QATLAMDAGI OQIM FILTRATSIYASINING MATEMATIK MODELI VA UNING ANALITIK YECHIMI

Ravshanov N., Qodirov K.R., Islamov Yu.N., Kukanova M.A.

Maqolada ifloslanishning texnologik manbalaridan yer osti suvlarini himoyalash bilan aloqador ekologik masalaning dolzarbligi ko'rib chiqilgan. Mavjud quduqlar galereyasi va bir-biridan farq qiluvchi gidrogeologik xarakteristikalariga ega bir jinsli bo'lmagan g'ovak muhitlarda suyuqliklar oqimlarining o'zgaruvchan bosimsiz filtratsiyasi jarayonini

matematik modeli keltirilgan. Qo'yilgan xususiy hosilali differentsial tenglamalar tizimi ko'rinishidagi oqimlarning bosimsiz filtratsiyasi masalasi uchun t o'zgaruvchi bo'yicha Laplas integral almashtirishni qo'llash orqali analitik yechimi olingan. Yaratilgan matematik ta'minot deyarli qulay ekologik sharoitlarga ega zonalarga turli zaharli ximikatlarning kirib kelishiga to'sqinlik qiluvchi ajratilgan sohalarni aniqlashga va bu bilan soha mutaxassislariga zaruriy boshqaruv qarorlarini qabul qilishga imkon beradi.

Tayanch iboralar: matematik model, analitik yechim, qatlamli filtratsiya, g'ovak muhit, massa almashinuvi, Laplas integral almashtirishi.

1. Введение

В настоящее время общественное мнение сходится на выводе о разумной эксплуатации окружающей среды с учетом ее экологического состояния, так как необдуманное вмешательство человека может привести к необратимым последствиям. То есть возникает острая необходимость в прогнозировании непосредственных и более отдаленных результатов нашего воздействия на природу. Чтобы уменьшить загрязнение водоёмов, ставится вопрос о расширении зоны с оптимальным мелиоративным режимом, который должен сопровождаться управлением оросительной водой, а также образованием локальных изолированных областей при помощи систем вертикального дренажа, за пределы которых токсические вещества не получили бы распространение.

Известно, что вследствие интенсивного развития сельского хозяйства, промышленности, а также бурного роста городов экологическая ситуация во всем мире требует глобальной оценки в области мониторинга окружающей среды. Чтобы уменьшить распространение загрязненных подземных вод, можно образовать изолированные области, за пределами которых токсичные вещества были бы блокированы. Это возможно осуществить, например, регулированием дебитами систем вертикального дренажа или определенными понижениями на них.

Так как для Центральной Азии важное значение приобретают исследования, связанные с теорией фильтрации в связи с загрязнением подземных вод различными ядохимикатами, то для решения этого вопроса необходимо провести комплексное исследование на базе того или иного математического аппарата, адекватно описывающего данный процесс в целом.

Математическая модель, модулирующая данный процесс, обычно состоит из системы дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа и подчинена определенным краевым условиям. При моделировании указанного выше процесса необходимо учитывать часто встречающееся в Центральной Азии строение пласта, когда под малопроницаемым покровным слоем, содержащим подземные воды со свободной поверхностью, находятся напорные хорошо проницаемые слои.

Также надо отметить, что в процессе проектирования и эксплуатации гидро-мелиоративных объектов часто возникает необходимость решения задач водообмена регионального масштаба с сильным взаимодействием поверхностных и подземных вод.

В настоящее время математические модели широко используются при решении задач, описываемых уравнениями в частных производных, которые находят широкое применение в гидро- и газодинамике, теплопроводности, при распространении нейтронов, в теории упругости, при описании процессов, происходящих в электромагнитных полях, квантовой механике и ряде других явлений.

Решению указанных выше задач, разработке математических моделей и вычислительных алгоритмов посвящен ряд работ [1-19].

Математическая модель процесса фильтрации жидкости для слоистых горизонтов рассмотрена в работе М.С. Хантуша [20].

Достаточно хорошо изучены математические модели течений в открытых водотоках в случаях, когда расходы в реках (каналах, дренах) или ёмкости водоёмов велики по сравнению с фильтрационным питанием или потерями, основанные на уравнениях Сен-Венана.

