

УДК 519.711.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОДНОФАЗНЫХ ПОТОКОВ

Нармурадов Ч.Б.

д.ф.-м.н., заведующий кафедрой Термезского государственного университета,
тел.: + (99891) 577-93-16, e-mail: normchnor2016@umail.uz

Менглиев Ш.А.

старший научный сотрудник-исследователь Термезского государственного университета,
тел.: + (99891) 587-86-81, e-mail: shoydullo@mail.ru

Гуломқодиров К.А.

старший преподаватель Термезского государственного университета,
тел.: + (99891) 900-18-25, e-mail: kommiljon@mail.ru

С использованием метода малых возмущений получены математические модели гидродинамической устойчивости для однофазных потоков. Для аппроксимаций уравнений устойчивости применяется спектрально-сеточный метод. Он объединяет в себе высокую точность спектрального метода неравномерных сеток и позволяет определить сразу все собственные значения рассматриваемой проблемы. При применении спектрально-сеточного метода исходный интервал интегрирования разбивается на сетку, в которой приближенное решение ищется в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода. Во внутренних узлах сетки требуется непрерывность решения уравнений устойчивости и их производных до $(m-1)$ -го порядка, где m - порядок старшей производной. На границе интервала интегрирования требуется удовлетворение соответствующих краевых условий для математических моделей проблемы устойчивости. Приближенное решение проблемы во всей сеточной области определяется путем решения обобщенной проблемы на собственные значения со специальными блочно-диагональными матрицами.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, число Рейнольдса, волновое число, собственные значения, возмущения, плотность, однофазное, основное и ламинарное течения.

THE MATHEMATICAL MODEL OF PROBLEMS OF THE ONE-PHASE FLOWS HYDRODYNAMIC STABILITY

Normurodov Ch.B., Mengliyev Sh.A., Gulomqodirov K.A.

In the article using the method of small perturbations derived mathematical models of hydrodynamic stability problems for the single-phase flow. To approximate the stability of equations used spectral-grid method. It combines the high accuracy of the spectral method of irregular grid and to determine once all the eigenvalues of the problem. When using the spectral-grid method source integration interval is divided into a grid, each with an approximate solution is sought in the form of a series of Chebyshev polynomials of the first kind. The internal nodes of the network is required continuity of the solution of equations and stability of their derivatives of order up to $(m-1)$ where is the m -order of the highest derivative. At the boundary of the interval of integration is required to meet the relevant boundary conditions for the mathematical models of sustainability issues. An approximate solution of the problem in the whole region of the grid is determined by solving the generalized eigenvalue problem with the special block-diagonal matrix.

Keywords: hydrodynamic stability, Reynolds number, wave number, eigenvalues, disturbance, one-phase, basic flow, laminar flow.

BIR FAZALI OQIMLAR GIDRODINAMIK TURG'UNLIK MUAMMOSINING MATEMATIK MODELI

Normurodov Ch.B., Mengliyev Sh.A., G'ulomqodirov K.A.

Maqolada kichik qo'zg'alishlar metodi bilan bir fazali oqimlar gidrodinamik turg'unlik muammolarining matematik model olingan. Turg'unlik tenglamalarini approksimatsiyalash uchun spektral-to'r metodi qo'llaniladi. Bu metod o'zida spektral metodlarning yuqori aniqlash va tengmas oraliqli to'rlar metodining samaradorligini mujassamlashtirgan holda qaralayotgan muammoning barcha xos qiymatlarini topishga imkon beradi Spektral-to'r metodi qo'llanilganda dastlabki integrallash intervalida to'r kiritiladi, to'ring har bir elementida taqribiy echimbirinch to'rdagi Chebishev ko'phadlari

qatori ko'rinishida ifodalanadi. To'ring ichki tugunlarida turg'unlik tenglamalari echimi va uning $(m-1)$ tartibigacha bo'lgan hosilalarining uzluksizligi talab qilinadi, bunda m -yuqori tartibli hosila tartibini bildiradi. Interval chegarasida gidrodinamik turg'unlik matematik modellarining mos chegaraviy shartlari qo'yiladi. Butun to'r sohasi bo'yicha muammoning taqribiy echimi maxsus blokli-diagonalli ko'rinishga ega bo'lgan umumlashgan xos qiymat muammosini echim orqali topiladi.

Tayanch iboralar: gidrodinamik turg'unlik, Reynolds soni, to'lqin soni, xos qiymatlar, qo'zg'alish, zichlik, bir fazali, asosiy oqim, laminar oqim.

