

УДК 539.3

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Анарова Ш.А.

к.т.н., старший научный сотрудник-соискатель,  
Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,  
тел.: +(99894) 637-90-66, e-mail: omon\_shoira@mail.ru

Статья посвящена численному моделированию колебания стержней в статических постановках задачи. Рассмотренные задачи решены с различными значениями шага сетки. Результаты моделирования приведены в табличном и графическом виде и дан их анализ.

**Ключевые слова:** колебание, стержень, моделирование, шаг сетки, численный анализ.

## NUMERICAL MODELING OF RODS OSCILLATION

Anarova Sh.A.

The article is devoted to numerical simulation of rod oscillation in static formulation of the problem. The problems considered are solved with different values of the grid pitch. The results of the simulation are presented in a tabular and graphical form and their analysis is given..

**Keywords:** oscillations, rod, modeling, grid steps, numerical analysis.

## СТРЕЖЕНЛАР ТЕБРАНИШИНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

Анарова Ш.А.

Ушбу мақола масалаларнинг статик қўйилишида стреженлар тебранишини математик моделлаштиришга бағишланган. Натижалар жадвал ва график кўринишда келтирилган. Қўйилган масаланинг ечимлари тўр кадамларининг турли қийматларида ҳал этилган ва бу натижалар жадвалда келтирилган. Олинган натижалар сонли таҳлил қилинган.

**Калит сўзлар:** тебраниш, стержен, моделлаштириш, тўр кадамлари, сонли таҳлил.

### 1. Введение

В работах [1 - 6] приведена математическая модель пространственно-нагруженных стержней при следующей кинетической гипотезе [7]:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u - \frac{\partial v}{\partial x} z - \frac{\partial w}{\partial x} y + \\ \varphi(y, z) \frac{\partial \theta}{\partial x} &+ \psi_1(z) \beta_1 + \psi_2(y) \beta_2, \\ u_2(x, y, z, t) &= v + z\theta, \quad u_3(x, y, z, t) = w - y\theta. \end{aligned} \right\} (*)$$

Полагая  $\partial v/\partial x = \alpha_1 + \beta_1$ ,  $\partial w/\partial x = \alpha_2 + \beta_2$ , где  $\theta$  – угол закручивания,  $u, v, w$  – перемещения срединной линии стержня,  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы поворота сечений при чистом изгибе,  $\beta_1, \beta_2$  – углы поперечного сдвига,  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора перемещений,  $x, y, z$  – пространственные переменные,  $\varphi(y, z)$  – функция кручения Сен-Венана, определяемая из условий

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \partial \varphi / \partial n = ly - mz.$$

Первое соотношение (\*) представляем в виде

$$u_1 = u - z\alpha_1 - y\alpha_2 + \varphi(x, y, z)\vartheta + a_1(x, y, z)\beta_1 + a_2(x, y, z)\beta_2$$

где  $a_1 = \psi_1(z) - z$ ,  $a_2 = \psi_2(y) - y$ ,  $\vartheta \neq \partial \theta / \partial x$  – погонная закрутка.

При построении прикладной теории переход от исследования колебания трехмерного тела к одномерному имеет решающее значение. Полное решение такой задачи можно получить, исходя из дискретно – континуального методов, разработанного В.З. Власовым, Г.Ю. Джанелидзе и В.К. Кабуловым.

На основе уточненной теории Власова – Джанелидзе – Кабулова перемещения стержня берем в виде [2]:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u - z\alpha_1 - y\alpha_2 + \varphi(x, y, z, t)\vartheta + \\ &+ a_1(x, y, z, t)\beta_1 + a_2(x, y, z, t)\beta_2, \\ u_2(x, y, z, t) &= v + z\theta, \quad u_3(x, y, z, t) = w - y\theta. \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь искомые функции доводят до двенадцати  $(u, v, w, \varphi, \vartheta, \theta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a_1, a_2)$ , и на внешнюю нагрузку не ставятся ограничения, а также функции  $u, v, w, \vartheta, \theta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  являются функциями по пространственной переменной  $x$  и  $t$ , где

$$a_1 = \psi_1 - z; \quad a_2 = \psi_2 - y;$$

$$\psi_1 = \frac{3z}{2k} \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right); \quad \psi_2 = \frac{3y}{2k} \left( 1 - \frac{4y^2}{3b^2} \right).$$

Алгоритм расчета этой модели приведены в работах [8-11]. На основе вычислительного

алгоритма разработаны программные средства, реализованные в среде DelPhi 7.0 [12].

