УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

[1]***Норалиев Н. Х.***, [2]***Кудаева Ф. Х.***

[1]Кафедра "Информационно-коммуникационные технолологии"Ташкентского государственного аграрного университета, Узбекистан, Ташкентский обл., Кибрайский р-н, ул. Университетская, 2;

[2]Кафедра Прикладной математики и информатики Кабардино-Болкарского государственного университета, ул. Чернышевского, 173, Нальчик, Кабардино-Балкарская Респ., Россия, 360004

Методам расчета оболочечных конструкций из композитных материалов и исследованию концентрии напряжений около отверстий посвящено достаточно болшое число работ. Однако большинство исследований выполнено в рамках классической гипотезы Кирхгофа-Лява, не учитывающей межслоевые и поперечные сдвиги, характерные для композитных материалов.

В рамках усовершенствованной теории типа Тимошенко предлагается применение метода конечных элементов для решения задач ортотропных оболочек из композитных материалов, ослабленных несколькими отверстиями.

Разработан численный алгоритм по методу конечных элементов и на ЭВМ реализован пакет прикладных программ, позволяющий решать задачи концентрации напряжений возле двух отверстий в оболочках из композитных материалов. Были изучены параметры и их влияние на концентрацию напряжений около двух внутренних круговых отверстий для ортотропных сферических оболочек. Приведены конкретные результаты для случаев больших и малых отверстий с учетом жесткости подкрепляющих элементов. Данный пакет прикладных программ может быть применен к расчету элементов оболочечных конструкций из ортотропных композитных материалов, ослабленных несколькими отверстиями.

Ключевые слова: оболочка, композитные материалы, давление, теория Тимошенко, напряжение, концентрация.

Цитирование: *Норалиев Н. Х., Кудаева Ф. Х.* Напряженно-деформированное состояние ортотропной сферической оболочки, ослабленной двумя круговыми отверстиями // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 4(16). — С. 25–32.

1 Введение

Методам расчета оболочечных конструкций из композитных материалов и исследованию концентрии напряженний около отверстий посвящено достаточно большое число работ. Однако большинство исследований выполнено в рамках классической гипотезы Кирхгофа-Лява, не учитывающей межслоевые и поперечные сдвиги, характерные для композитных материалов.

В данной работе исследуется распределение напряжений около двух неподкрепленных круговых отверстий в ортотропной сферической оболочке из композитного материала. Используя уточненную теорию оболочек типа Тимошенко, будем учитывать влияния деформаций поперечных сдвигов для всего пакета оболочки в целом.

При этом композитный материал будем рассматривать как однородный с приведенными характеристиками.

Многосвязные оболочки из композитных материалов рассматривались немногими авторами. Основные результаты приведены в работах [3, 4, 6].

Для трансверсально-изотропной сферической оболочки с несколькими отверстиями построено решение К.И. Шнеренко в работе [14]. В работах А.Н. Гузя, К.И. Шнеренко [8, 15] исследовано напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной оболочки с двумя круговыми отверстиями с учетом сдвиговой жесткости.

Как следует из вышеприведенного обзора работ, в настоящее время исследование напряженно-деформированное состояния оболочек из композитных материалов с близко расположенными отверстиями проведено недостаточна.

2 Основная часть

Рассмотрим ортотропную сферическую оболочку радиуса R, толшины h, ослабленную двумя круговыми отверстиями радиусов v_0, нагруженную внутренним давлением интенсивности.

Под действием поверхностной нагрузки в оболочке без отверстия (вдали от отверстия) возникает основное напряженное состояние, которое можно описать уравнениями безмоментной теории и в дальнейшем полагать известным. Возмущенное напряженное состояние в области отверстий описывается однородными уравнениями пологих оболочек [1, 2]. В силу линейности задачи искомое напряженное состояние представляется в виде суммы основного и дополнительного, вызванного наличием отверстий. В срединной поверхности оболочки выбираем ортогональную криволинейную систему координат (x_1, x_2); третья координата x_3 отчитывается в направлении внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

Будем исходить из вариационного уравнения [2]

$$\begin{gathered}\iint \dot{\Omega}\left(T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_{12} + S_{12}\delta\varepsilon_{12}G_1\delta\aleph_1 + G_2\delta\aleph_2 + 2H_{12}\delta\aleph_{12} + Q_1\delta\varepsilon_{13}Q_2\delta\varepsilon_{23}\right)\,d\Omega + \\ + \int\left[T^0_\rho\delta u_\rho + s^0_{\rho 0}\rho u_0 + G^0_\rho\delta\gamma_a + H^0_{\rho\theta}\delta_{\gamma\theta} + Q^0_\rho\delta\omega\right]d\Gamma = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$; $\Gamma_{1,}\Gamma_2$ – контуры отверстий; Ω – область, граница которой достаточно удалена от контуров отверстий, и на ней выполнены условия затухания; $T_1, \ldots, Q_2$ – компоненты возмущенного напряженного состояния; $T^0_\rho,\ \ldots, Q^0_\rho$ – компоненты основного напряженного состояния.