1. Введение

Впервые систематические исследования обоих, столь различных форм течения - ламинарной и турбулентной - были выполнены О. Рейнольдсом [1]. Им же был осуществлен упомянутый выше и названный его именем опыт с окрашенной струйкой. В результате своих исследований О. Рейнольдс открыл закон подобия, также названный, впоследствии, его именем. Согласно закону подобия Рейнольдса, переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит всегда при приблизительно одинаковом числе Рейнольдса

$Re = \rho UL / \mu$, ρ - плотность жидкости или газа, μ - вязкость, U - характерная скорость основного потока, L - характерная длина. Число Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное, называется критическим числом Рейнольдса $Re_{кр}$. Следовательно, те течения, для которых $Re < Re_{кр}$ - ламинарны, а те же течения, для которых $Re > Re_{кр}$, - турбулентны [1-12].

2. Постановка задачи

Математические модели, характеризующие движение вязкого движения вязкой несжимаемой жидкости, описываются уравнением Навье-Стокса [6-23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где u, g - продольная и поперечная компоненты скорости, p - давление, $Re = \rho UL / \mu$ - числа Рейнольдса, ρ - плотность, μ - вязкость жидкости, U и L - характерные масштабы скорости и длины соответственно.

Для исследования устойчивости решения системы (1) представим, как обычно, в виде суперпозиции основное ламинарное течение $U(y)$ и малое возмущение:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ g(x, y, t) &= \tilde{g}(x, y, t), \end{aligned} \tag{2}$$

$$p(x, y, t) = P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t).$$

Систему (1) записываем с учетом (2) и, оставляя в полученных уравнениях только члены первого порядка малости по возмущениям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{g} \frac{dU}{dy} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta \tilde{u} \right), \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \Delta \tilde{g}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Если учитывать, что основное течение само по себе удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

то система (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{g} \frac{dU}{dy} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u}, \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{g}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

Вводим функцию тока для возмущающего движения в виде

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \tag{6}$$

где $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$ - комплексная амплитуда возмущений, k - вещественная величина, связанная с длиной ℓ - волны возмущения соотношением $\ell = 2\pi / k$.

Величина $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где ω_r - круговая частота отдельного колебания, а ω_i - коэффициент нарастания, т.е. величина, позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. Если $\omega_i < 0$, то колебание затухает и ламинарное течение устойчиво, если же $\omega_i > 0$, то имеет место неустойчивость. Кроме величин k и ω , целесообразно ввести также их отношение $\lambda = \omega / k = \lambda_r + i\lambda_i$. Величина λ_r представляет собой скорость распространения волн в направлении x (фазовая скорость), а λ_i опять является величиной, позволяющей судить о затухании или возрастании колебания.

Амплитуда $\psi(y)$ возмущающего движения принята зависящей только от переменной y потому,

что основное течение также зависит только от y .

Для функции тока (6) имеем

$$\tilde{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(kx-\omega t)},$$

$$\tilde{g} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y)e^{i(kx-\omega t)},$$

тем самым интегрируется уравнение неразрывности (5), а из системы (4) получаем проблему на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда [24-27]:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left((U(\eta) - \lambda)D + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad (7)$$

$$\eta_0 < \eta < \eta_1,$$

$$\psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) = 0, \psi(\eta_1) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_1) = 0 \quad (8)$$

с однородными краевыми условиями, которые означают требования непроницаемости и прилипания. Здесь $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ -

дифференциальный оператор, $U(\eta)$ - профиль скорости основного течения, η - координата, направленная поперек основного течения, k - волновое число, Re - число Рейнольдса, $\psi(\eta)$ - амплитуды функции тока для возмущений, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - собственные значения задачи, где λ_r - фазовая скорость волнового возмущения, λ_i - коэффициент нарастания. Если $\lambda_i > 0$, то течение неустойчиво, если $\lambda_i < 0$, то оно устойчиво. Если же $\lambda_i = 0$, то колебания нейтрально устойчивы.

3. Метод решения

Спектрально-сеточный метод (ССМ) - новый эффективный математический аппарат для численного моделирования проблемы гидродинамической устойчивости. Он объединяет в себе высокую точность спектральных методов с экономичностью метода неравномерных сеток и позволяет определить сразу все собственные значения задачи.

ССМ используется для моделирования уравнения устойчивости однофазных гидродинамических систем, описываемых проблемой на собственные значения (7), (8).