Здесь приведены результаты вычислительного эксперимента по расчету пространственно - нагруженных стрижней на основе алгоритма [7-11].

Рассмотрим упругий консоль при совместном действии продольных, поперечных и крутильных сил. Дифференциальное уравнение и граничные условия в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + B(x) \vec{U} \right) + C(x) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + D(x) \vec{U} = \vec{F}(x); \quad (2)$$

$$\left[ -\vec{A}(x) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + B(x) \vec{U} - Q(x) \right] \delta \vec{U} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \{u, \alpha_1, \beta_1, v, \alpha_2, \beta_2, w, \theta, \vartheta\}^T; \\ \vec{F}_i(x) &= \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6, \vec{F}_7, \vec{F}_8, \vec{F}_9\}^T; \\ Q(x) &= \{N_x, M_y, M_{a_1}, Q_z, M_z, M_{a_2}, Q_y, M_x, M_{\varphi}\}^T. \\ A(x) &= \{a_{ij}\}, \quad B(x) = \{b_{ij}\}, \quad C(x) = \{c_{ij}\}, \\ D(x) &= \{d_{ij}\}, \quad (i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, \dots, 9). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; \quad a_{22} = \frac{I_y}{Fl^2}; \quad a_{33} = \frac{I(a_1^2)}{Fl^2}; \\ a_{44} &= \gamma; \quad a_{55} = \frac{I_z}{Fl^2}; \quad a_{66} = \frac{I(a_2^2)}{Fl^2}; \\ a_{77} &= \gamma; \quad a_{88} = \frac{\gamma(I_y + I_z)}{Fh_0^2}; \quad a_{99} = \frac{I_{\varphi}}{Fh_0^2 l^2}; \\ b_{45} &= -a_{44}; \quad b_{45} = \frac{\gamma I \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right)}{F}; \quad b_{72} = -\gamma; \\ b_{73} &= \frac{\gamma I \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} \right)}{F}; \quad b_{89} = \frac{\gamma \left[ I \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + I \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right]}{Fh_0^2}; \\ c_{27} &= \gamma; \quad c_{37} = -b_{73}; \\ c_{54} &= a_{44}; \quad c_{64} = -b_{46}; \\ c_{98} &= \frac{\gamma \left[ I \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + I \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right]}{Fh_0^2}; \\ d_{23} &= b_{73}; \quad d_{32} = d_{23}; \quad d_{55} = -a_{44}; \\ d_{56} &= b_{46}; \quad d_{65} = d_{56}; \\ d_{33} &= -\frac{\gamma I \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} \right)^2}{F}; \quad d_{66} = -\frac{\gamma I \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right)^2}{Fh_0^2}; \\ d_{99} &= -\frac{\gamma \left[ I \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + I \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]}{Fh_0^2}; \end{aligned}$$

$$F = h_0 b_0 \int_y \int_z h(x) b(x) dz dy;$$

$$I_y = h_0^3 b_0 \int_y \int_z h^3(x) b(x) \cdot z^2 dz dy;$$

$$I_y = h_0 b_0^3 \int_y \int_z h(x) b^3(x) \cdot y^2 dz dy;$$

$$I_{\varphi} = h_0^3 b_0^3 \int_y \int_z \varphi^2 \cdot h(x) b(x) dz dy;$$

$$I \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} \right) = h_0 \cdot b_0 \int_y \int_z \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} \right) h(x) b(x) dz dy;$$

