УДК 532.536

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В СИСТЕМЕ ВИХРЯ И ФУНКЦИИ ТОКА

Нармурадов Ч.Б.
д.ф.-м.н., зав. кафедрой Термезского государственного университета,
тел.: (+99891) 577-93-16, e-mail: normchnor2016@umail.uz

Гуломкодиров К.А.
ст. преподаватель кафедры Термезского государственного университета,
тел.: (+99891) 900-18-25, e-mail: kommiljon@mail.ru

Уравнения Навье-Стокса моделируются в системы вихрь-функция тока. Записана обезразмеренная форма данной системы, показано, что система имеет параболический и эллиптический тип. Для численного решения уравнения Пуассона применён высокоточный и эффективный спектральный метод. Приближенное решение уравнения ищется в виде двойного ряда по полиномам Чебышева. Уравнения Пуассона и граничные условия аппроксимируются рядами Чебышева. Таким образом, дифференциальная задача для уравнения Пуассона сводится к алгебраической задаче для определения коэффициентов разложения. В результате получается система линейных алгебраических уравнений с раздраженной матрицей, у которой очень много нулевых элементов. По- этому представляют интерес те алгоритмы и программы, которые учитывают только ненулевые элементы матрицы, проводят арифметические операции и работают под этими элементами. Применение специальных алгоритмов для раздраженных матриц приводит к существенному выигрышу памяти и времени компьютера.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, вихрь, функция тока, параболическое уравнение, уравнения Пуассона, граничные условия, полиномы Чебышева, алгебраическое уравнение, раздраженные матрицы, вектор неизвестных, предварительное интегрирование.

MATHEMATICAL MODELING OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE VORTEX SYSTEM AND THE FUNCTION OF THE CURRENT

Narmuradov Ch.B., Gulomkodirov K.A.

The Navier-Stokes equations are modeled in the current vortex-function system. Recorded dimensionless form of the system, it is shown that the system has a parabolic and elliptic type. For the numerical solution of Poisson's equation applied high-precision and efficient spectral method. An approximate solution of the equation is sought in the form of a double row of Chebyshev polynomials. Poisson equations and boundary conditions are approximated by Chebyshev series, thus the differential problem for the Poisson equation and the algebraic problem is reduced to determine the coefficients of the expansion. The result is a system of linear algebraic equations with irritable matrix, this matrix so many zero elements. For this it is of interest to those algorithms and programs that take into account only the non-zero elements of the matrix and carry out arithmetic operations operate under these elements. The use of special algorithms for disgruntled matrix results in a significant benefit memory and computer time.

Keywords: Navier-Stokes equations, vortex, function of the current, parabolic equation, Poisson equation, boundary conditions, Chebyshev polynomials, algebraic equation, irritated matrix vector of unknown, pre-integration.

НАВЬЕ-СТОКС ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ВИХР ВА ТОК ФУНКЦИЯСИ ТИЗИМИДА МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

Нармурадов Ч.Б., Гуломкодиров К.А.

Навье-Стокс тенгламалари уюрма-ток функцияси тизимида моделлаштирилади. Ушбу тизимнинг ўлчамсиз формаси ёзилган, ҳамда бу тизим параболик ва эллиптик типга мансублиги кўрсатилган. Пуассон тенгламасини сонли ечиш учун юқори аниқликли ва самарали спектрал метод қўлланилган. Тенгламанинг тақрибий ечими иккиланган Чебишев кўпҳадлари қатори кўринишида изланади. Пуассон тенгламаси ва унинг чегаравий шартлари Чебишев қаторлари билан аппроксимацияланади, шундай қилиб, Пуассон тенгламаси учун дифференциал масала ёйилма коэффициентларини аниқлаш учун алгебраик масалага келтирилади. Натижада тарқоқ матрицага эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системаси қабул қилинади, ушбу матрицада жуда кўп ноль элементлар мавжуд бўлади. Шу сабабли, шундай алгоритм ва дастурлардан фойдаланиш қизиқиш ҳосил қиладики, улар матрицанинг фақат нолмас элементларини инобатга олсин ва улар устида арифметик амаллар бажаришга имкон берсин. Тарқоқ матрицалар учун махсус алгоритмларнинг қўлланилиши копмьютер хотираси ва вақтининг кескин даражада тежалишига олиб келади.

Таянч иборалар: Навье-Стокс тенгламаси, уюрма, ток функцияси, параболик тенглама, Пуассон тенгламаси, чегаравий шартлар, Чебишев кўпҳадлари, алгебраик тенгламалар, тарқоқ матрицалар, номаълумлар вектори, дастлаб интеграллаш.