Моделированию взаимосвязи поверхностных (русловые течения, водоёмы) и подземных вод в рамках гидравлического приближения посвящены работы [21-29] и др.

2. Постановка задачи

Для решения задачи и принятия управленческих решений рассмотрим процесс неустановившейся фильтрации жидкости в хорошо проницаемом водоносном горизонте, сверху и снизу перекрытом слабопроницаемыми прослойками (рис. 1).

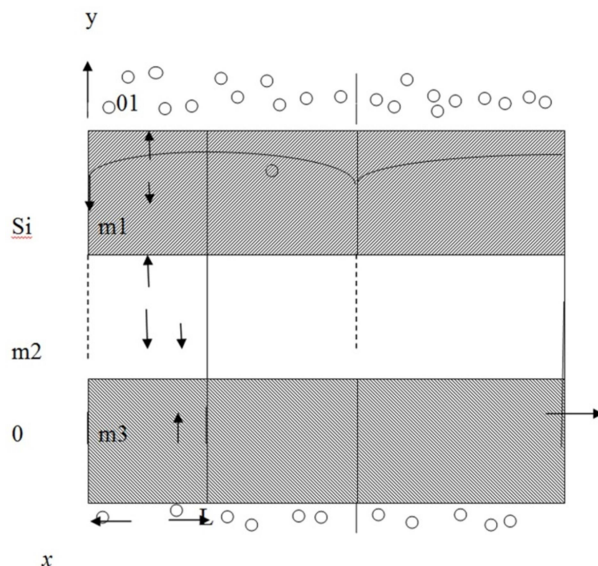


Рис. 1. Литологический разрез пласта

При неблагоприятной экологической ситуации в области $(0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m)$ для предотвращения распространения загрязнения возникает необходимость создать неподвижную изолированную поверхность на границе $x = L > l$ [30-35].

Для исследования и прогнозирования фильтрации жидкостей в многослойных пористых средах (рис. 1) на основе законов гидродинамики рассмотрим математическую модель объекта, которая описывается с помощью системы дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими внутренними и краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + \frac{k_1}{T_2} \frac{\partial S_1}{\partial y} \Big|_{y=m_2+m_3} - \frac{k_3}{T_2} \frac{\partial S_3}{\partial y} \Big|_{y=m_3}, \\ \frac{1}{a_3} \frac{\partial S_3}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_3}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

при

$$\begin{aligned} S_1(x, y, 0) &= S_2(x, 0) = S_3(x, y, 0) = 0, \\ S_1(x, m_2 + m_3, t) &= S_2(x, t), \\ S_2(x, t) &= S_3(x, m_3, t), \\ S_1(x, m, t) &= 0, \quad \frac{\partial S_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \\ S_2(0, t) &= S^* = const, \quad t > 0, \\ \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь S_1, S_2, S_3 - понижения напоров в слоях; a_1, a_2, a_3 - коэффициенты пьезопроводности; k_1, k_2, k_3 - коэффициенты фильтрации; m_1, m_2, m_3 - мощности слоев; $T_i = k_i m_i$ ($i = \overline{1, 3}$) - фильтрационные проводимости слоев.

Индексы 1, 2, 3 соответственно относятся к первому, второму и третьему слоям, y - вертикальная координата.

При этом условие (3) в данной математической модели должно обеспечиваться галереей скважин, расположенной при $x = L_1 > L$, на которой необходимо поддерживать понижение или расход воды, приходящийся на единицу ее длины в виде определенной функции времени, подлежащей определению.

3. Метод решения

Для решения поставленной задачи к системе (1) применяем интегральное преобразование Лапласа, тогда имея в виду (2), получаем [32-35]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{a_1} \bar{S}_1 &= \frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial y^2}, \\ \frac{p}{a_2} \bar{S}_2 &= \frac{\partial^2 \bar{S}_2}{\partial x^2} + \frac{K_1}{T_2} \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial y} \Big|_{y=m_2+m_3} - \frac{K_3}{T_2} \frac{\partial \bar{S}_3}{\partial y} \Big|_{y=m_3}, \\ \frac{p}{a_3} \bar{S}_3 &= \frac{\partial^2 \bar{S}_3}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} (4)$$

