УДК 517.516.87

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ФУРЬЕ В НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ХЕРМАНДЕРА

Шадиметов Х.М.
д.ф-м.н., заведующий кафедрой,
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта,
тел.: +(99890) 620-20-84, e-mail: shadimetov@mail.ru

Шадманов И.У.
преподаватель,
Бухарский государственный университет,
тел.: + (99891) 648-35-29, e-mail: istam.shadmanov89@gmail.com

В данной работе рассматривается вопрос о вычислении интегралов типа Фурье, где подынтегральная функция имеет с ограниченным числом экстремальных точек в интервале интегрирования и в качестве весовой функции берем быстро колеблющаяся функция. При небольших значениях параметра быстро колеблющаяся функции интеграл можно вычислить по обычным формулам механических квадратур, но если значение параметра велико, это становится затруднительным из-за частого колебания множителя. Поэтому для применения обычных формул механических квадратур промежуток интегрирования придется делить предварительно на большое число частей, из-за чего вычисление становится почти невозможным. Здесь предполагается метод вычисления таких интегралов для конкретных быстро колеблющаяся функций, т.е. для интегралов типа Фурье в пространстве Хермандера.

Ключевые слова: функция, пространство, норма, функционал погрешности, оптимальная квадратурная формула типа Фурье, экстремальная функция.

ALGORITHM OF FINDING THE EXTREMAL FUNCTION AND THE INACCURACY FUNCTIONAL NORM OF THE FOURIER TYPE SQUARE FORMULA IN THE NONPERIODIC HERMANDER SPACE

Shadimetov Kh.M., Shadmanov I.U.

In this paper we consider the problem of calculating integrals of Fourier type, where the integrand has a limited number of extremal points in the integration interval and take a rapidly oscillating function as a weight function. For small values of the parameter, the rapidly oscillating function can be calculated by the usual formulas of mechanical quadratures, but if the value of the parameter is large, this becomes difficult because of the frequent oscillation of the factor. Therefore, in order to apply the usual formulas of mechanical quadratures, the integration interval must first be divided into a large number of parts, which makes the calculation almost impossible. Here we propose a method of calculating such integrals for specific rapidly oscillating functions, i.e. For Fourier integrals in the Hörmander space.

Keywords: function, space, norm, error functional, optimal quadrature formula of Fourier type, extremal function.

HERMANDERNING DAVRIY BO’LMAGAN FUNKSIYALAR FAZOSIDA FURE TIPIDAGI KVADRATUR FORMULALARNING EXTREMAL FUNKSIYASI VA XATOLIK FUNKSIONALI NORMASI

Shadimetov H.M., Shadmanov I.U.

Mazkur ishda Фурье tipidagi integrallarni hisoblash masalasi qaraladi bu yerda integral ostidagi funksiya integrallash intervalida chekli sondagi extremal nuqtalarda berilgan va tez tebranuvchi funksiya. Parametrning katta bo’lmagan qiymatlarida odatdagi mexanik kvadratur formulalar bilan hisoblash mumkin, lekin parametrning qiymati katta bo’lsa ko’paytuvchining tez-tez tebranishidan ish ancha qiyinlashadi. Hisoblash qiyinligidan odatdagi mexanik kvadratur formulalar bilan hisoblash uchun integrallash oraligi oldindan katta sondagi bo’laklarga bo’lishga to’g’ri keladi. Bu yerda bunday integrallarni hisoblash uchun konkret tez tebranuvchi funksiya olinadi, yani. Fure tipidagi integrallar qaraladi.

Kalit so'zlar: funksiya, fazo, norma, funksional xatolik, Fure tipidagi optimal kvadratur formula, extremal funksiya.

1. Введение

Вычисление определенных интегралов с возможно большой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики и численного анализа.

С.Л.Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа (см[1]).

В одномерном случае, т.е. в пространстве $L_2^{(m)}\left(R\right)$, непрерывная задача Винера – Хопфа решена З.Ж.Жамоловым (см [2]).