1. Введение

Уравнения гидродинамики являются нелинейными уравнениями в частных производных смешанного, гиперболического и эллиптического типов, математическими особенностями различных типов, задачами с граничными условиями на бесконечности.

Существующая математическая теория численного решения нелинейных уравнений в частных производных пока еще неадекватна: нет строгой последовательности устойчивости, строгих оценок погрешностей и доказательств сходимости [1].

2. Уравнения движения

Основными уравнениями, описывающими плоское течение несжимаемой ньютоновой вязкой жидкости при отсутствии внешних сил, являются два уравнения количества движения и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}} + \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \bar{y}^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (3)$$

Черточки над буквами означают, что соответствующие величины являются размерными. Уравнения записаны для физических переменных – составляющих скорости $\bar{u}$, $\bar{\vartheta}$ и $\bar{P}$; свойства жидкости характеризуются плотностью $\bar{\rho}$ и кинематическим коэффицентом вязкости $\bar{\nu}$. Эти уравнения основаны на следующих физеческих законах: уравнения (1) и (2) являются проекциями векторного уравнения количества движения $F = ma$ (второго закона Ньютона), причем вязкие силы связаны со скоростью деформаций линейным ньютоновым законом для касательных напряжений, а уравнение (3) выражает закон сохранения массы.

Из уравнений (1) и (2) можно исключить давление, продифференцировав первое из них по *y*, а второе по *x*. Определяя вихрь как

$$\bar{\xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}}, \quad (4)$$

получаем уравнение переноса вихря, имеющее параболический тип:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} - \bar{\vartheta}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2}\right) = -\bar{V}\cdot\left(\bar{\nabla}\bar{\xi}\right) + \bar{\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\xi}. \quad (5)$$

Используя субстанциональную производную, это уравнение представим так:

$$\frac{D\bar{\xi}}{D\bar{t}} = \bar{\nu}\bar{\nabla}\bar{\xi}\,.$$

Определяя функцию тока ψ соотношениями

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = -\bar{\vartheta},$$

уравнение (4) запишем как уравнение Пуассона, имеющее эллиптический тип:

$$\bar{\nabla}^2\bar{\psi} = \bar{\xi}\,. \quad (6)$$

3. Консервативная форма уравнений в безразмерных переменных

Уравнения неразрывности (3):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{y}} = 0$$

запишем через вектор полной скорости $\bar{V}$ в следующим виде:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 0.$$

Расмотрим $\bar{\nabla}\cdot\left(\bar{V}\cdot\bar{\xi}\right)$. В векторной алгебре известно тождество

$$\bar{V}\cdot\left(\bar{\nabla}\bar{\xi}\right) = \bar{V}\cdot\left(\bar{\nabla}\bar{\xi}\right) + \bar{\xi}\left(\bar{\nabla}\cdot\bar{V}\right) = \bar{V}\cdot\left(\bar{\nabla}\bar{\xi}\right).$$

Таким образом, для того чтобы получить консервативную форму уравнения переноса вихря, в уравнении (5) надо заменить $\bar{V}\cdot\left(\bar{\nabla}\bar{\xi}\right)$ на $\bar{\nabla}\cdot\left(\bar{V}\cdot\bar{\xi}\right)$, что дает

$$\frac{\partial \bar{o}}{\partial \bar{t}} = -\bar{\nabla}\cdot\left(\bar{V}\bar{\xi}\right) + \bar{\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\xi} = -\frac{\partial\left(\bar{\vartheta}\bar{\xi}\right)}{\partial \bar{x}} - -\frac{\partial\left(\bar{\vartheta}\bar{\xi}\right)}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2}\right). \quad (7)$$

Для записи системы уравнений в безразмерных переменных вводим конвективный масштаб времени $\bar{L}/\bar{\mho}_0$, где $\bar{L}$ - характерная длина, а $\bar{\mho}_0$ - характерная скорость задачи; например, если $\bar{L}$ - длина хорды прилового профиля и $\bar{\mho}_0$-скорость набегающего потока, то $\bar{L}/\bar{\mho}_0$ - время, за которое частица набегающего потока проходит весь профиль.

