

УДК 539.4

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

**Бабажанов М. Р.**

с.н.с.-исследователь

Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий,  
тел.: +(99890) 961-68-90, e-mail: mum1975@mail.ru

**Худазаров Р.С.**

к.ф.-м.н., ст. преподаватель Ташкентского университета информационных технологий,  
тел.: +(99890) 604-82-73, e-mail: ravshan1@yandex.ru

Приводится новая математическая модель процесса упругих деформаций первоначально анизотропных материалов с учетом температуры. Решена численно термоупругая задача о трансверсально-изотропном параллелепипеде при постоянном и неравномерном полях температуры. Рассмотрены случаи, когда поверхность параллелепипеда свободна от нагрузок и когда закреплена по всем граням параллелепипеда. Также проанализировано влияние вариационно-разностного метода на погрешность результатов вокруг границы параллелепипеда.

**Ключевые слова:** математическая модель, термоупругость, анизотропность, трансверсально-изотропность, напряжение, деформация, перемещение.

## MATHEMATICAL MODELING OF THERMOELASTIC PROBLEMS FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC PARALLELEPIPED

Babajanov M.R., Khudazarov R. S.

In this paper, a new mathematical model of the process of elastic deformations of initially anisotropic materials with temperature is developed. The thermoelastic problem of the transversely isotropic parallelepiped is solved numerically for constant and non-uniform temperature fields. The cases when the surface of a parallelepiped is free from loads and when it is pinched along all faces of a parallelepiped are considered. The influence of the variational-difference method on the error of the results around the parallelepiped boundary is also analyzed.

**Keywords:** mathematical model, thermoelasticity, anisotropy, transversal-isotropy, stresses, deformation, displacement.

## ТРАНСВЕРСАЛЬ ИЗОТРОП ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНИНГ ТЕРМО ЭЛАСТИК МАСАЛАСИНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

Бабажанов М.Р., Худазаров Р.С.

Маколада температурани хисоблаган холда деформацияланиш жараёнини ифодаловчи янги математик модель қурилган. Трансверсаль изотроп параллелепипед учун температурани хисобга олган холда, доимий ва ўзгарувчи температуралар учун сонли натижалар олинган. Худди шунингдек вариацион – айирмалли усулнинг параллелепипед қирралари атрофида хатоликларга таъсири ўрганилган.

**Таянч иборалар:** математик модель, термо эластиклик, анизотроплик, трансверсал изотроплик, кучланиш, қўчиш.

### 1. Введение

Известно [1], что в линейной теории упругости анизотропных тел связь между тензором напряжений и деформацией имеет следующий вид и называется обобщенным законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где  $C_{ijkl}$  - симметричный тензор упругих постоянных,  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  - симметричные тензоры напряжений и деформаций, соответственно.

Тензор  $C_{ijkl}$  характеризует свойство анизотропного материала и в общем случае имеет  $3^4 = 81$  компоненту. Обычно количество упругих постоянных (независимых компонент) и их значения определяются из экспериментов, в зависимости от свойств симметрии рассматриваемого твердого тела. С учетом условий симметрии тензора

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

количество независимых постоянных уменьшится до 36. Кроме того, если учитывать условия симметрии

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

то количество упругих постоянных становится равным 21. Далее, если учитывать симметричность упругих свойств анизотропного тела относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, то количество упругих постоянных становится равным 9 и тело называется ортотропным материалом. При этом тензор принимает следующий вид:

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \end{pmatrix}.$$

Принимая обозначения, принятые в работе [2], соотношение Гука (1) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_6 \varepsilon_{11} + \lambda_1 \varepsilon_{22} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= \lambda_4 \varepsilon_{11} + \lambda_7 \varepsilon_{22} + \lambda_8 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_3 \varepsilon_{11} + \lambda_8 \varepsilon_{22} + \lambda_4 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2\lambda_2 \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= 2\lambda_5 \varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2\lambda_9 \varepsilon_{23}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_{2211}, \\ \lambda_4 &= C_{3333}, \\ \lambda_7 &= C_{2222}, \\ \lambda_2 &= C_{1212}, \quad \lambda_3 = C_{1133}, \\ \lambda_5 &= C_{1313}, \quad \lambda_6 = C_{1111}, \\ \lambda_8 &= C_{2233}, \quad \lambda_9 = C_{2323}. \end{aligned}$$