В этом случае система (4) подчиняется следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1(x, m_2 + m_3, p) &= \bar{S}_2(x, p), \\ \bar{S}_2(x, p) &= \bar{S}_3(x, m_3, p), \\ \bar{S}_1(x, m, p) &= 0, \\ \frac{d\bar{S}_3}{dy} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \bar{S}_2(0, p) = \frac{S^*}{p}, \\ \frac{d\bar{S}_2}{dx} \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned}$$

Поставленную задачу решаем аналогичным способом в области изображения [35]:

$$\bar{S}_1(x, y, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{sh \sqrt{\frac{p}{a_1}}(m-y)}{sh \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1}, \quad (5)$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^*}{p} \frac{ch[\omega_2(p)(L-x)]}{ch[\omega_2(p)L]}, \quad (6)$$

$$\bar{S}_3(x, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{ch \sqrt{\frac{p}{a_3}} y}{ch \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3}, \quad (7)$$

где

$$\omega_2^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k_1}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_1}} cth \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1 + \frac{k_3}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_3}} th \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3.$$

Переходя к оригиналу, вместо (5) - (7) получаем

$$\begin{aligned} S_1(x, y, t) &= S^* \frac{m-y}{m_1} \frac{ch[A_2(L-x)]}{ch[A_2L]} + \\ &+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{L-x}{L}\right]}{\Phi_2(\xi_{j,n}^{(2)})} \times \\ &\times \frac{\sin\left[\frac{\xi_{j,n}^{(2)}(m-y)}{\sqrt{a_1}}\right]}{\sin\left[\frac{\xi_{j,n}^{(2)} m_1}{\sqrt{a_1}}\right]} \exp\left[-\left(\xi_{j,n}^{(2)}\right)^2 t\right], \\ S_2(x, t) &= \frac{S^*}{ch[A_2L]} \frac{ch[A_2(L-x)]}{ch[A_2L]} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_2(\xi_{j,n}^{(2)})} \exp[-(\xi_{j,n}^{(2)})^2 t],$$

$$S_3(x, y, t) = \frac{S^* \operatorname{ch}[A_2(L-x)]}{\operatorname{ch}[A_2L]} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_2(\xi_{j,n}^{(2)})} \times \frac{\cos \left[\frac{\xi_{j,n}^{(2)} y}{\sqrt{a_3}} \right]}{\cos \left[\frac{\xi_{j,n}^{(2)} m_3}{\sqrt{a_3}} \right]} \exp[-(\xi_{j,n}^{(2)})^2 t],$$

где

$$\Phi_2(\xi) = (2n-1)^2 + \frac{4L^2 \xi^2}{\pi^2} \phi_2(\xi);$$

$$A_2^2 = \frac{k_1}{m_1 T_2};$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{T_2} \left(\frac{T_1}{a_1 \sin^2 \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}}} + \frac{T_3}{a_3 \cos^2 \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}}} \right),$$

а $\xi_{j,n}^{(2)}$ – положительные корни уравнения

$$\frac{\pi^2}{4L^2} (2n-1)^2 + \frac{k_1 \xi}{\sqrt{a_1} T_2} \operatorname{ctg} \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{\xi^2}{a_2} + \frac{k_3 \xi}{\sqrt{a_3} T_2} \operatorname{tg} \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда сверху находится водоупор, а снизу действует постоянный напор:

$$\frac{\partial S_1}{\partial y} \Big|_{y=m} = 0,$$

$$S_3 = 0.$$

В этом случае в области изображения имеем

$$\bar{S}_1(x, y, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_1}} (m-y)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1}, \quad (8)$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^* \operatorname{ch}[\omega_3(p)(L-x)]}{p \operatorname{ch}[\omega_3(p)L]}, \quad (9)$$

$$\bar{S}_3(x, y, p) = \bar{S}_2(x, p) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a_3}} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3}, \quad (10)$$

где

$$\omega_3^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k_1}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1 + \frac{k_3}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_3}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3.$$