Геометрические соотношения между компонентами деформаций и обобщенными перемещениями имеют вид [3]

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial} + \frac{\omega}{R};\quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\omega}{R};\quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial u_y}{\partial};\\ \varepsilon_{13} = \gamma + \frac{\partial\omega}{\partial};\quad \varepsilon_{23} = \gamma_y + \frac{\partial\omega}{\partial y};\ \aleph_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial};\ \aleph_1\frac{\partial\gamma}{\partial};\\ \aleph_2 = \frac{\partial\gamma_y}{\partial y};\quad 2\aleph_{12} = \frac{\partial\gamma_y}{\partial} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\end{gathered} \tag{2}$$

Соотношения упругости для ортотропной оболочки запишутся в виде [3, 4]

$$\begin{gathered}T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2; \quad T_2 = B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2; \quad s_{12} = B_{33}\varepsilon_{12}; \quad G_1 = D_{11}\aleph_1 + D_{12}\aleph_2 \\ G_2 = D_{12}\aleph_1 + D_{22}\aleph_2; \quad H_{12} = D_{13}2\aleph_{12}; \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}; \quad Q_2 = K_2\varepsilon_{33},\end{gathered} \tag{3}$$

где $B_{ij} = C_{ijh,}\ D_{ij} = h^{3/}12C_{ij}, \quad i, j = 1, 3;$

$$G_{33} = G_{12}, \quad C_{22} = \frac{E_2}{(1 - v_1 v_2)}, \quad C_{12} = E_1 v_2 / (1 - v_1 v_2),$$

$$C_{13} = C_{23} = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = 5/6.$$

Предполагаем, что граница области Ω удалена от отверстий не менее чем на два-три диаметра.

Рассмотрим случай, когда одна из осей анизотропии совпадает с направлением оси x_1, проходящей через линию центров отверстий. В силу симметрии задачи ограничимся рассмотрением только четверти области $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$, задав на осях симметрии граничные условия:

$$\begin{gathered}u = \gamma = S_y = H_y = Q = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \\ u_y = \gamma_y = S_y = H_y = Q = 0 \ \text{ при } \ y = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Задачу решаем при помощи метода конечных элементов. В качестве конечного элемента выбираем четырехугольные изопараметрические элементы.

Введем в каждом элементе локальную координатную систему (α, β), которая удовлетворяет условиям [5]

$$-1 \leqslant |\alpha| \leqslant 1, -1 \leqslant |\beta| \leqslant 1. \tag{5}$$

В изопараметрическом квадратичном элементе функции формы выбираются в виде [7]

$$\begin{gathered}\varphi_i = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_i)(1 + \beta\beta_i)(\alpha\alpha_i + \beta\beta_i - 1)\,(i = 1, 3, 5, 7), \\ \varphi_i = \frac{1}{2}\left(1 - \alpha^2\right)(1 + \beta\beta_i)\,(i = 4, 8),\end{gathered} \tag{6}$$

где α_i ,β_i – координаты i-го узла элемента в локальной системе координат.

Искомые перемещения для каждого узла конечного элемента определяются в виде [6]

$$u_x = \sum_{i=1}^{8} u_x^i \varphi_i, \ldots, \gamma_y = \sum_{i=1}^{8} \gamma_y^i \varphi_i, \tag{7}$$

где u^i,...,γ_y^i– искомые значения перемещений в i-м узле элемента.

Реализуя вариационное уравнение (1) с учетом формул (3), (6) и численно интегрируя с использованием квадратурных формул Гаусса, получаем матрицу жесткости для каждого элемента. Для систематического применения этого метода сведем интегрирование на каждом элементе к вычислению интеграла на элементе, называемом стандартным элементом, который всегда будет одним и тем же. Координатные функции и коэффициенты, приведенные в формуле, определяются один раз и используются для всех элементов. Далее, суммируя по всем элементам и собирая коэффициенты при одинаковых вариациях, приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} \left(A_{ij}u_{\text{x}}^i + B_{ij}u_{\text{y}}^i + C_{ij}\omega^i + D_{ij}\gamma_{\text{x}}^i + E_{ij}\gamma_{\text{x}}^i\right) = F_i. \tag{8}$$

Здесь N – число узлов конечных элементов; $u_{\text{x}}^i, \ldots, \gamma_{\text{x}}^i$ – искомые значения перемещений в i-м узле области. Величины $A_{ij}, \ldots, E_{ij}$ определяют матрицу жесткости каждого элемента.