Работы многих авторов посвящена построением оптимальных квадратурных и кубатурных формул методом предложенных С.Л.Соболевым (см [2],[3],[4],[5]).

В приложениях часто встречаются так называемый интегралы типа Фурье вида

$$\left.\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \int_a^b f(x)\cos\sigma x dx, \\ I_2(\sigma) &= \int_a^b f(x)\sin\sigma x dx, \\ I_3(\sigma) &= \int_a^b f(x)\ell^{i\sigma x} dx. \end{aligned}\right\}$$

При небольших значениях параметра σ эти интегралы можно вычислить по классическим квадратурным формулам трапеция, Симпсона, Гаусса и т.д. Но, если значение σ велико, то вычисления становятся затруднительными из-за сильной осцилляции множителей $\cos\sigma x$ и $\sin\sigma x$.

В этом случае для вычисления интегралов с необходимой точностью промежуток интегрирования приходится делить на большее число частей. Поэтому для вычисления таких интегралов разработаны квадратурные формулы, которые заранее учитывают наличие указанных осциллирующих множителей. Впервые метод построения таких формул был предложен Файлоном [6]. Он заключался в замене квадратичным трехчленом на всей подынтегральной функции, а только $f(x)$ предположении, что она на отрезке интегрирования имеет ограниченное число экстремальных точек. Формула Файлона является аналогом формулы Симпсона и переходит в нее при $\sigma \to 0$.

В настоящее время для вычисления интегралов (1)-(2) проведено много исследований, в частности получены аналоги формул прямоугольников [7], трапеций [8], Ньюнона-Котеса [9], Гаусса [10].Также построены оптимальные квадратурные формулы для некоторых классов функций [11-12].

Эйнарсон [13] для вычисления интегралов (1)-(2) применил интерполяционный кубический сплайн типа 1 [14-16]. Как отмечает автор, во многих случаях его формула дает лучшей результат, чем формула Файлона, в формуле Эйнарсона присутствуют сплайновые моменты M_0 и M_N, которые надо заменить через вторые производные $f''(a)$ и $f''(b)$ (с некоторой точностью) или же найти из системы уравнений, определяющей параметры кубического сплайна. Если считать $M_0 = M_N = 0$, то погрешность формулы Эйнарсона будет иметь порядок h^3 и в этом случае формула Файлона является более точной, нежели формула Эйнарсона. В некоторых задачах в узлах x_k могут быть известны не только значения функции, но и значения ее производных. Эта дополнительная информация дает возможность построит квадратурные формулы более высокой степени точности. В работе [17] приведены такие квадратурные формулы, основанные на интерполяционной формуле Эрмита.

Известно, что из формул Файлона и Эйнарсона при $\sigma = 0$ получается формула Симпсона. А из формулы (4) при $\sigma = 0$ получаем совершенно другую формулу, а именно формулу трапеций с концевой поправкой, исследованную К.Ланцошем [18, п 6, 7].

В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x} f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \qquad (1)$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хермандера $H_2^\mu(R)$ [19] и назовем ее квадратурную формулу типа Фурье.

Определения 1. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкания пространства бесконечно дифференцируемых функций, убивающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом:

$$\left\| f \,\middle|\, H_2^\mu(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[\mu(\xi)\cdot F[f^c(x)](\xi)](x) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $f^c(x)$ класс функций, следы которых в области R совпадают, F -преобразование Фурье, $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемая, $\mu > 0$, R и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}dx,$$

$$F^{-1}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx,$$

Отметим, что условие

$$\nu_m(x) = \left(F^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\xi)} \right) \right)(x) \in L_2(R)$$

обеспечивает вложение пространстве $H_2^{\mu}(R)$ в $C(R)$ - непрерывные функции.