Интервал интегрирования $[\eta_0, \eta_1]$ разобьем на сетку и получим N различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N].$$

Дифференциальное уравнение (7) на каждом из этих элементов принимает вид

$$D^2 \psi_j - ik Re \left[(U_j(\eta) - \lambda)D - U_j''(\eta) \right] \psi_j = 0, \quad (9)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Краевые условия (8) записываются в точках η_0 и η_N :

$$\psi_1(\eta_0) = \frac{d\psi_1}{d\eta}(\eta_0) = 0, \psi_N(\eta_N) = \frac{d\psi_N}{d\eta}(\eta_N) = 0. \quad (10)$$

Во внутренних узлах сетки потребуем непрерывность решения уравнения (9) и его производных до 3-го порядка:

$$\psi_j^{(t)}(\eta_j) = \psi_{j+1}^{(t)}(\eta_j),$$

$$t = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (11)$$

где t указывает порядок производной.

Для представления решения уравнений (9) - (11) в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода каждый элемент $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ отображаем на интервале $[-1, 1]$. После этого преобразования уравнения (9) принимают вид

$$L_j \psi_j =$$

$$= \left\{ D_j^2 - ik_j Re_j [(U_j(y) - \lambda)D_j - U_j''(y)] \right\} \psi_j = 0, \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$D_j = \frac{d^2}{dy_j^2} - k_j^2, \quad k_j = \frac{l_j}{2}k, \quad Re_j = \frac{l_j}{2}Re.$$

Из условий (10), (11) имеем

$$\psi_1(-1) = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dy}(-1) = 0,$$

$$L_j^{-t} \psi_j^{(t)}(+1) = L_{j+1}^{-t} \psi_{j+1}^{(t)}(-1), \quad t = 0, 1, 2, 3;$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\psi_N(+1) = 0, \quad \frac{d\psi_N}{dy}(+1) = 0, \quad (13)$$

через $l_j = \eta_j - \eta_{j-1}$ обозначена длина j -го элемента сетки.

Приближенное решение задачи (12) - (13) на каждом из элементов сетки ищем в виде

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y),$$

$$U_j(y_e^j) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_e^j), \quad (14)$$

$$y_e^j = \cos(\pi \cdot l / p_j), \quad l = 0, 1, 2, \dots, p_j; j = 1, 2, \dots, N,$$

где $T_n(y)$ - полиномы Чебышева первого рода, y_e^j - их узлы, а p_j - количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на j -м элементе.

Подставляя ряды (14) в уравнение (12), потребуем, чтобы левая часть (12) на каждом из элементов сетки была ортогональной к первым $p_j - 4$ -м полиномам Чебышева:

$$(L_j \psi_j, T_n) = 0, n = 0, 1, \dots, p_j - 4, j = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-1/2} dx$ - скалярное произведение на отрезке $[-1, 1]$.

Кроме того, еще потребуем, чтобы ряд по полиномам Чебышева (14) точно удовлетворял краевым условиям и условиям непрерывности (13). С

учетом следующих свойств полиномов Чебышева $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ и $T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2} n^2$ эти условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^n a_n^{(1)} &= 0, \quad \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(1)} = 0, \\ \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} &= \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n a_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 a_n^{(j)} &= \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) &= \frac{1}{l_{j+1}^2} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), \\ \frac{1}{l_j^3} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n'''(+1) &= \frac{1}{l_{j+1}^3} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n'''(-1), \\ j &= 1, 2, 3, \dots, N-1 \\ \sum_{n=0}^{p_N} a_n^{(N)} &= 0, \quad \sum_{n=0}^{p_N} n^2 a_n^{(N)} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для определения $\bar{m} = N(p_j + 1)$ неизвестных

$$a_n^{(j)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, p_j; \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

имеем $\bar{m} = N(p_j + 1)$ уравнений. Этими уравнениями служат $N(p_j - 3)$ уравнений ортогональности (15), $4(N - 1)$ условий непрерывности и четыре граничных условия из (16). Полученную систему удобно записать в матричном виде:

$$(A - \lambda B)X = 0, \quad (17)$$

где комплексные матрицы A и B имеют блочно-диагональную структуру специального вида, а вектор x содержит коэффициенты $a_n^{(j)}$ в разложении (14), т.е.

$$\begin{aligned} x^T &= (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, \\ &\dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)}). \end{aligned}$$

Характерная особенность системы (17) в том, что матрица B вырождена (поскольку условия (16) не зависят от λ) и содержит $4N$ нулевых строк, где N - число элементов сетки.