Анизотропный материал называется трансверсально изотропным, если его упругие свойства симметричны относительно вращений вокруг одной оси и плоскости, содержащей эту ось. Если за осью симметрии вращения принимать ось  $X_3$ , то из условий симметрии находим

$$\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_1 + 2\lambda_2, \quad \lambda_8 = \lambda_3, \quad \lambda_9 = \lambda_5.$$

С учетом этих условий количество независимых постоянных для трансверсально изотропного материала становится равным пяти:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_{2211}, \quad \lambda_2 = C_{1212}, \quad \lambda_3 = C_{1133}, \\ \lambda_4 &= C_{3333}, \quad \lambda_5 = C_{1313}. \end{aligned}$$

Тогда закон Гука для трансверсально изотропных материалов принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda_1 + 2\lambda_2)\varepsilon_{11} + \lambda_4 \varepsilon_{22} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= \lambda_1 \varepsilon_{11} + (\lambda_1 + 2\lambda_2)\varepsilon_{22} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_3 \varepsilon_{11} + \lambda_3 \varepsilon_{22} + \lambda_4 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2\lambda_2 \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= 2\lambda_5 \varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2\lambda_5 \varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае изотропного тела, т.е. когда свойства твердого тела одинаковы во всех точках материала, количество независимых постоянных равно двум:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_5 = \lambda_2 = \mu, \\ \lambda_4 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda + 2\mu. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (3) из (2) следует известный закон Гука для изотропных материалов:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda, \mu$  - упругие постоянные Ламе.

Согласно свойству симметрии материала, характеризующего определенный класс анизотропии, можно построить некоторый базис и на его основе сконструировать различные тензоры, инвариантные относительно заданной группы преобразований [3]. Например, тензорным базисом изотропии является единичный тензор  $\delta_{ij}$ . Тогда изотропный тензор четвертого ранга принимает вид

$$C_{ijke} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (5)$$

В качестве базисных тензоров для трансверсально изотропного материала может быть выбран в одном из следующих видов [3]:  $\delta_{ij}, \delta_{i3}, \delta_{3j}$  или

$$\gamma_{ij} \equiv \delta_{i1} \delta_{1j} + \delta_{i2} \delta_{2j}, \quad \delta_{i3} \delta_{3j}.$$

Тогда трансверсально изотропный тензор четвертого ранга принимает вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda_1 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \lambda_2 (\gamma_{ik} \gamma_{jl} + \gamma_{jk} \gamma_{il}) + \\ &+ \lambda_3 (\gamma_{ij} \delta_{3k} \delta_{3l} + \gamma_{kl} \delta_{3i} \delta_{3j}) + \\ &+ \lambda_4 \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3k} \delta_{3l} + \\ &+ \lambda_5 (\gamma_{ik} \delta_{3j} \delta_{3l} + \gamma_{jk} \delta_{3i} \delta_{3l} + \gamma_{il} \delta_{3j} \delta_{3k} + \gamma_{jl} \delta_{3i} \delta_{3k}). \end{aligned}$$

Базисный тензор для ортотропного материала имеет следующий вид [4]:

$$\gamma_{ij}^{(\alpha)} \equiv \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

и тогда ортотропный тензор четвертого ранга принимает вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda_1 (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(1)}) + \\ &+ \lambda_2 (\gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(2)} + \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(2)} + \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(1)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(1)}) + \\ &+ \lambda_3 (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{3} \lambda_4 (\gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(3)}) + \\ &+ \lambda_5 (\gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(3)} + \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(1)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{3} \lambda_6 (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(1)} + \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{3} \lambda_7 (\gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(2)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(2)}) + \end{aligned}$$

$$+\lambda_8(\gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(2)}) + \lambda_9(\gamma_{ik}^{(2)}\gamma_{jl}^{(3)} + \gamma_{il}^{(2)}\gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{ik}^{(3)}\gamma_{jl}^{(2)} + \gamma_{il}^{(3)}\gamma_{jk}^{(2)}).$$

Подставляя (5) в (1), находим другую форму записи закона Гука для изотропных тел (4):

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{kk}. \quad (6)$$

Используя разложение тензора напряжений и деформаций на девиаторные и шаровые части:

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + S_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\theta}{3} \delta_{ij} + e_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{kk},$$

соотношение (6) представим в виде

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij},$$

$$\sigma = K\theta, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

В последние годы все более широко используются волокнистые и слоистые композиционные материалы в таких областях, как авиастроение, космонавтика, ядерная промышленность, машиностроение, строительство и др. Вследствие сильной неоднородности при математическом моделировании композиционных материалов возникают трудности, связанные с введением разрывных функций для описания различных свойств исследуемого композита. Поэтому обычно при исследовании композиционных материалов на основе какого-либо метода «осреднения» композит заменяется однородным и анизотропным материалом. Как известно, при осреднении волокнистые и слоистые композиты могут быть рассмотрены как трансверсально-изотропные либо ортотропные материалы.