$$I \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) = h_0 \cdot b_0 \int_y \int_z \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) h(x) b(x) dz dy;$$

$$I \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = h_0^3 b_0 \int_y \int_z \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h^3(x) b(x) dz dy;$$

$$I \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = h_0 \cdot b_0^3 \int_y \int_z \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) h(x) b^3(x) dz dy;$$

$$a_1 = h_0 \left( \frac{5}{4} z - \frac{5}{3} z^3 - z \right);$$

$$a_2 = b_0 \left( \frac{5}{4} y - \frac{5}{3} y^3 - y \right); \quad \gamma = \frac{E}{G}.$$

Выражения для  $\vec{F}_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) взяты в следующем виде:

$$\vec{F}_1 = \frac{l^2}{EFh_0} N_x; \quad \vec{F}_2 = \frac{l}{EFh_0} M_y; \quad \vec{F}_3 = \frac{l}{EFh_0} M_{a_1};$$

$$\vec{F}_4 = \frac{l^2 b_0}{EFh_0} Q_z; \quad \vec{F}_5 = \frac{l b_0}{EFh_0^2} M_z;$$

$$\vec{F}_6 = \frac{l b_0}{EFh_0^2} M_{a_2}; \quad \vec{F}_7 = \frac{l^2}{EFh_0} Q_y;$$

$$\vec{F}_8 = \frac{l^2}{EFh_0^2} M_x; \quad \vec{F}_9 = \frac{l^2}{EFh_0^2} M_{\varphi}.$$

## 2. Постановка задачи

Для исследования численной сходимости задачи рассмотрим следующие условия. Если один конец защемленный, а другой свободен, то граничное условие (3) имеет вид:

$$\delta \vec{U} \Big|_x = 0, \quad (4)$$

т.е. при  $x=0$  задаются составляющие векторы

$$\vec{U} \Big|_x = 0, \quad (5)$$

При  $x=1$  из граничного условия (3) имеем

$$\left[ -\vec{A}(x) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \vec{B}(x) \vec{U} \right] \Big|_{x=1} = \vec{F}; \quad A^* = \vec{U} \Big|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

где

$$\vec{A} = \{a_{ij}\}, \quad \vec{B} = \{b_{ij}\}, \quad (i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, \dots, 9);$$

$$\bar{a}_{11} = -1; \bar{a}_{22} = -\frac{I_y}{Fl^2}; \bar{a}_{33} = -\frac{I(a_1^2)}{Fl^2};$$

$$\bar{a}_{44} = -\gamma; \bar{a}_{55} = -\frac{I_z}{Fl^2}; \bar{a}_{66} = -\frac{I(a_2^2)}{Fl^2};$$

$$\bar{a}_{77} = -\gamma; \bar{a}_{88} = -\frac{\gamma(I_y + I_z)}{Fh_0^2}; \bar{a}_{99} = -\frac{I_\varphi}{Fh_0^2 l^2};$$

$$\bar{b}_{45} = a_{44}; \bar{b}_{46} = -\frac{\gamma I \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right)}{F};$$

$$\bar{b}_{72} = \gamma; \bar{b}_{73} = -\frac{\gamma I \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} \right)}{F};$$

$$\bar{b}_{89} = -\frac{\gamma \left[ I \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + I \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right]}{Fh_0^2}; \quad a_{44}^* = a_{77}^* = 1.$$

Для решения задачи (2) и (3) применяем метод конечных разностей. Аппроксимации для уравнений (2) и граничных условий (3) приведены в работах [8-11]:

$$\tilde{A}_i \tilde{U}_{i-1} + \tilde{B}_i \tilde{U}_i + \tilde{C}_i \tilde{U}_{i+1} = \tilde{F}_i,$$

$$wh = \{x_i = i \cdot h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\}, \quad (h = 1/N),$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_0 &= 0, \\ \tilde{U}_N &= \bar{B}_N \tilde{U}_{N-1} + \bar{A}_N \tilde{U}_{N-2} + \bar{\Phi}_N \end{aligned} \right\}$$

### 3. Вычислительный эксперимент

При расчете консоли геометрические и механические характеристики выбираем в виде:

$$l = 100 \text{ см}; \quad h_0 = 10 \text{ см}; \quad b_0 = 8 \text{ см};$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2.$$

Рассматриваемые задачи решаются с различными значениями шага сетки. Полученные результаты приведены ниже в таблице 1, и соответствуют задачам (2), (3) и (6).