4. Обсуждение результатов

Система (17) с помощью невырожденного линейного преобразования Q сводится к виду

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0.$$

После применения преобразования Q число строк и столбцов комплексных матриц A и B уменьшится на $4N$, где N - число элементов. Отношение общего числа уравнений \bar{m} к числу оставшихся $\bar{m} = 4N$ уравнений составляет

$$q = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 4N}.$$

Таким образом, в результате разбиения интервала интегрирования на элементы размерность каждой комплексных матриц (вещественная и мнимая часть) A и B в исходной алгебраической системе уменьшается в q^2 раз. Снижение размерности особенно заметно при небольшом числе полиномов на каждом из элементов. Действительно, количество полиномов на j -м элементе равно $p_j + 1$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Тогда общее количество полиномов и соответственно алгебраических уравнений равно $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$. Заметим, что p_j не должно быть меньше, чем порядок старшей производной дифференциального уравнения, т.е. $p_j \geq 4$. При $p_j = 4$, например, для всех $j, \bar{m} = 5N, q = 5$. Это означает, что число уравнений в системе уменьшается в пять раз, а размерности каждой комплексных матриц A и B - в 25 раз.

Из оставшихся уравнений получается алгебраическая система существенно меньшей размерности:

$$(T - \lambda W)Y = 0, \quad (18)$$

$Y = Q^{-1}\bar{x}, \bar{x} = (a_4^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}, a_4^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_4^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)})$, где W - в общем случае невырожденная квадратная матрица.

Умножая (18) слева на матрицу W^{-1} , получаем

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}. \quad (19)$$

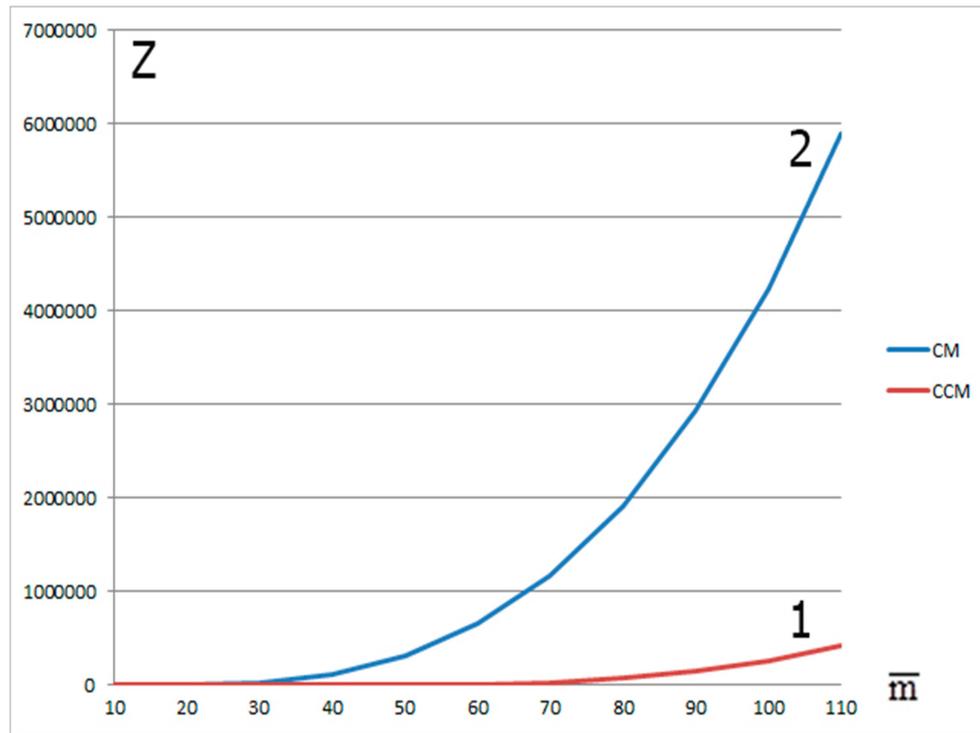
Собственные значения системы (19) могут быть найдены стандартными методами. В данной работе они определяются с помощью QR -алгоритма.

Для решения системы вида (19) один шаг QR -алгоритма требует $Z = (\frac{20}{3})\bar{n}^3$ арифметических операций. В таблице сравнены спектральный метод (СМ) [25] и ССМ по числу арифметических операций Z .