Оригиналы (8) - (10) приведены ниже:

$$S_1(x, y, t) = S^* \frac{\operatorname{ch}[A_3(L-x)]}{\operatorname{ch}[A_3L]} +$$

$$+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \times$$

$$\times \frac{\cos \left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)} (m-y)}{\sqrt{a_1}} \right]}{\cos \left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)} m_1}{\sqrt{a_1}} \right]} \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t],$$

$$S_2(x, t) = \frac{S^* \operatorname{ch}[A_3(L-x)]}{\operatorname{ch}[A_3L]} +$$

$$+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t],$$

$$S_3(x, y, t) = S^* \frac{y}{m_3} \frac{\operatorname{ch}[A_3(L-x)]}{\operatorname{ch}[A_3L]} +$$

$$+ \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L-x}{L} \right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \times$$

$$\times \frac{\sin \left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)} y}{\sqrt{a_3}} \right]}{\sin \left[\frac{\xi_{j,n}^{(3)} m_3}{\sqrt{a_3}} \right]} \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t],$$

где

$$\Phi_3(\xi) = (2n-1)^2 + \frac{4L^2 \xi^2}{\pi^2} \phi_3(\xi);$$

$$A_3^2 = \frac{k_3}{m_3 T_2};$$

$$\phi_3(\xi) = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{T_2} \left(\frac{T_1}{a_1 \cos^2 \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}}} + \frac{T_3}{a_3 \sin^2 \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}}} \right);$$

$\xi_{j,n}^{(3)}$ – положительные корни уравнения;

$$\frac{\pi^2}{4L^2} (2n-1)^2 + \frac{k_3 \xi}{\sqrt{a_3} T_2} \operatorname{ctg} \frac{\xi m_3}{\sqrt{a_3}} =$$

$$= \frac{\xi^2}{a_2} + \frac{k_1 \xi}{\sqrt{a_1} T_2} \operatorname{tg} \frac{\xi m_1}{\sqrt{a_1}},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Для определения понижений напоров при различных граничных условиях можно использовать следующие разложения мероморфных функций в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{shaz}{shbz} = \frac{a}{b} + \frac{2\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin \frac{a\pi n}{b}}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$\frac{1}{z} \frac{shaz}{chbz} = a + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \frac{a\pi}{2b} (2n-1)}{z^2 + \frac{\pi^2}{4b^2} (2n-1)^2},$$

$$z \frac{chaz}{shbz} = \frac{1}{b} + \frac{2z^2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{a\pi n}{b}}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Теперь перейдем в область $L \leq x \leq L_1$. Для создания неподвижной изолированной поверхности функция $S_2(x, t)$ должна удовлетворять двум условиям:

$$S_2(L + o, t) = S_2(L - o, t),$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L+0} - \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L-0} = 0.$$

Используем решение уравнения переменной \bar{S}_2 в области изображения. Тогда для первого случая имеем

$$\bar{S}_2(x, p) = \tilde{c}_5(p) sh[\omega_1(p)x] + \tilde{c}_6(p) ch[\omega_1(p)x]. \quad (11)$$

Постоянные $\tilde{c}_5(p)$ и $\tilde{c}_6(p)$ определяем из следующих условий для $x \in [L, L_1]$:

$$\frac{d\bar{S}_2}{dx} \Big|_{x=L+0} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{S}_2(L_1, p) = \bar{\Gamma}_1(p), \quad (13)$$

где $\bar{\Gamma}_1(p)$ подлежит определению.

Так как литологическое строение пласта в области $L \leq x \leq L_1$ остается тем же, то $\omega_1(p)$ определяется формулой

$$\omega_1^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k_1}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m_1 + \frac{k_3}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a_3}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{a_3}} m_3.$$

Используя условия (12) и (13) из формулы (11), находим

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{\bar{\Gamma}_1(p) ch[\omega_1(p)(x-L)]}{ch[\omega_1(p)(L_1-L)]}, \quad (14)$$

и приравняв формулы

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^* ch[\omega_1(p)(L-x)]}{p ch[\omega_1(p)L]}$$

с формулой (14), получаем

$$\bar{\Gamma}_1(p) = \frac{S^* ch[\omega_1(p)(L_1-L)]}{p ch[\omega_1(p)L]}. \quad (15)$$

Здесь предполагается, что выполняется неравенство $L_1 < 2L$. В частном случае при $L_1 = 2L$ область становится симметричной относительно $x = L$, и понижение напора на управляемой галерее скважин станет равным S^* .