Введем следующие безразмерные величины:

$$u = \frac{\bar{u}}{\bar{\mho}_0},\ \vartheta = \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\mho}_0},\ x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}},\ y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}},$$

$$\xi = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\mho}_0/\bar{L}}, t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}/\bar{\mho}_0}.$$

Тогда уравнения (7) и (6) примут вид

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} = -\nabla(V\xi) + \frac{1}{Re}\nabla^2\xi, \quad (8)$$

$$\nabla^2\psi = \xi, \quad (9)$$

где Re – безразмерный параметр, число Рейнольдса

$$Re = \bar{\mho}_0\bar{L}/\bar{\nu}\,.$$

Таким образом, для любого заданного набора граничных условий течение характеризуется одним безразмерным параметром – числом Рейнольдса.

4. Спектральный метод

Известно, что в процессе решения задачи гидродинамики численными методами может возникать другая задача, имеющая также самостоятельный интерес – задача численного интегрирования уравнения Пуассона. И хотя для ее решения разработано большое количество методов –

как прямых, так и итерационных, вопрос об эффективности этих методов остается актуальным. Не останавливаясь специально на проблемах совершенствования итерационных методов (см., например [2-5]), подчеркнём основные достоинства прямых методов: они достаточно точны, не требуют итераций, число которых зачастую оказывается большим и с применением современных алгоритмов могут быть почти также экономичны, как итерационные методы.

Пусть требуется найти решение уравнения Пуассона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = f(x,y) \quad (10)$$

с граничными условиями Дирихле

$$\psi|_\Gamma = 0 \quad (11)$$

в прямоугольнике

$$\Omega = \{-1<x<1,\ -1<y<1\},$$

где Г – граница области Ω.

Решение задачи (10)-(11) ищем в виде двойных рядов по полиномам Чебышева первого рода:

$$\psi(x,y) = \sum_{i=0}^{n}{}' \sum_{j=0}^{m}{}' a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (12)$$

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}{}' \sum_{j=0}^{m}{}' g_{ij} T_i(x) T_j(y)\ . \quad (13)$$

Штрих у суммы означает, что коэффициент a_{ij} (или g_{ij}) берётся с множителем $\frac{1}{2}$, когда один из индексов *i, j* равен нулю. Следовательно, когда *i=j=0,* одновременно перед коэффициентом появляется множитель $\frac{1}{4}$. Частные производные от $\psi(x,y)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y)\\ \frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y)\end{aligned}\right\}, \quad (14)$$

где верхний индекс в круглых скобках у коэффициента a_{ij} указывает порядок производной и переменную, по которой производится дифференцирование. Коэф-фициенты в формулах (12) и (14) связаны следующими рекуррентными соотношениями [6-8]:

$$a_{ij}^{((k-1)x)} = \frac{\left(a_{i-1,j}^{(kx)} - a_{i+1,j}^{(kx)}\right)}{2i}, \quad (15)$$

$$a_{ij}^{((k-1)y)} = \frac{\left(a_{i-1,j}^{(ky)} - a_{i+1,j}^{(ky)}\right)}{2j}. \quad (16)$$

Подставляя ряды (13), (14) в уравнение (10), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y) + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(2x)} T_i(x) T_j(y) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g_{ij} T_i(x) T_j(y).$$

Или после приравнивания коэффициентов при одинаковых полиномах $T_i T_j$ имеем

$$a_{ij}^{(2x)} + a_{ij}^{(2y)} = g_{ij}, \quad i,j = 0,1,\ldots \quad (17)$$

С помощью последовательного применения формул интегрирования (15) и (16) уравнение (17) «интегрируется» сначала два раза по «*x*», а затем дважды по «*y*». Полученное уравнение записывается в виде [6]:

$$4p(i)(j+1)a_{i,j-2} + 4p(i)(j-1)a_{i,j+2} - \\ -8[jp(i)+ip(j)]a_{ij} + \\ +4p(i)(i+1)a_{i-2,j} + 4p(j)(i-1)a_{i+2,j=G_{ij}}. \\ i = 2,3\ldots n,\ \mathrm{j}= 2,3\ldots m, \quad (18)$$

где

$$G_{ij} = (i+1)[(j+1)g_{i-2,j-2} - \\ -2jg_{i-2,j} + (j-1)g_{i-2,j+2}] - \\ -2i\left[(j+1)g_{i,j-2} - 2jg_{i,j} + + + (j-1)g_{i,j+2}\right] + \\ +(i-1)\left[(j+1)g_{i+2,j+2} - \\ -2jg_{i+2,j} + (j-1)g_{i+2,j+2}\right], \\ p(i) = i(i^2-1), p(j) = j(j^2-1).$$