Условие вложения пространства $H_2^{\mu}(R)$ в пространство непрерывных функций $C(R)$ является необходимом условием функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

2. Постановка задачи

Рассмотрим квадратурную формулу типа Фурье вида (1). Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$\ell(f) = <\ell_N, f(x)> = \int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x} f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \quad (2)$$

и этой разности (2) соответствует функционал погрешности $\ell_N(x)$, который имеет вид

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\ell^{2\pi i\sigma x} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta). \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор отрезка [0,1], $\delta(x)$ – дельта – функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы (1) будет линейным и непрерывным функционалом из пространства $H_2^{\mu^*}(R)$, сопряженного пространство $H_2^{\mu}(R)$, т.е. $\ell_N(x) \in H_2^{\mu^*}(R)$.

Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство Хермандера $H_2^{\mu}(R)$.

Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности :

$$\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \sup_{f(x)\neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\left\|f \mid H_2^{\mu}(R)\right\|}. \quad (4)$$

Норма функционала погрешности $\ell_N(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β.

По этому для вычислительной практики полезно уметь вычислить нормы функционала погрешности оценить ее. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по C_β и x_β есть задача на исследование функции одной переменной на экстремум.

Если

$$\left\|\overset{0}{\ell}_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|<\ell_N(x), f(x)>|}{\left\|f \mid H_2^{\mu}(R)\right\|},$$

то говорят, что функционала $\overset{0}{\ell}_N(x)$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $H_2^{\mu}(R)$.

Основная цель настоящей работы является нахождении экстремальной функции и нормы функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье вида(1) в пространстве Хермандера $H_2^{\mu^*}(R)$.

3. Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье и его норма

Для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве $H_2^{\mu^*}(R)$ используется его экстремальная функция .

Определение 2. Функция $\psi_e(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell_N(x)$, если

$$<\ell_N, \psi_e> = \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| \cdot \left\|\psi_e \mid H_2^{\mu}(R)\right\|. \quad (5)$$

Так как пространство $H_2^{\mu}(R)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см [13]) существует единственная функция $\psi_\ell(x) \in H_2^{\mu}(R)$ для которой

$$<\ell_N, f)> = <\psi_\ell, f> \quad (6)$$

и

$\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu*}(R)\right\| = \left\|\psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R)\right\|$, где $<\psi_\ell(x), f(x)>$ - скалярное произведение двух функций $\psi_\ell(x)$ и $f(x)$ из пространства $H_2^{\mu}(R)$. Напомним, что скалярное произведение $<\psi_\ell, f>$ определяется следующим образом:

$$<\psi_\ell, f> = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[\psi_\ell(x)](\xi)\right] \times$$
$$\times F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[f(x)](\xi)\right]dx.$$

В частности, из (6) при $f(x) = \psi_\ell(x)$ имеем

$$<\ell_N, f> = <\psi_\ell, f> = \left\|\psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R)\right\|^2 =$$
$$= \left\|\psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R)\right\| \cdot \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu*}(R)\right\| = \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu*}(R)\right\|^2.$$

Отсюда видно, что решения $\psi_\ell(x)$ уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией.

Таким образом, для того чтобы вычислить норму функционала погрешности $\ell_N(x)$, сперва надо решить уравнение (6) т.е. найти экстремальную функцию $\psi_\ell(x)$ а потом вычислить скалярные произведение $<\ell_N, f> = \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu*}(R)\right\|^2$.

Ниже мы будем находит экстремальную функцию другим путём.