На рисунках 1 - 9 приведены результаты колебания стержней в виде графиков, для продольного перемещения  $u$ , вертикальных перемещений  $v, w$ , углы наклона сечений  $\alpha_1, \alpha_2$ , углы поперечного сдвига  $\beta_1, \beta_2$ , угол закручивания  $\theta$  и угла закрутки  $\nu$ .

Таблица 1

$N_{uz}$	50	100
$u$		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,000003	0,000004
0,50	0,000023	0,000023
0,70	0,000032	0,000033
1,00	0,000046	0,000047
<b>200</b> <b>400</b>		
0	0,000000	0,000000

0,10	0,000004	0,000005
0,50	0,000023	0,000024
0,70	0,000033	0,000033
1,00	0,000047	0,000044

$N_{uz}$	50	100
$\alpha_1$		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,032150	0,037631
0,50	0,210908	0,215596
0,70	0,302798	0,307259
1,00	0,443772	0,448106
<b>200</b> <b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,040430	0,042935
0,50	0,218180	0,220676
0,70	0,309782	0,312285
1,00	0,449594	0,449931

$N_{uz}$	50	100
$\beta_1$		
0	0,000000	0,000000
0,10	-0,000103	-0,000116
0,50	-0,000109	-0,000116
0,70	-0,000109	-0,000116
1,00	-0,000109	-0,000116
<b>200</b> <b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	-0,000118	-0,000119
0,50	-0,000118	-0,000119
0,70	-0,000118	-0,000119
1,00	-0,000118	-0,000119

$N_{uz}$	50	100
$\nu$		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,001042	0,001404
0,50	0,044780	0,046220
0,70	0,092037	0,094684
1,00	0,196763	0,200006
<b>200</b> <b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,001613	0,001818
0,50	0,047151	0,047979
0,70	0,094881	0,094913
1,00	0,200866	0,201255

$N_{uz}$	50	100
$\alpha_2$		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,028626	0,032834
0,50	0,192884	0,194355
0,70	0,280631	0,281320
1,00	0,419275	0,419523
<b>200</b> <b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,035065	0,037182

0,50	0,195809	0,197833
0,70	0,282553	0,284573
1,00	0,420631	0,421508

$N_{uz}$	50	100
$\beta_2$		
0	0,000000	0,000000
0,10	-0,000153	-0,000172
0,50	-0,000156	-0,000172
0,70	-0,000156	-0,000172
1,00	-0,000156	-0,000172
<b>200</b>		
<b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	-0,000177	-0,000178
0,50	-0,000177	-0,000178
0,70	-0,000177	-0,000178
1,00	-0,000177	-0,000178

$N_{uz}$	50	100
$w$		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,001176	0,001619
0,50	0,050952	0,054180
0,70	0,100084	0,104212
1,00	0,212698	0,217183
<b>200</b>		
<b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,001873	0,001914
0,50	0,054304	0,054545
0,70	0,106048	0,107787
1,00	0,219966	0,221328

$N_{uz}$	50	100
$\theta$		
0	0,000000	0,000000
0,10	-0,000977	-0,001159
0,50	-0,006404	-0,006589
0,70	-0,009123	-0,009304
1,00	-0,033197	-0,013378
<b>200</b>		
<b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	-0,001249	-0,001328
0,50	-0,006679	-0,006759
0,70	-0,009393	-0,009474
1,00	-0,013469	-0,013514