\bar{m}	СМ	ССМ	
	Z	N	Z
5	6	1	6
10	1440	2	53
20	27306	4	426
30	117173	6	1440
40	311040	8	3414
50	648906	10	6666
60	1170773	12	27306
70	1916640	14	70986
80	2926507	16	146346
90	4240373	18	262026
100	5898240	20	426666

Эффективность ССМ, приведенного в таблице, наглядно проиллюстрирована на рисунке, где через Z обозначено число арифметических операций.

5. Заключение



Кривая 1 – ССМ, кривая 2 – СМ

Сравнены ССМ и СМ по числу арифметических действий при решении стандартной проблемы на собственные значения с комплексной матрицей. Показано, что ССМ экономичен и имеет высокую

точность при решении проблемы гидродинамической устойчивости. При этом высокая точность ССМ сохраняется.

Литература

- [1] Воедводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977. - 304 с.
- [2] Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. - Ташкент: Fan va texnologiya, 2011. - 188 с.
- [3] Линь Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. - М.: Иностран. лит., 1958. - 195 с.
- [4] Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. - М.: Мир, 1971. - 350 с.
- [5] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 571 с.
- [6] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1977. - 366 с.
- [7] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физматлит, 2005. - 88 с.
- [8] Thomas H.H. The stability of plane Poiseuille flow // Phys.rev. - 1953. - № 4 (91). - Pp. 780-783.
- [9] Бахвалов К.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - Москва, 1969. - № 4(9). - С. 841-859.
- [10] Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О равномерно сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной // Числен. методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1981. - № 2 (12). - С. 45-56.
- [11] Крылов А.А., Малыгина И.Д. Решение задачи о собственных значениях для уравнения Орра-Зоммерфельда разностным методом // Вычисл. методы и программирование. - Москва, 1968. - Вып. 11. - С. 44-54.
- [12] Жарилкасинов А., Лисейкин В.Д., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Применение неравномерной сетки для численного решения задачи Орра-Зоммерфельда // Числен. методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1983. - № 5 (14). - С. 45-54.
- [13] Жарилкасинов А., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Эффективная неравномерная сетка для уравнения Орра-Зоммерфельда и спектр течения Пуазейля // Новосибирск, 1984. - 35 с. - (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. мех.; № 21.)
- [14] Loer St. Examination of the stability of disturbed boundary-layer flow by a numerical method // Phys./ fluids.- 1969. - № 12 (12). - Pp. 139-143.

- [15] Левитан Ю.Л., Рождественский Б.Л. Спектральные характеристики разностных схем для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами. - Москва, 1973. - 26 с. - (Препринт / РАН. Ин-т прикл. матем.; № 29.)
- [16] Моисеенко Б.Д., Рождественский Б.Л., Сидорова В.К. Спектральные характеристики разностных схем и условия численного моделирования предельных режимов течений вязкой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - Москва, 1974. - № 6 (14). - С. 1499-1515.
- [17] Слепцов А.Г. Проекционно-сеточные методы решения задач Орра-Зоммерфельда // Числен. методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1983. - № 5 (14). - С. 111-126.
- [18] Brown W.B. A stability criterion for there-dimensional laminar boundary layers // In: Boundary layer and flow control. - London, 1961. - Vol. 2. - Pp. 913-923.
- [19] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. - Москва, 1961. - № 3 (16). - С. 171-174.
- [20] Гольдштик М.А., Сапожников В.А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. - Москва, 1968. - № 5. - С. 42-46.
- [21] Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 2003. - 632 с.
- [22] Сапожников В.А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки // Тр. Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. - Новосибирск, июль 1986. - Новосибирск, 1986. - С. 212-219.
- [23] Желтухин Н.А. Детерминантный метод решения уравнения Орра-Зоммерфельда // Аэрогазодинамика: Тр. Сиб. конф. по аэродинамике. Июль-август 1969. - Новосибирск, 1973. - С. 70-73.
- [24] Лутвинов В.М. О методе локализации собственных значений и одной задаче линейной теории гидродинамической устойчивости // Уч. зап. ЦАГИ. - Москва, 1971. - № 2 (2). - С. 76-80.
- [25] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. fluid mech. - 1971. - № 4 (50). - Pp. 689-701.
- [26] Zebib A.A. Chebyshev method for the solution of boundary value problems // J. comput. Phys. - 1984. - № 3(53). - P. 443-455.
- [27] Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра-Зоммерфельда // Математическое моделирование. - Москва, 2005. - № 9 (17). - С. 35-42.