Переходя к оригиналу в формуле (15), найдем по какому закону необходимо поддерживать понижение

напора как функцию времени t на галерее, размещенной вдоль $x = L_1$, чтобы поверхность, проходящая через точку $x = L$, была бы изолированной и неподвижной.

Из (15) находим оригинал:

$$\Gamma_1(t) = \frac{S^* ch[A_1(L_1-L)]}{ch(A_1L)} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L_1-L}{L} \right]}{\Phi_1(\xi_{j,n}^{(1)})} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(1)})^2 t].$$

Соответственно для случаев 1 и 2 в области изображений имеем

$$\bar{\Gamma}_2(p) = \frac{S^* ch[\omega_2(p)(L_1-L)]}{p ch[\omega_2(p)L]},$$

$$\bar{\Gamma}_3(p) = \frac{S^* ch[\omega_3(p)(L_1-L)]}{p ch[\omega_2(p)L]},$$

где используются зависимости, аналогичные (11) - (14).

Переходя к оригиналам в формулах (14) и (15), получаем условия на управляемой галерее скважин для случаев 1 и 2 соответственно:

$$\Gamma_2(t) = \frac{S^* ch[A_2(L_1-L)]}{ch(A_2L)} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L_1-L}{L} \right]}{\Phi_2(\xi_{j,n}^{(2)})} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(2)})^2 t],$$

$$\Gamma_3(t) = \frac{S^* ch[A_3(L_1-L)]}{ch(A_3L)} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{L_1-L}{L} \right]}{\Phi_3(\xi_{j,n}^{(3)})} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(3)})^2 t].$$

В том случае, если в качестве управления галереей скважин при $x = L_1$ служит расход $q(t)$, приходящийся на единицу ее длины, то он будет определяться формулой

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0} - \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = -\frac{q(t)}{T_2}.$$

Если $x = L_1$ является плоскостью симметрии по отношению к $x = L$ и $x = L_2$, то будет выполняться

$$\text{соотношение } \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = 0.$$

Используя формулы (14) и (15), получаем изображения понижений напоров в основном водоносном горизонте в соответствующих областях:

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^* ch[\omega_1(p)(x-L)]}{p ch[\omega_2(p)L]} \quad (L \leq x \leq L_1),$$

$$\bar{S}_2(x, p) = \frac{S^* ch[\omega_1(p)(L_2 - x)]}{pch[\omega_2(p)L]} \quad (L_1 \leq x \leq L_2).$$

Оригиналами этих выражений служат функции

$$S_2(x, t) = \frac{S^* ch[A_1(x - L)]}{ch(A_1L)} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{x-L}{L}\right]}{\Phi_1(\xi_{j,n}^{(1)})} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(1)})^2 t], \quad L \leq x \leq L_1,$$

$$S_2(x, t) = \frac{S^* ch[A_1(L_2 - x)]}{ch(A_1L)} + \frac{8S^*}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{L_2-x}{L}\right]}{\Phi_1(\xi_{j,n}^{(1)})} \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(1)})^2 t], \quad (L_1 \leq x \leq L_2).$$

На основании двух последних формул определяется приведенный расход $q(t)$ на управляемой галерее скважин, или, объединяя все случаи, получаем

$$q_i(t) = 2S^*T_2 \times \left\{ A_i sh A_i l + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)^2}{\Phi_1(\xi_{j,n}^{(i)})} \sin\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{l}{L}\right] \times \exp[-(\xi_{j,n}^{(i)})^2 t] \right\}$$

($i = 1, 2, 3$), где $l = L_2 - l_1 = L_1 - L$.

Из этого выражения видно, что при $t \rightarrow \infty$

$$q_i = 2S^*T_2 A_i sh A_i l \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{принимают}$$

постоянные значения.