$N_{uz}$	50	100
$v$		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,002721	0,002818
0,50	0,002979	0,002980
0,70	0,002981	0,002981
1,00	0,002981	0,002981
<b>200</b>		
<b>400</b>		
0	0,000000	0,000000
0,10	0,002849	0,002874
0,50	0,002980	0,002981
0,70	0,002981	0,002981
1,00	0,002981	0,002981

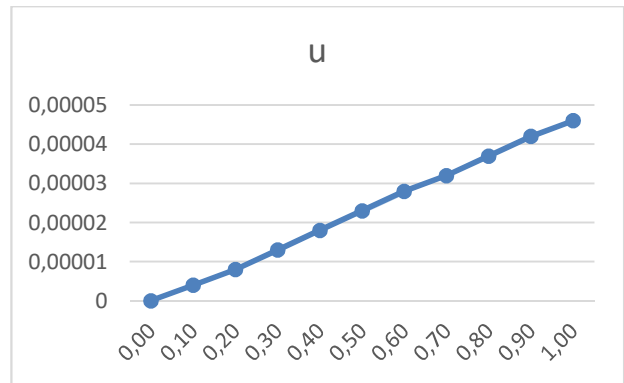


Рис. 1. Изменение продольного перемещения  $u$  по длине стержня

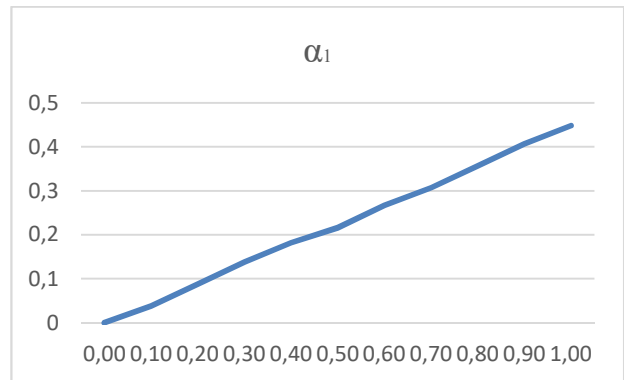


Рис. 2. Изменение угла наклона сечений  $\alpha_1$  по длине стержня

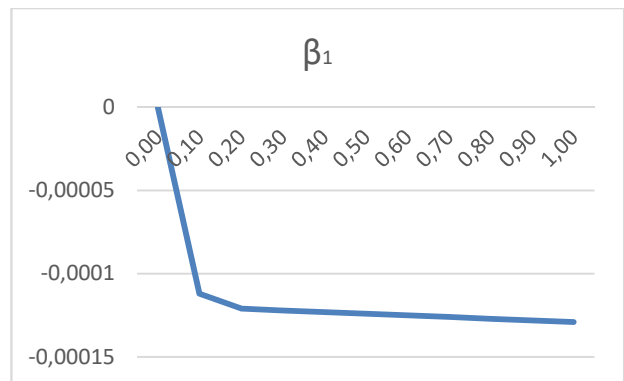


Рис. 3. Изменение угла поперечного сдвига  $\beta_1$  по длине стержня

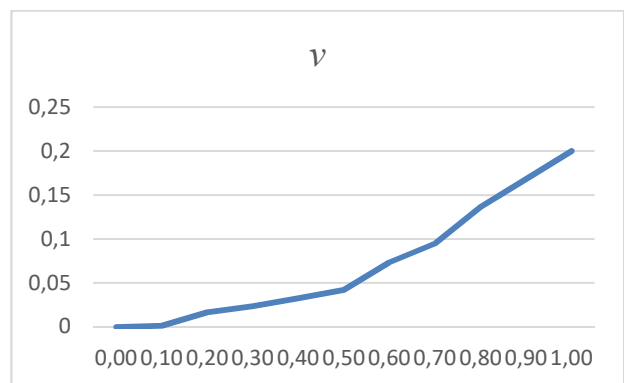


Рис. 4. Изменение вертикальные перемещение  $v$  по длине стержня

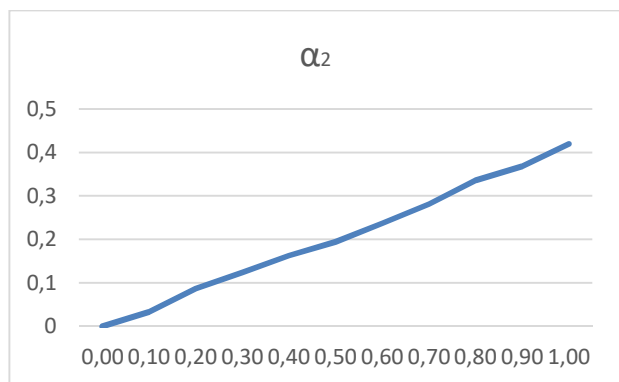


Рис. 5. Изменение угла наклона сечений  $\alpha_2$  по длине стержня

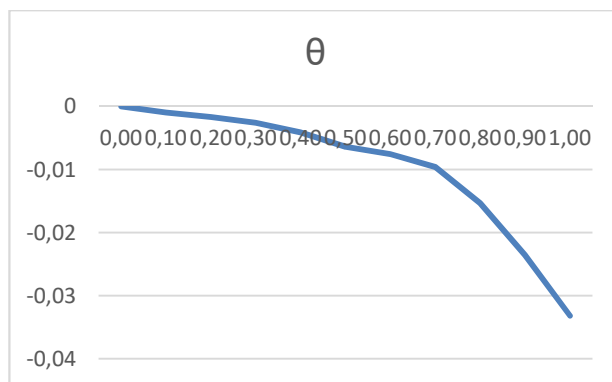


Рис. 8. Изменение угол закручивания  $\theta$

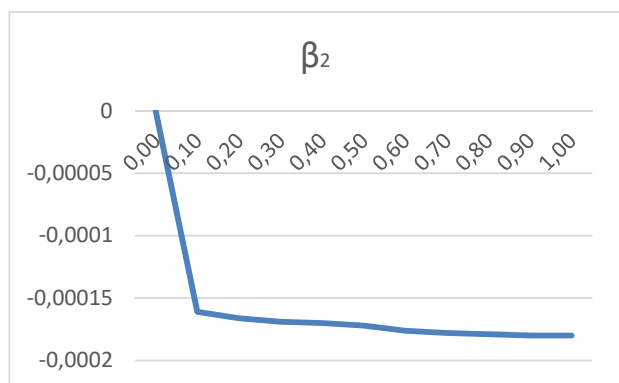


Рис. 6. Изменение угла поперечного сдвига  $\beta_2$  по длине стержня

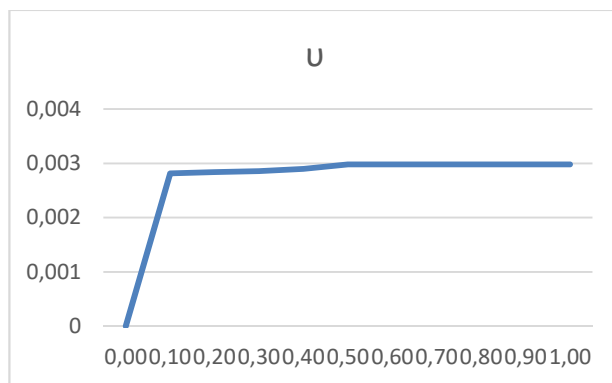


Рис. 9. Изменение угла закрутки  $\nu$

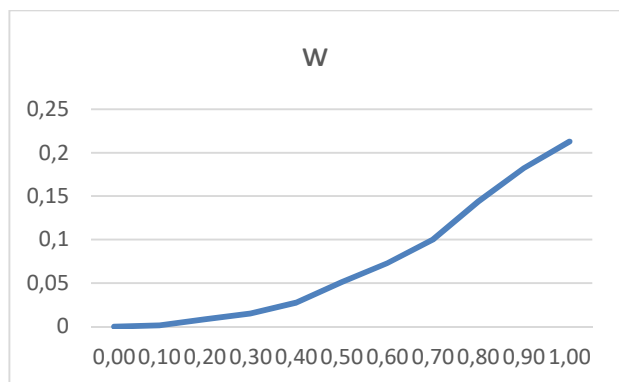


Рис. 7. Изменение вертикальные перемещение  $w$  по длине стержня

#### 4. Заключение

Анализ результатов показывает, что при шаге  $N = 50, 100, 200$  и  $400$  значения перемещения  $u, v, w$ , углы поворота  $\alpha_1, \alpha_2$ , углы поперечного сдвига  $\beta_1, \beta_2$ , угла закручивания  $\theta$  и угла закрутки  $\nu$  в защемленных торцах и вблизи торцов совпадают до одного знака, а середине стержня и свободных торцах до двух знаков.