Матрица симметрична, положительно определена, имеет ленточную структуру, ширина которой зависит от способа нумерации узлов. При нагрузке оболочки внутренним давлением предполагается, что отверстие закрыто крышкой, передающей на контур лишь действии перерезывающей силы.

Граничные условия в этом случае примут вид [2]

$$T_p = -\frac{pR}{2}; \quad Q_p = -\frac{pr_0}{2}; \; G_p = S_{p\theta} = H_{p\theta} = 0. \tag{9}$$

Разработан численный алгоритм по методу конечных элементов, который реализован на ЭВМ в виде пакета прикладных программ, позволяющий решать задачи концентрации напряжений возле двух отверстий в оболочках из композитных материалов. В качества примера проводились вычисления ортотропной оболочки с такими физико-геометрическими параметрами:

$$\frac{r_0}{R} = 0,1; \quad h/r_0 = 0,1; \quad v_1 = 0,30; \quad E_2/E_1 = 1/4; \quad \frac{G_{12}}{E_1} = 0,18; \quad G_{23}/E_1 = 0,06.$$

Ниже приведены результаты численного исследования напряженно-деформированного состояния оболочки с двумя отверстиями. Расстояние между отверстиями выбиралось таким, что отверстия не влияют друг на друга. В связи с этим возможно сравнение этих результатов с результатами аналитического решения для случая оболочки с одним отверстием. В табл. 1 приведены значения концентрации кольцевых усилий $K_m = 2T_\theta/p_0R + 1$ при различном количестве элементов, полученные по предлагаемой методике МКЭ, а также значения K_T, полученные с помощью аналитического решения [4].

3 Заключение

Из приведенных данных видно, что при увеличении количества элементов N результаты достаточно быстро сходятся к точному решению.

В табл. 2 даны распределения коэффициентов концентрации кольцевых усилий $K_T = 2T_\theta/p_0R + 1$ (верхняя строка) и максимальных по толщине оболочки кольцевых моментов $K_T^M = 12G_\theta/p_0Rh$ (нижняя строка) в точках контура отверстия в зависимости от изменения величины параметра сдвига G_{13}/E_1. Параметры оболочки выбирались такими же, как и в предыдущем случае.

Следовательно, по результатам анализа в рассмотренном примере учет деформации межслоевых сдвигов приводит к поправкам для максимальных значений коэффициентов концентрации кольцевых усилий до 6 %, а кольцевых моментов – до 47%.

Таблица 1

θ	G_{13}/E_1			
	1,0	0,1	0,01	0,005
0	3,14	3,17	3,25	3,32
	0,64	0,63	0,67	0,72
$\frac{\pi}{6}$	3,37	3,40	3,47	3,54
	0,68	0,69	0,71	0,74
$\frac{\pi}{3}$	4,38	4,44	4,49	4,52
	1,13	1,14	1,13	1,10
$\frac{\pi}{2}$	5,59	5,75	5,78	5,80
	1,39	1,57	1,52	1,44
$\frac{2\pi}{3}$	4,30	4,43	4,49	4,53
	0,32	0,29	0,25	0,25
$\frac{5\pi}{6}$	3,82	3,92	3,97	4,02
	0,36	0,37	0,46	0,53
π	5,47	5,61	5,65	5,68
	1,50	1,57	1,55	1,53

Таблица 2

N	8	22	40	78	128	Точное решение
n	185	435	745	1375	2185	
$K_{\text{Т}}$	3,301	2,957	2,888	2,842	2,832	2,827

В заключение отметим, что предлагаемая методика может быть применена к расчету элементов оболочечных конструкций из ортотропных композитных материалов, ослабленных несколькими отверстиями.

Литература

[1] *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек / Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

[2] *Гузь А.П., Луговой П.З., Шульга Н.А.* Конические оболочки, ослабленные отверстиями // Киев: Наукова думка, 1976. 162 с.