Литература

- [1] *Васильев В.А.* Взаимодействие двух водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемой прослойкой // ПМТФ. – 1967. - №2. - С. 47-52.
- [2] *Полубариново-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
- [3] *Степанюк А.А.* Улучшение мелиоративного состояния осушенных минеральных оглеенных почв Западного Полесья Украины желобоподобным рыхлителем // Вестник БрГТУ. – 2013. – № 2(80). – С. 27-30.
- [4] *Антонцев С.Н., Кашеваров А.А.* Расщепление по физическим процессам в задаче взаимосвязи поверхностных и подземных вод // Доклады АН СССР. - 1986. - Т. 288, № 2. - С. 86-90.
- [5] *Урецкий Е.А.* Исследование кинетики процессов сорбции органических загрязнений на оксигидратных коллекторах и их агрегирования в смеси краскосодержащих и гальванических стоков // Вестник БрГТУ. – 2013. – № 2(80). – С. 54–57.
- [6] *Гамзаев Х.М.* О численном моделировании движения жидкости в двухпластовой водоносной системе // Вестник Томского государственного университета. Сер. «Математика и механика». – 2015. - № 3(35). – С. 52-59.
- [7] *Конюхов В.М., Чекалин А.Н., Храменков М.Г.* Миграция разноплотностных жидкостей в водоносных пластах сложной структуры. - Казань, 2015. - 160 с.
- [8] *Куваев А.А., Поздняков С.П.* Геофильтрационные модели потоков подземных вод переменной минерализации // Вестник МГУ. Сер. 4. Геология. - М.: Изд-во МГУ, 2003. - С. 36-43.

В указанных выше формулах константы имеют следующие обозначения:

$$A_1^2 = A_2^2 + A_3^2, \quad A_2^2 = \frac{k_1}{m_1 T_2}, \quad A_3^2 = \frac{k_3}{m_3 T_2}.$$

4. Выводы

Для решения поставленной задачи к системе применено интегральное преобразование Лапласа и получено аналитическое решение в области изображения, когда на внешнем слабопроницаемом слое напор постоянен, а нижний слой подстилается водоупором.

Для решения поставленной задачи к системе применено интегральное преобразование Лапласа, также получено аналитическое решение в области изображения, когда сверху находится водоупор, а снизу действует постоянный напор.

Получено аналитическое решение для определения уровня воды при понижении напора в слабопроницаемом фильтрационном слое.

Получена обобщенная формула для управления галереями скважин на основе приведенных расходов $q_i(t)$.

Для определения понижений напоров при различных граничных условиях получена формула в виде суммы простейших дробей как разложение мероморфных функций.

Получено условие для создания неподвижной изолированной поверхности для функции $S_2(x, t)$.

Для предотвращения распространения токсических веществ и принятия управленческих решений по данной проблеме можно использовать разработанный математический инструмент для их реализации с выделением изолированных областей, препятствующих проникновению различных ядохимикатов в зоны с относительно благоприятными экологическими условиями.

