УДК 519.6

ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТРОПОСФЕРНОМ ВОЛНОВОДЕ

Туйчиев Б.О.
старший преподаватель, заведующий кафедрой,
Каршинский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
тел: +(99890) 609-75-00, e-mail: bekzod2702@mail.ru

В работе рассматривается принцип построения математической модели распространения радиоволн во фрактальной тропосферной атмосфере прямой видимости. Учитываемая в модели помеха, в отличии от традиционного способа учета, аппроксимирована функцией Вейерштрасса. Решение задачи при заданных граничных и начальных условиях получено в виде передаточных функцией по каналу распространения радиоволны и по каналу возмущения (помехи).

Ключевые слова: фрактал, модель, распространение, электромагнит, тропосфера, волновод, турбулентность.

FRACTAL MODEL OF THE PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE TROPOSPHERIC WAVEGUIDE

Tuychiev B.O.

The paper discusses the principle of constructing a mathematical model of propagation of radio waves in the fractal tropospheric atmosphere of line of sight. The interference considered in the model in contrast to the traditional accounting method is approximated by the Weierstrass function. The solution of the problem for given boundary and initial conditions is obtained in the form of transfer functions along the channel of propagation of the radio wave and along the channel of disturbance (interference). The purpose of this work is to construct a mathematical model for the propagation of plane electromagnetic waves (signals) in the tropospheric atmosphere of line of sight, taking into account the fractality of turbulence and interference.

Keywords: fractal, model, propagation, electromagnet, troposphere, waveguide, turbulence.

TROPOSFERADA ELEKTROMAGNIT TO'LQINLARNING TARQALISHINING FRAKTAL MODELI

Tuychiev B.O.

Ushbu maqolada fraktal troposfera atmosferasida radio to'lqinlarning tarqalishining matematik modelini yaratish printsipi muhokama qilinadi. Modelda an'anaviy buxgalteriya usulidan farqli ravishda ko'rib chiqilgan interferentsiya Weierstrass funksiyasi tomonidan taxmin qilinadi. Muayyan chegara va boshlang'ich shartlar bo'yicha echim radioto'lqinlarni tarqatish kanali bo'ylab uzatish funktsiyalari shaklida va buzilish (interferentsiya) kanali orqali olinadi.

Kalit so'zlar: fraktal, model, tarqalish, elektromagnit, troposfera, to'lqin usullari, turbulentlik.

1. Введение

Обычно, при традиционном подходе решения задачи распространения электромагнитных волн (сигналов) в турбулентной атмосфере диэлектрическую проницаемость среды - Ɛ(x,y,z,t)-полагают случайной величиной, а скалярное дифференциальное уравнение, описывающее распространение волн, случайным процессом. При этом систематическое решение уравнения отсутствует. Для решения задачи заранее предполагают известные законы распределения вероятностей случайной величины и случайного процесса (например, нормальный закон распределения, закон распределения Пуассона, Рэлея и др.), затем используя численные методы или методы имитационного моделирования (метод Монте-Карло) производят оценку статистических характеристик волнового поля (статистические характеристики распространяемого сигнала).

Принято считать, что эта функция фрактальная с размерностью D.

Моделирование флуктуаций показателя преломления n тропосферы функцией Вейерштрасса рассматривалось в работе [6]. В одномерном случае эта модель выглядят так:

$$n_1(z)=P_1 \frac{\{2<n_f^2>\left[1\text{-}b^{2(D\text{-}2)}\right]\}^{1/2}}{\{1\text{-}b^{2(D\text{-}2)(N+1)}\}^{1/2}} \sum_{n=0}^{N} b^{2(D\text{-}2)n} \cos(2\pi b^{n_{z/L}}+\varphi_n), \quad (1)$$

где $\{2<n_f^2>[1\text{-}b^{2(D\text{-}2)}]\}^{1/2}\,[1-b^{2(D-2)(N+1)}]^{-1/2}$ – коэффициент нормализации; P_1 – определяет соотношение флуктуациями $<n_f^2>$ и флуктуациями $<n_1^2>$ в инерционном дисперрпо; b>1 - b>1 – параметр пространственно – частотного масштабирования; D – фрактальная размерность, применяемое значение 5/3 при одномерных флуктуациях; N+1 – число масштабов или интервалов в логарифмическом разбиении; φ_n – произвольная фаза, равномерно распределенная на отрезке [0,2π]. В той те работе приведена трехмерная модель коэффициента применения тропосферы функция Вейерштрасса.