В целом полученные результаты удовлетворяют физике происходящего процесса, в связи с этим разработанный вычислительный алгоритм и соответствующее программные обеспечение можно использовать в расчетах стержня прямоугольного сечения.

#### Литература

- [1] Анарова Ш.А., Назиров Ш.А., Юлдашев Т. Вывод математических моделей пространственно-нагруженных стержней // Алгоритмы : сб.науч.тр. – Ташкент, 1997. – Вып. 85. – С. 55-61.
- [2] Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Юлдашев Т. Вариационные уравнения колебания тонкостенных стержней при пространственном нагружении // Вопросы вычислительной и прикладной математики : сб.науч.тр. – Ташкент, 2013. – Вып. 129. – С. 61-81.
- [3] Анарова Ш.А., Юлдашев Т. Математические модели пространственно-нагруженных стержней с учетом функции кручения и поперечных сдвигов // Вестник ТУИТ. – Ташкент, 2014. – № 4. – С. 76-86.
- [4] Анарова Ш.А., Юлдашев Т. Математическая модель нелинейных уравнений колебаний стержней при динамическом нагружении // Проблемы информатики и энергетики. – 2014. – № 6. – С. 36-42.
- [5] Anarova Sh.A., Nuraliev F.M., Dadenova G. Mathematical model of spatially loaded bars with account of torsion function and transverse shears // International Journal of Technical Research and Applications. – 2016. – Vol. 4. – Issue 1. – Pp. 22-32.