Линейная алгебраическая система уравнений (18) для коэффициентов a_{ij} содержит (n-1)(m-1) – уравнений. Недостающие уравнения в соответствии с методом предварительного интегрирования должны быть заменены уравнениями, полученными из граничных условий [8]:

$$\frac{1}{2}a_{i0} + a_{i2} + a_{i4} + \cdots = 0,$$

$$a_{i1} + a_{i3} + a_{i5} + \cdots = 0, \quad i = 0,1\ldots,n$$

$$\frac{1}{2}a_{0j} + a_{2j} + a_{4j} + \cdots = 0,$$

$$a_{1j} + a_{3j} + a_{5j} + \cdots = 0, \quad j = 2,3\ldots,m\ .$$

Основные уравнения (18) с граничными условиями (8) образуют систему (n+1)(m+1) линейных алгебраических уравнений для определения всех (n+1)(m+1) коэффициентов a_{ij}.

Эту систему удобно записать в матричном виде:

$$AX = B, \quad (19)$$

где A – квадратная матрица порядка

$$NxN, N = (n+1)(m+1),$$

$$X = (X_0, X_1, \ldots X_n) -$$

вектор неизвестных коэффициентов

$$X_i = (a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in}),$$

$B = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ – вектор правых частей с компонентами

$$B_i = (G_{i0}, G_{i1}, \ldots, G_{in}).$$

Матрица A в системе (9) – сильно разрежённая, т.е. содержит очень много нулевых элементов. Из таблицы видно изменение основных параметров, характеризующих задачу (19) с ростом *n* и *m*, где *N*1 = *n*+1, *M*1 = *m*+1. Для решения матричного уравнения (19) применяется численный алгоритм. В качестве примера приводятся два вида функций:

$$\psi_1(x,y) = (1-x^2)(1-y^2) \text{ и}$$

$$\psi_2(x,y) = xy\cdot\psi_1(x,y).$$

Положим *n* = *m* = 3. Результаты исследований показывают, что в рассмотренных случаях решение найдено с машинной точностью. Для оценки времени счета система (19) решена дополнительно стандартным методом Краута, не использующим разрежённости матрицы A. в таблице приведено время расчёта коэффициентов a_{ij} для функции.

	$\psi_1(x,y)$	$\psi_2(x,y)$
Спектральный метод	0,125 c	0,094 c
Метод Краута	3,391 c	4,078 c

Видно, что метод Краута требует почти в 40 раз больше времени, т.е. выигрыш во времени счета из-за разрежённости матрицы уже весьма значителен и, естественно, будет увеличиваться с ростом m и n.

5. Заключение

Уравнения Навье-Стокса представлены в виде системы вихрь-функция тока, а также показано, что данная система является уравнениями в частных производных смешанного типа, одно из которых - параболическое. Для решения уравнения Пуассона применяется дискретный вариант метода предварительного интегрирования. Приближенное решение ищется в виде двойного ряда по полиномам Чебышева первого рода. Частные производные по переменным x и y тоже аппроксимируются с двойными рядами по этим полиномам. Полученное уравнение после четырехкратного интегрирования и с учетом соответствующих краевых условий записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей. Показано, что применение специальных алгоритмов для разреженных матриц приводит к существенной экономии памяти и времени компьютера.

Литература

[1] *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. – 616 с.

[2] *Zang T.A., Wong V.S., Hussaini M.V.* Spectral multigrid methods of elliptic equations. J. Comp. Phys: 1982. – V 48. № 3. – Pp. 485-501.

[3] *Нармурадов Ч.Б.* О сравнении итерационных схем для численного решения разностных аналогов повышенной точности задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Числ. мет. мех. спл. сред. – 1979. – Т. 10, № 6. – С. 97-104.

[4] *Evans D.I. Murphy C.P.* The solution of biharmonic equation in a rectangular region by Chebyshev series. Comput. Meth. Appl. Mech. And Eng. – 1981. – V.27. – Pp. 81-99.

[5] *Fox L., Parker I.B.* Chebyshev polynomials in numerical analysis. London. Oxford uneversity press. - 1968. – 205 p.

[6] *Соловьев А.С., Нармурадов Ч.Б.* Об одном эффективном прямом методе решения уравнения Пуассона / Препринт Инс. теор. и прикл. мех. СОРАН. – Новосибирск, 1983. - № 9. – 18 с.

[7] *Тьюарсон Р.* Разрежённые матрицы. – М.: Мир. – 1977. – 189 с.

[8] *Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б.* Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. - Ташкент: Фан ва технология, 2011. - 211 с.