Нами для фрактальной модели диэлектрической проницаемости тропосферной атмосферы, зависящей от двух применениях, принята модифицирования функция Вейерштрасса следующего вида:

$$\mathcal{E}_1(z,t)=\sqrt{2}\tau\frac{[1-b^{2(D-3)}]^{1/2}}{[1-b^{2(D-3)(N+1)}]^{1/2}}\sum_{n=1}^{N-1}b^{(D-3)n}\sum_{m=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\sin\left\{K_0b^N\left[Zcos\left(\frac{2\pi m}{M}\right)+tsin\left(\frac{2\pi m}{M}\right)\right]+\varphi_{nm}\right\}, \qquad (2)$$

где C – стандартное отклонение, b>1 – параметр пространственно – частотного масштабирования, 2<D<3 – фрактальная размерность, K_0 – волновое число, N и M – число гармоник, φ_{nm} – произвольная фаза, t – время, z – пространственная координата. Выражение (2) вполне описывает флуктуации диэлектрической проницаемости тропосферной атмосферы.

2. Фрактальная модель помехи

Как известно, при распространении радиоволн в атмосферных условиях (в тропосфере, в частности) они подвержены всякого рода посторонним помехам. Они являются случайными величинами или функциями. Обычно при анализе и синтезе сигналов помехи рассматривают как белый шум, статистические характеристики которого распределены нормально. В основе традиционного подхода к анализу случайных сигналов лежит спектрально-корреляционная теория с фундаментальной теоремой Винера-Хинчина. Однако, если случайный процесс является негауссовым, тогда полное статистической описание сигналов требует оценки моментов высших порядков с учетом многоточечных корреляций, что не всегда оправдывают себя. Альтернативным подходом является оценка фрактальных размерностей различных, связанных с процессом, геометрических объектов. Примером случайного процесса, обладающего фрактальными свойствами, является классический винеровский процесс броуновского движения. Траектория винеровского процесса обладает свойством масштабной инвариантности или скейлингом.

Рассмотрим гауссов случайный процесс с независимыми значениями шагов {ξ}. Приращение координаты броуновской частицы определится выражением

$$X(t) - X(t_0) \sim \xi\,|t-t_0|^{1/2},\ t\geq t_0 \qquad (3)$$

для любой пары моментов времени t и t_0. Из (3) можно определить координату X(t), по координате $X(t_0)$ выбирая случайное число ξ из гауссова распределения, умножая его на степень приращения времени $|t-t_0|$ и складывая результат с известной координатой $X(t_0)$. Таким образом, выражения (4) описывает классическое броуновское движение или случайную функцию.

На основе винеровского броуновского процесса Мандельброт ввел понятие обобщенного броуновского движения [1] заменой показателя в формуле [4] на любое действительное число из интервала 0<H<1. Случай H=1/2 соответствует независимым приращениям и описывает классическое броуновское движение. Показатель H называют показателем Херста, сведения по нему можно получить, например, в [5].

Обычно, при статистическом анализе сигналов с учетом помех считают, что они не зависят от пространственных координат, и зависят лишь только от времени, т.е. N(z,t)=N(t).

С точки зрения физического содержания этот подход на практике оправдывается. Таким образом, помеха в тропосферной атмосфере описывается функцией, зависящей от одной переменной времени t. Чтобы аппроксимировать помеху N(t) (случайная функция). С обобщенным броуновским движением $B_H(t)$ воспользуемся самоаффинностью фрактальной броуновской функции.

К самоафинным функциям относится и фрактальная функция Вейерштрасса-Мандельброта, которую мы рассмотрели ранее в выражении (1). Тогда, помеху можно аппроксимировать с помощь следующего выражения:

$$N(t)=\sqrt{2}\delta\,\frac{[1-b^{(2d-4)}]^{1/2}\sum_{n=0}^{N}b^{(D-2)n}\sin(2\pi Sb^nt+\varphi_n)}{[1-b^{(2d-4)(N+1)}]^{1/2}}, \qquad (4)$$

где δ – стандартное отклонение, b,S – параметры пространственно-частотного масштабирования, D - фрактальная размерность, N+1 – количество гармоник, φ_n – фаза, распределенная случайным образом на отрезки [0,2π], t – время.

Ɛ(z,t) – флуктуация диэлектрической проницаемости среды распространения; N(z,t) – помеха (шум); U(z,t) – плоская электромагнитная волна в точке приёма; φ(·) – оператор преобразования.