Из теории преобразования Фурье обобщенных функций имеем

$$<\ell_N, f> = \left(F[\ell_N](\xi), F[f)](\xi)\right) =$$
$$= \left(\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi), \mu(\xi)F[f)](\xi)\right) =$$

$$=\left(F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\right\},F^{-1}\left\{\mu(\xi)F[f](\xi)\right\}\right). \quad (7)$$

Если в этом равенстве (7) полагать

$$F^{-1}\left\{\mu\ (\xi)F[\psi_\ell](\xi)\right\}=F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\right\},$$

т.е. если полагать

$$f=\psi_\ell=F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x),$$

то будем иметь:

$$<\ell_N,\psi_\ell>=<\psi_\ell,\psi_\ell>=\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu*}(R)\right\|^2.$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\psi_\ell(x)=F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x)=$$
$$=\left[\ell^{2\pi i\sigma x}\cdot\varepsilon_{[0,1]}(x)\right]*\nu_m(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\nu_m(x-h\beta), \quad (8)$$

где $\nu_m(x)=F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x)$, так как $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией функционала погрешности (3); во-вторых,

$$\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu*}(R)\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_\ell\right|^2 dx. \quad (9)$$

Этим доказана следующая

Теорема. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\psi_e(x)=[\ell^{2\pi i\sigma x}\cdot\varepsilon_{[0],1}(x)]\times$$
$$\times\nu_m(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\nu_m(x-h\beta), \quad (10)$$

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве Хермандера $H_2^{\mu}(R)$ имеет следующий вид

$$\left\|\ell_N\left|H_2^{\mu*}(R)\right.\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|[\ell^{2\pi i\sigma x}\cdot\varepsilon_{[0],1}(x)]\times\right.$$
$$\left.\times\nu_m(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\nu_m(x-h\beta)\right|^2 dx. \quad (11)$$

Литература

[1] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. – М., 1974.

[2] *Жамолов З.Ж.*, *Салихов Г.Н.*, *Шарипов Т.Х.* Приближенное интегрирование гладких функций // Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск, 1978.

[3] *Рамазанов М.Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем / ИМВЦ УНЦ РАН. – Уфа: Дизайн Полиграф Сервис, 2009. – 178 с.

[4] *Шадиметов Х.М.* О вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул // ДАН СССР. – 1980. – № 4.

[5] *Шарипов Т.Х.*, *Хаётов А.Р.*, Универсально-оптимальные кубатурные формулы и их связь с другими задачами вычислительной математики // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. – Уфа, 1996.

[6] *Filon N.G.* On a quadrature for trigonometric integrals // Pros. ROY. Soc. – Edinburgh, 1928. – № 49. – Pp. 38-47.

[7] *Исраилов М.И.*, *Нуриддинов М.* Приближенное вычисление интегралов с быстроколеблющимся подынтегральным выражением // Вопросы вычислительной и прикладной математики / ИК с ВЦ АН УзССР. – Ташкент, 1972. – Вып. 14. – С. 103-116.

[8] *Tuck. E.O.* A simple Filon-trapezoidaol rule // Matematics of compution. – 1967. – № 21. – Pp. 239-241.

[9] *Luke Y.L.* On the computation of oscillatory integrals // Proc. Cambridge Pilos. Soc. Part 2. – 1954. – № 50. – Pp. 267-277.

[10] *Бахвалов Н.С.*, *Васильева Л.Г.* Вычисление интегралов от осциллирующих функций при помощи интерполяции по узлам квадратур Гаусса // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1968. – Т. 8. – С. 175-181.

[11] *Жилейкин Я.М.*, *Кукаркин А.Б.* Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1978. – Т. 18. – №2. – С. 294-301.

[12] *Задирака В.К.* Теория вычисления преобразования Фурье. – Киев: Наукова думка, 1983. – 213 с.

[13] *Einarsson B.* Numerical calculation of Fourier integrals with cubic splines // BIT. – 1968. – № 8. – Pp. 279-286.

[14] *Алберг Дж.*, *Нильсон Э.*, *Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.

[15] *Стечкин С.Б.*, *Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

[16] *Завьялов Ю.С.*, *Квасов Б.И.*, *Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функции. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

[17] *Крылов В.И.*, *Кругликова Л.Г.* Справочная книга по численному гармоническому анализу. – Минск: Наука и техника, 1968. – 165 с.

[18] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

[19] *Валевич Л.Р.*, *Панеяк Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // УМН. – 1965. – Т. 20. – № 1(121). – С. 3-74.