[3] *Гузь А.Н., Шнеренко К.И.* Концентрация напряжений около отверстий в оболочках, изготовленных из материала с малым сдвиговым модулем // Киев: Наукова думка, 1987. 253 с

[4] *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.М., Чехов Вик.М., Шнеренко К.И.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями // Киев: Наукова думка, 1980. 636 с.

[5] *Под общей ред. А.Н.Гузя* Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х томах / Киев: Наукова думка, 1982. 1983 с.

[6] *Гузь А.Н., Шнеренко К.И., Рындюк М.А.* Методика решения задач о напряженном состоянии оболочек из композитных материалов с отверстиями на ЕС ЭВМ // Киев: Наукова думка, 1982. 48 с.

[7] *Галлагер Р.* Метод конечных элементов / Пер. с англ. — Москва: Мир, 1984. 428 с.

[8] *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями /— Киев: Наукова думка, 1970. 323 с.

[9] *Шнеренко К.И., Нcorrect Норалиев Н.Х., Абдурашидов А.* О напряженном состоянии в цилиндрической оболочке, ослабленной двумя неравными отверстиями // Проблемы прочности, 1992. № 9. С. 34–38.

[10] *Шнеренко К.И., Нoралиев Н.Х.* Исследование взаимовлияния отверстий на концентрации напряжений в ортотропной цилиндрической оболочке // Моделирование прикладных задач. Сб.трудов СамГУ, 1991. С. 23–27.

[11] *Норалиев Н.Х., Шнеренко К.И.* Концентрации напряжений около двух неравных отверстий в ортотропной сферической оболочке из композитных материала // Докл. АН РУз, 1991. № 5. С. 20–22.

[12] *Норалиев Н.Х., Шнеренко К.И.* К расчету ортотропной цилиндрической оболочки, ослабленной двумя круговыми отверстиями // Тр. научн. конф. молодых ученых, 1989. С. 451–455.

[13] *Норалиев Н.Х. Индиаминов Р.Н.* Расчет ортотропной цилиндрической оболочки с двумя отверстиями методом конечных элементов // Прикладная механика, 1990. Т. 26. № 12. С. 105–108.

[14] *Шнеренко К. И., Годзула В. Ф.* Концентрация напряжений около отверстий в композитной оболочке с учетом неоднородности материала // Механика композитных материалов, 2003. Т. 39. № 4. С. 651–652.

[15] *Шнеренко К.И.* Напряжённое состояние композиционной цилиндрической панели, ослабленной круговым отверстием // Прикладная механика, 2006. Т. 42. № 5. С. 73–75.

Поступила в редакцию 13.06.2018

UDC 539.3

STRESSED DEFORMED CONDITION ORTHOTROPIC SPHERICAL SHELL, LOWERED BY TWO CIRCULAR HOLE

[1]***Noraliev N. Kh.***, [2]***Kudaeva F. H.***

[1]Tashkent State Agrarian University, Uzbekistan, Tashkent region, Kibray district Universitetskaya street, 2;

[2]Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 360004, Russian Federation, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, Chernyshevsky St., 173

Methods of calculating shell structures from composite materials and studying the concentration of strains near the holes are devoted to a rather large number of works. However, most of the research was carried out within the framework of the classical Kirchhoff-Love hypothesis, which does not take into account the interlayer and lateral shifts characteristic of composite materials.

Application of finite elements method to solve the problems on orthotropic shells of composites, weakened by several holes is reported within the improved theory of Timoshenko type.

A numerical algorithm has been developed using the finite element method and a software package has been implemented on a computer that makes it possible to solve problems of stress concentration near two apertures in shells of composite materials.

Shearing parameter has been studied for its influence on stress concentration near two circular holes internal pressure for orthotropic spherical shells. Specific results are presented for the cases of large and small holes, taking into account the rigidity of the reinforcing elements. Thus, this software package can be applied to the calculation of the elements of shell structures from orthotropic composite materials weakened by several holes.

Keywords: composite materials, pressure, Tymoshenko's theory, tension, concentration.

Citation: Noraliev N. Kh., Kudaeva F. H. 2018. Stressed deformed condition orthotropic spherical shell, lowered by two circular hole. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(16): 25–32.