- [6] Анарова Ш.А., Юлдашев Т. Вывод математической модели пространственно-нагруженных стержней с учетом функции кручения и поперечных сдвигов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2015. – № 1. – С. 28-40.
- [7] Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Ташкент: Фан, 1966. – 394 с.
- [8] Анарова Ш.А., Сафаров Ш.Ш. Вычислительный алгоритм расчета стержней при пространственном динамическом нагружении // Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении : материалы Республиканской научно-технической конференции. – Джизак, 2016. – С.45-50.
- [9] Анарова Ш.А., Сафаров Ш.Ш. Математическое обеспечение напряженно - деформированного состояния стержней при пространственном нагружении // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2016. – № 4. – С. 20-34.
- [10] Анарова Ш.А., Эшқораяева Н.Г. Вычислительный алгоритм расчета стержней при пространственном нагружении // Замонавий ахборот-коммуникация жорий этишда дастурий таъминотларни яратиш : муаммо ва ечимлар : Республика илмий техникавий анжумани материаллари. – Самарқанд, 2016. – С. 82-87.
- [11] Анарова Ш.А. Вычислительный алгоритм расчета нелинейных колебаний стержней при динамическом нагружении // Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий : материалы V международной конференции. – Бухара, 2016. – С. 37-40.
- [12] Анарова Ш.А. Структура комплекс программ для исследования напряженно-деформированного состояния упругих призматических тел произвольного сечения // ТАТУ хабарлари. – 2016. – № 1(37). – С. 51-59.