Известно, что процесс линейного деформирования твёрдых тел с учетом температуры описывается соотношением термоупругости Дюгамеля-Неймана [5, 6]. Вопросам температурных напряжений и теплопроводности посвящены работы [7-14]. Решение различных термоупругих задач приведено в [15-24].

В зависимости от условий применения и места использования композиционные материалы могут быть смоделированы с предварительно заданными механическими, термическими и другими свойствами.

Исследование процесса упругих деформаций первоначально анизотропных материалов с учетом температуры и расчет конструкций и их элементов под действием внешних механических и тепловых воздействий являются актуальными задачами механики деформируемого твёрдого тела.

Анализируя существующие работы, приходим к выводу, что моделирование процесса термоупругого деформирования трансверсально-изотропных тел и решение термоупругих задач по расчету конструкций и их элементов являются важными проблемами и требуют дальнейших исследований.

В этой статье решены термоупругие задачи для трансверсально-изотропного параллелепипеда. Аналогичная задача для изотропного

параллелепипеда решена в работе [15]. Исследовано влияние анизотропии на распределение напряжений.

## 2. Постановка задачи

Теперь переходим к рассмотрению термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропных тел, которая состоит из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (7)$$

закона Гука с учетом гипотезы Дюгамеля - Неймана [5, 6]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^T, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{kl}^T = \varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T$ ,  $\alpha_{kl}$  – тензор теплового расширения для трансверсально-изотропных материалов;  $T$  – температура; соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9)$$

и краевых условий (в общем случае)

$$u_i \Big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i^0. \quad (11)$$

В соотношении (8) тензор  $C_{ijkl}$  в рассматриваемом случае зависит от пяти упругих постоянных –  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ :

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_2 & & & \\ \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_4 & \lambda_2 & & & \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_3 & & & \\ & & & 2\lambda_4 & & \\ & & & & 2\lambda_5 & \\ & & & & & 2\lambda_5 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В случае мелкозернистого графита упругие постоянные имеют следующие значения:

$$\lambda * 10^5 \frac{кг}{см^2} \quad [16]:$$

$$\lambda_1 = 0.21, \quad \lambda_2 = 0.19, \quad \lambda_3 = 5.35, \quad \lambda_4 = 2.735, \quad \lambda_5 = 2.39. \quad (12^1)$$

Заметим, что нами рассматривается несвязанная задача, т.е. уравнение теплопроводности решается отдельно, и его решение  $T$  считается известным и входит в соотношение (8).

Для более детального изучения температурной задачи запишем соотношение (8) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda_1 + 2\lambda_4)\varepsilon_{11} + \lambda_1\varepsilon_{22} + \lambda_2\varepsilon_{33} - K_1 T, \\ \sigma_{22} &= \lambda_1\varepsilon_{11} + (\lambda_1 + 2\lambda_4)\varepsilon_{22} + \lambda_2\varepsilon_{33} - K_2 T, \\ \sigma_{33} &= \lambda_2\varepsilon_{11} + \lambda_2\varepsilon_{22} + \lambda_3\varepsilon_{33} - K_3 T, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\sigma_{12} = 2\lambda_4\varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{13} = 2\lambda_5\varepsilon_{13},$$

$$\sigma_{23} = 2\lambda_5\varepsilon_{23},$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 2(\lambda_1 + \lambda_4)\alpha_1 + \lambda_2\alpha_3, \\
 K_2 &= K_1, \\
 K_3 &= 2\lambda_2\alpha_1 + \lambda_3\alpha_3.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в термоупругую задачу трансверсально-изотропных тел (7) - (11), запишем в перемещениях:

$$\sum_{j,k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l \partial x_j} + X_i^* = 0,
 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 x_i &\in V; \\
 u_i|_{\Sigma_1} &= u_i^0, \\
 x_i &\in \Sigma_1;
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\sum_{k,l,j=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i^*,
 \tag{17}$$