References

[1] Novozhilov V. V.. 1962. *Teoriya tonkikh obolochek.* [The theory of thin shells]. L.: Sudpromgiz. 431 p. (In Russian)

[2] Guz A. P., Lugovoi P. Z., Shulga N. A.. 1976. *Konicheskiye obolochki, oslablennyye otverstiyami.* [Conic shells weakened by holes]. Kiev: Naukova Dumka. 162 p. (In Russian)

[3] Guz A. N., Shnerenko K. I.. 1987. *Kontsentratsiya napryazheniy okolo otverstiy v obolochkakh, izgotovlennykh iz materiala s malym sdvigovym modulem.* [Concentration of stresses near openings in shells made of a material with a small shear modulus]. Kiev: Naukova Dumka. 253 p. (In Russian)

[4] Guz A. N., Chernyshenko I. S., Chekhov Val. M., Chekhov Vik. M., Shnerenko K. I. 1980. *Teoriya tonkikh obolochek, oslablennykh otverstiyami.* [The theory of thin shells weakened by holes]. Kiev: Naukova Dumka. 636 p. (In Russian)

[5] *Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruktsiy. V 3-kh tomakh (Pod obshchey red. A.N.Guzya).* [Mechanics of composite materials and structural elements. In 3 volumes (Under the general editorship of ANGuzya)]. Kiev: Naukova Dumka. 1982 – 1983. (In Russian)

[6] Guz A. N., Shnerenko K. I., Ryndyuk M. A. 1982. *Metodika resheniya zadach o napryazhennom sostoyanii obolochek iz kompozitnykh materialov s otverstiyami na YES EVM.* [Methods for solving problems on the stress state of shells made of composite materials with apertures on the EC computer]. Kiev: Naukova Dumka. 48 p. (In Russian)

[7] Gallagher R. 1984. *Metod konechnykh elementov. Per. s angl..* [Finite Element Method. Trans. from English]. Moscow: "Mir". 428 p. (In Russian)

[8] Guz A. N., Chernyshenko I. S., Shnerenko K. I.. 1970. *Sfericheskiye dnishcha, oslablennyye otverstiyami.* [Spherical bottoms, weakened by holes]. Kiev: Naukova Dumka. 323 p. (In Russian)

[9] Shnerenko K. I., Noraliev N. Kh., Abdurashidov A. 1992. O napryazhennom sostoyanii v tsilindricheskoy obolochke, oslablennoy dvumya neravnymi otverstiyami [On the stressed state in a cylindrical shell weakened by two unequal openings]. *Neftyanoe Khozyaystvo* [Problems of Strength] 9:34–38. (In Russian)

[10] Shnerenko K. I., Noraliyev N. Kh. 1991. Issledovaniye vzaimovliyaniya otverstiy na kontsentratsii napryazheniy v ortotropnoy tsilindricheskoy obolochke [Investigation of the mutual influence of holes on the stress concentration in an orthotropic cylindrical shell]. *Modelirovaniye prikladnykh zadach. Sb.trudov SamGU* [Modeling of applied problems. Sb.trudov of the SSU] P-p.: 23–27. (In Russian)

[11] Noraliev N. Kh., Shnerenko K. I. 1991. Kontsentratsii napryazheniy okolo dvukh neravnykh otverstiy v ortotropnoy sfericheskoy obolochke iz kompozitnykh materiala [Stress concentrations near two unequal holes in an orthotropic spherical shell of composite material]. *Dokl. AN RUz* [Dokl. AS RUz] 5:20–22. (In Russian)

[12] Noraliyev N. Kh., Shnerenko K. I. 1989. K raschetu ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki, oslablennoy dvumya krugovymi otverstiyami [To the calculation of an orthotropic cylindrical shell weakened by two circular holes]. *Tr. nauchn. konf. molodykh uchenykh* [Tr. scientific. Conf. Young Scientists] P-p.: 451–455. (In Russian)

[13] Noraliev N. Kh. Indiaminov R. N. 1990. Raschet ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki s dvumya otverstiyami metodom konechnykh elementov [Calculation of an orthotropic cylin-

drical shell with two holes by the finite element method]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics] Vol. 26. 12:105–108. (In Russian)

[14] Shnerenko K. I., Godzula V. F. 2003. Kontsentratsiya napryazheniy okolo otverstiy v kompozitnoy obolochke s uchetom neodnorodnosti materiala [Concentration of stresses near openings in a composite shell, taking into account the heterogeneity of the material]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite materials] Vol. 39. 4:651–652. (In Russian)

[15] Shnerenko K. I. 2006. Napryazhonnoye sostoyaniye kompozitsionnoy tsilindricheskoy paneli, oslablennoy krugovym otverstiyem [The Stress State of a Composite Cylindrical Panel Weakened by a Circular Hole]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics] Vol. 42. 5:73–75. (In Russian)

Received June 13, 2018