- [9] Zhou Q., Bear J., Bensabat J. Saltwater upconing and decay beneath a well pumping above an interface zone // *Transport in Porous Media*. 2015. - Vol. 16. № 3. - Pp. 337-363.
- [10] Zinin A.I., Zinina G.A., Kurochkin V.M., Rybalchenko A.I., Zubkov A.A., Pozdniakov S.P. Simulation of coupled thermal and solute concentration effects on dense radioactive waste migration in deep aquifers. – Oslo, 2013. - Pp. 648-656.
- [11] Кашеваров А.А. Моделирование водного стока и процессов солепереноса на заболоченных территориях // *Прикладная механика и техническая физика*. - 2005. - Т. 46, № 1. - С. 96-105.
- [12] Эмих В.Н. Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием // *ПММ*. - 1982. - Т.46, вып.5. - С. 857-868.
- [13] Bennett G.D., Konti A.L., Larson S.P. Representation of mul tiaquifer well effecta in three-dimensional ground-waterflow simulation//*Ground Water*. - 1982. - Vol.20. - № 3.1. - Pp. 334-341.
- [14] Buikis A. Mathematische Modellierung des Wärmetrans - portes in poröses Medien//*Referate.H.A.-Rethe 1. - Bergakademie Freiberg*, 1979. - Pp. 74-75.
- [15] Wikramaratna R.S. An analytical solution for the effects of abstraction from multiple-layered confined aquifer withno cross flow // *Water Resources Research*. - 1984. - V. 20. - № 8. - Pp. 1067-1074.
- [16] Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. - М.: Мир, 1971. - 432 с.
- [17] Васильев В.Ф., Фадеева М.В. Оценка питания грунтовых вод в условиях взаимосвязи водоносных горизонтов по данным режимных наблюдений // В кн.: *Комплексное использование и охрана подземных вод БССР*. - Минск, 1976. - С. 65-74.
- [18] Васильев О.Ф. Системное моделирование взаимосвязанных фильтрационных и гидравлических процессов в задачах гидрологии, гидрогеологии и мелиорации // *Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи*. - М.: Наука, 1987. - С. 46-57.
- [19] Веригин Н.Н., Шержуков В.С. Фильтрация из водохранилищ и накопителей проистоков с изменяющимся во времени уровнем. Динамика сплошной среды // *Сб.науч.трудов Института гидродинамики СО АН СССР*. - Новосибирск, 1969. - Вып.2. - С. 83-90.
- [20] Хантуш М.С. Новое в теории перетекания // *Вопросы гидрогеологических расчетов*. – М.: Мир, 1964. – С. 43-60.
- [21] Злотник В.А., Усенко В.С. Математические модели и численные методы в задачах взаимосвязи безнапорных подземных и поверхностных вод // *Фильтрация воды в пористых средах: Сб. докл. III Междунар. симп. Ч.4*. - Киев: Наукова думка, 1978. - С. 108-117.
- [22] Злотник В.А., Калинин М.Ю., Усенко В.С., Черепанский М.М. Прогнозирование влияния эксплуатации подземных вод на гидрогеологические условия. - Минск: Наука и техника, 1985. – 296 с.
- [23] Абуталиев Ф.Б. Решение задач неустановившейся фильтрации. – Ташкент: Фан, 1972. – 208 с.
- [24] Васильев В.А. Взаимодействие двух водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемой прослойкой // *ПМТФ*. – 1967. - № 2. - С. 47-52.
- [25] Лебедев А.В. Методы изучения баланса грунтовых вод. – М.: Недра, 1976. – 407 с.
- [26] Лойцянский Л.Г. Механика жидкостей и газов. – М.: Наука, 1986. – 786 с.
- [27] Матвеевко Т.И. Некоторые задачи в неустановившемся притоке жидкости к скважине в круговой области с учетом слабой проницаемости водоупора // *Вычисл. и прикл. мат.* - Киев, 1974. - № 24. – С. 27-32.
- [28] Николаевский В.Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа // *Прикл. механика и техн. физика*. – 1961. - № 4.
- [29] Олейник А.Я. Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. – Киев: Наукова думка, 1978. – 202 с.
- [30] Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Мирзаев А.Н. Нестационарные линейные и нелинейные задачи теории фильтрации и методы их решения. Деп. ВИНТИ 11.06.87, № 4276-B87. - 110 с.
- [31] Абуталиев Ф.Б., Машарипов Р., Шульгин Д.Ф. Приближенное решение на ЭВМ одномерной и двумерной задач фильтрации в двухслойной среде // *Труды координационных совещаний по гидротехнике*. – М.: Энергия, 1987. – Вып. 35. – С. 219-232.
- [32] Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Кодиров К.Р. Математические модели нестационарных процессов массопереноса в многослойных средах и их управление // *Актуальные проблемы математики и ее приложения: Материалы международной конференции. 29-31 мая 2003*. - Худжанд, 2003. - С.17-18.
- [33] Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Кодиров К.Р. О моделировании принятия решения в задачах анализа и управления экологическим процессом в многопластовых системах // *Узб. журнал «Проблемы информатики и энергетики»*. - Ташкент, 2013. - № 1. - С. 19-23.
- [34] Кодиров К.Р. К вопросу моделирования экологических процессов в многослойных пористых средах // *Известия вузов. Сер. «Физико-математические науки»*. - Ташкент, 2012. - № 1-2. - С. 89-93.
- [35] Баклушин М.Б., Кодиров К.Р. Способ управления напором галерей скважин при нахождении уровня подземных вод со свободной поверхностью // *Узб. журнал «Проблемы информатики и энергетики»*. - Ташкент, 2013. - № . - С. 46-53.