Допустим, что на тропосферную атмосферу падает плоская монохроматическая ЭМВ (электромагнитная волна), т.е. $U_0(z,t)= U_m\cos(\omega t-K_0z+\varphi_m)$. В процессе распространения по тропосфере эта ЭМВ подвергается возмущениям Ɛ(z,t) и N(z,t), которые определяются соотношениями (2) и (4) соответственно. В этом случае процесс распространения плоской ЭМВ в тропосфере можно описать следующим волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=U_0(z,t)+N(z,t)\ , \qquad (5)$$

где v – скорость распространения плоской волны в тропосфере. Если принять во внимание $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ и $\mu=1$, $\varepsilon=1+\varepsilon_1$, то (6) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\mathcal{E}_1(z,t)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+U_0(t,t)+N(z,t)(t). \qquad (6)$$

В уравнение (6)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=U_m\omega^2\cos(\omega t-v-\varphi_m).$$

Тогда окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=U_0(z,t)-$$
$$-U_m\omega^2\cos(\omega t-\varphi_m)x\varepsilon_1(z,t)+ \qquad (7)$$
$$+N(z,t)$$

где ω^2- круговая частота, k_0- волновое число, φ_m – фаза, c- скорость света.

Начальное и граничное условия из физического смысла задачи примем следующими:

$$\begin{cases} U(z,0)=0;\ U(z,0)=0; \\ U(0,t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_0); \\ \frac{\partial U}{\partial t}=0; \\ U(z,t)=U_1\cos(\omega t-K_0z+\varphi_1); \end{cases} \qquad (8)$$

Уравнения (7) решаем с помощью преобразования Лапласа по переменной t при нулевых начальных условиях.

После образования (8) по переменной t получаем новое уравнение

$$\frac{d^2U(z,p)}{dz^2}-\frac{p^2}{c^2}U(z,p)=U_0(z,p)-\varepsilon_1(z,p)+N(z,p) \qquad (9)$$

и граничные условия

$$U_0(z,p)=0;\ U(0,p)=U_{m_0}\frac{P^2\cos\varphi_{m_0}-\omega P\sin\varphi_{m_0}}{P^2+\omega^2} \qquad (10)$$

$$\frac{dU(z,0)}{dt}=0;\ U(z,p)=U_1\frac{P^2\cos(K_0z+\varphi_1)+\omega P\sin(K_0z+\varphi_1)}{P^2+\omega^2} \qquad (11)$$

Изображения Лапласа слагаемых, входящих в правую часть уравнения (9),

$$(A_4-\omega)\cos(A_3z+K_0z+\varphi_{mn}+\varphi_{m0})+$$
$$+P\sin(A_3z+K_0z+\varphi_{mn}+\varphi_{m0})]+\frac{P}{P^2+(A_4-\omega)}+ \qquad (12)$$
$$+\left[(A_4-\omega)\cos(A_3z+K_0t+\varphi_{mn}+\varphi_{m0})+\right.$$
$$\left.+P\sin(A_3z-K_0z+\varphi_{mn}+\varphi_{m0})\right];$$

Здесь для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$A_1=\sqrt{2}\frac{[1\text{-}b^{2(D\text{-}3)}]^{1/2}}{[1\text{-}b^{2(D\text{-}3)(N\text{-}1)}]^{1/2}};$$
$$A_2=b^{(D\text{-}3)n};$$
$$A_3=K_0b^N\cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right);$$
$$A_4=K_0b^N\sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right);$$

$$N(z,p)=B_1\sum_{n=0}^{N}B_2\left[\frac{P}{P^2+B_3^2}(B_3\cos\Psi_n+P\sin\Psi_n)\right], \qquad (13)$$

где для сокращения введены обозначения:

$$B_1=\sqrt{2}\sigma\frac{[1\text{-}b^{(2D\text{-}4)}]^{1/2}}{[1\text{-}b^{(2D\text{-}4)(N+1)}]^{1/2}};$$
$$B_2=b^{(D\text{-}2)n};$$
$$B_2=2\pi Sb^n;$$

Общее решение уравнения (9) состоит из суммы решений однородного и неоднородного (частного решения) обыкновенного дифференциального уравнения, т.е.

$$U(z,p)=C_1e^{\frac{P}{c}z}+C_2e^{\frac{P}{c}z}+U_0^r(z,p)\text{-}E_0^r(z,p)+N^r(z,p), \qquad (14)$$

здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, они определяются из граничных условий для каждого слагаемого в отдельности, затем полученные решения неоднородного уравнения суммируются (принцип суперпозиции), $U_0^z(z,p), E_0^z(z,p)$ и $N^z(z,p)$ есть частные решения неоднородного уравнения, они равны, соответственно, следующим соотношениям (из-за громадности математических выкладок, приводим окончательные результаты);

$$U_0^z(z,p)=-\frac{C^2(P^2\cos\varphi_{m0}-\omega p\sin\varphi_{m0})}{P^2(P^2+\omega^2)}; \qquad (15)$$

$U_0(z,P)$ – падающая плоская волна; $\varepsilon_1(z,t)$ – флуктуация диэлектрической проницаемости; N(z,P) – помеха в тропосферной атмосфере.

$$U(z,P)=W_{11}(z,P)U_0(z,P)+$$
$$+W_{22}(z,P)\varepsilon_1(z,P)+W_{33}(z,P)N(z,P), \qquad (16)$$

где

$$W_{11}(z,P)=\frac{2P}{\left(e^{\frac{p}{c}z}-e^{-\frac{p}{c}z}\right)(P^2+\omega^2)}\times$$
$$\times\left[U_0e^{-\frac{p}{c}z}(Pcos\varphi_0-\omega Psin\varphi_0)-\right. \qquad (17)$$
$$\left.-U_1(Pcos(K_0z++\varphi_1)+\omega sin(K_0z+\varphi_1))\right]-$$
$$-\frac{c^2(Pcos\varphi_{m0}-\omega sin\varphi_{m0})}{P(P^2+\omega^2)};$$

$$W_{22}(z,P)=$$
$$-\frac{A_1U_{m0}\omega^2}{2[(A_3+K_0)^2+\frac{P^2}{c^2}]}\sum_{n=0}^{N}A_2\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{P(A_4-\omega)}{P^2+(A_4-\omega)^2}\cos(A_3z+\right.$$
$$K_0z+\varphi_{mn}++\varphi_{m0})-\frac{P^2}{P^2+(A_4-\omega)^2}\sin(A_3z+K_0z+$$
$$\left.\varphi_{mn}+\varphi_{m0})\right]-$$
$$-\frac{A_1U_{m0}\omega^2}{2[(A_3+K)^2+\frac{P^2}{c^2}]}\sum_{n=0}^{N}A_2\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{P(A_4-\omega)}{P^2+(A_4-\omega)^2}cos(A_3z-\right.$$
$$K_0z+\varphi_{mn}+\varphi_{m0})--\frac{P^2}{P^2+(A_4-\omega)^2}sin(A_3z-K_0z+$$
$$\left.\varphi_{mn}+\varphi_{m0})\right]; \qquad (18)$$

$$W_{33}(z,P)=-\frac{c^2B_1}{P^2}\sum_{n=0}^{N}B_2\left[\frac{P}{P^2+B_3^2}(B_3cos\Psi_m+\right.$$
$$\left.Psin\Psi_m)\right]; \qquad (19)$$

Передаточные функции (17), (18) и (19) вполне достаточной степени описывают процесс распространения плоских электромагнитных волн (сигналов) во фрактальной тропосферной среде.

3. Заключение

Выражениями (17), (18) и (19) можно пользоваться при исследовании и анализе процессов распространения фрактальных сигналов в тропосферной атмосфере в прямой видимости.

В статистической радиотехнике при оптимальной обработке сигналов обрабатываемый сигнал рассматривают как смесь полезного сигнала и помехи (шум). В соотношениях (17) и (18) передаточная функция (17) есть передаваемый полезный сигнал, а передаточные функции (18) и (19) есть помехи. Таким образом, в точки приема (решение дифференциального уравнения (16)) мы фиксируем полезный сигнал, аддитивный флуктуациями и шумом, который можно подвергнуть дальнейшей оптимальной обработке.

Полученные выражения (17), (18) и (19), кроме того, позволяют определить спектральные характеристики передаваемого сигнала в точке наблюдения, если известны спектральные характеристики полезного источника электромагнитных волн, флуктуации диэлектрической проницаемости среды и шума.

Литература

[1] *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. – N.Y.: Freeman, 1982. – 468 p.
[2] *Пайчин Х.О.*, *Рихтер П.Х.* Красота фракталов. – М.: Мир, 1993. – 176 с.
[3] *Bende A.*, *Halvin S.*, Fractals in Disordered Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 408 p.
[4] *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации : топология выборки. – М, 2005. – 847 с.
[5] *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 262 с.
[6] *Kim Y.*, *Jaggerd D.L.* Band-Limited Fractal Model of Atmospheric Refractivity Fluctuation // J. Opt. Soc. Am. – 1988. – Vol. 5. – № 4. – Pp. 475-480.