где

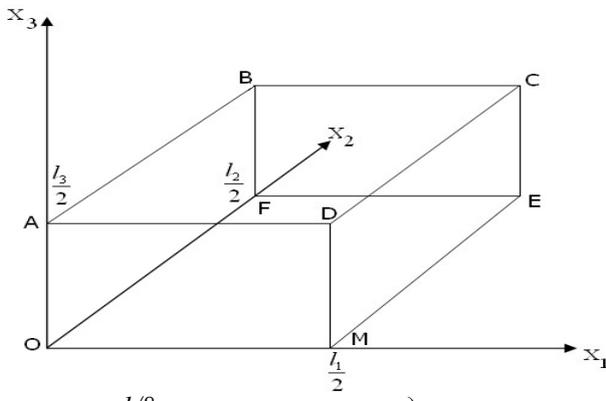
$$X_i^* = X_i - K_i \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta_{ij},
 \tag{18}$$

$$S_i^* = S_i + K_i T n_j \delta_{ij}.
 \tag{19}$$

Заметим, что в соотношениях (18), (19) по индексу  $i$  нет суммирования.

Если объемная  $X_i$  и поверхностная  $S_i$  силы равны нулю, то из уравнений (15) - (19) следует обычная задача теории упругости со следующими объемными и поверхностными силами:

$$S_i^* = K_i T n_j \delta_{ij}.$$



1/8 часть параллелепипеда

### 3. Метод решения

Термоупругая краевая задача для трансверсально-изотропных тел (15) - (17) эквивалентна следующей вариационной задаче [22]:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V \dot{X}_i \cdot \dot{u}_i dV - \int_{\Sigma_2} \dot{S}_i \dot{u}_i ds.$$

Из условия стационарности функционала  $L$ , его дискретного аналога  $-L^h$ , можно найти систему разностных уравнений

$$\frac{\partial L^h}{\partial \dot{u}_{ijk}} = 0, \quad \frac{\partial L^h}{\partial \dot{v}_{ijk}} = 0, \quad \frac{\partial L^h}{\partial \dot{w}_{ijk}} = 0,$$

которую записываем формально в следующем операторном виде:

$$P \vec{u} = \vec{\Phi},
 \tag{20}$$

где  $P$  - нелинейный дискретный оператор, соответствующий термопластической краевой задаче;  $\vec{\Phi}$  - функционал, зависящий от объемных и поверхностных сил, в том числе от температурных воздействий;  $\dot{u}_i \equiv \Delta u_i$  - приращение перемещений.

Для простоты сначала решена термоупругая задача для трансверсально-изотропного параллелепипеда при постоянной температуре  $T = 200^\circ\text{C}$ ,  $4000^\circ\text{C}$ . При этом поверхность параллелепипеда свободна от нагрузок.

Для простоты предположим: пусть  $T = 20^\circ\text{C}$  и рассмотрим задачу термоупругости для трансверсально-изотропного параллелепипеда с ребрами  $l_i = 1$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $h_i = \frac{l_i}{N_i}$ . С учетом

симметрии рассматривается 1/8 часть параллелепипеда и на плоскостях ABCD, BCEF и DCEM задаются соответствующие условия симметрии:

$$\begin{aligned}
 u_1 \left( \frac{l_1}{2}, x_2, x_3 \right) &= 0, & \sigma_{12} &= \sigma_{13} = 0, \\
 u_2 \left( x_1, \frac{l_2}{2}, x_3 \right) &= 0, & \sigma_{21} &= \sigma_{23} = 0, \\
 u_3 \left( x_1, x_2, \frac{l_3}{2} \right) &= 0, & \sigma_{31} &= \sigma_{32} = 0
 \end{aligned}$$

при тепловых постоянных  $\alpha_1 = 0.125 \cdot 10^{-4} \text{град}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 0.0625 \cdot 10^{-4} \text{град}^{-1}$ . С учетом соотношений (12<sup>1</sup>) и (14) из (19) находим

$$\begin{aligned}
 S_1^* &= K_1 T = 14,9625, \\
 S_2^* &= K_2 T = 14,9625, \\
 S_3^* &= K_3 T = 7,64.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Расчетные значения компонентов тензора «фиктивных» напряжений будут такими же, как в (12), только с обратными знаками, т.е.  $\sigma_{11}^{\phi} = -15$ ,  $\sigma_{22}^{\phi} = -15$ ,  $\sigma_{33}^{\phi} = -7.64$ , что указывает на правильность полученных численных результатов. При решении термоупругой задачи под фиктивным напряжением мы подразумеваем значения напряжений, вычисленные по закону Гука без учета температурного слагаемого. В табл. 1 приведены значения перемещений  $u, w$  и действительные значения компонентов тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$ , вычисленные по соотношению Дюгамеля-Неймана. Согласно краевым условиям о свободности поверхности параллелепипеда от нагрузок, при  $T = const$  значения напряжения должны быть нулевыми. Согласно табл. 1, они действительно близки к нулю.

Таблица 1

Значения перемещений и компонентов тензора напряжений для термоупругого трансверсально-изотропного параллелепипеда при постоянной температуре  $T = 20^0 C$

$I, J, K$	$U, V$	$W$	$\sigma_{11}, \sigma_{22}$	$\sigma_{33}$
111	0,125E+01	0,625E+00	0,592E-05	0,545E-05
212	0,937E+00	0,469E+00	0,655E-03	0,401E-03
313	0,625E+00	0,312E+00	0,129E-02	0,671E-03
414	0,312E+00	0,156E+00	0,175E-02	0,813E-03
515	0,000E+00	0,000E+00	0,206E-02	0,924E-03

Таблица 2

Численные результаты термоупругой задачи для трансверсально-изотропного параллелепипеда при других более высоких температурах, а именно при  $T = 400^0 C$

$I J K$	$U, V$	$W$	$\sigma_{11}, \sigma_{22}$	$\sigma_{33}$
111	0,250E+02	0,125E+02	0,822E-04	0,170E-03
212	0,187E+02	0,937E+01	0,130E-01	0,799E-02
313	0,125E+02	0,625E+01	0,259E-01	0,134E-01
414	0,625E+01	0,312E+01	0,349E-01	0,163E-01
515	0,000E+00	0,000E+00	0,412E-01	0,185E-01

При этом температурные слагаемые в законе Гука (13) имеют, соответственно, следующие значения:

$$K1T = 299.25, K2T = 299.25, K3T = 152.75. \quad (21^1)$$

Заметим, что согласно методу решения несвязанных задач эти значения играют роль объемных и поверхностных сил. Отметим, что расчетные значения «фиктивных» напряжений  $\sigma_{11}^{\phi} = \sigma_{22}^{\phi} = -299.25$  и  $\sigma_{33}^{\phi} = -152.75$  совпадают с приведенными в (21<sup>1</sup>) значениями. Реальные значения тензора напряжений незначительно отличаются от нуля, что можно объяснить применением вариационно-разностного метода (табл. 2), значения перемещений и компонентов тензора напряжений для термоупругого трансверсально-изотропного параллелепипеда при постоянной температуре  $T = 400^0 C$ .

Теперь рассмотрим трансверсально-изотропный параллелепипед, свободный от нагрузок на поверхности и подверженный действию стационарного температурного поля:

$$T = T_0 \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2} \sin \frac{\pi x_3}{l_3}, \quad T_0 = 20^0 C.$$

Тогда, согласно методу решения термоупругой задачи, решаемая задача сводится к решению уравнений теории упругости со следующими объемными силами:

$$X_1^* = -K_1 T_0 \frac{\pi}{l_1} \cos \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2} \sin \frac{\pi x_3}{l_3},$$

$$X_2^* = -K_2 T_0 \frac{\pi}{l_2} \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \cos \frac{\pi x_2}{l_2} \sin \frac{\pi x_3}{l_3},$$

$$X_3^* = -K_3 T_0 \frac{\pi}{l_3} \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2} \cos \frac{\pi x_3}{l_3}$$

и нулевыми поверхностными силами на гранях параллелепипеда:

$$S_1^* = K_1 T = 0, \quad S_2^* = 0, \quad S_3^* = 0, \quad \text{при } x_1 = 0, l_1;$$

$$S_1^* = 0, \quad S_2^* = K_2 T = 0, \quad S_3^* = 0, \quad \text{при } x_2 = 0, l_2;$$

$$S_1^* = 0, \quad S_2^* = 0, \quad S_3^* = K_3 T = 0, \quad \text{при } x_3 = 0, l_3.$$

Тогда тензор напряжений в центре трансверсально-изотропного параллелепипеда имеет следующие значения:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -5.79, \quad \sigma_{33} = -4.45.$$

Для сравнения приводим значения этих компонентов для изотропного параллелепипеда [15]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -3.51.$$

Значения тензора напряжений в центре параллелепипеда, найденные нами, для изотропного параллелепипеда имеют следующие значения:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -3.55.$$

На основе этих сравнений можно сделать вывод о правильности полученных результатов.

В табл. 3 приведены значения компонентов перемещений  $U, W$  и тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$  для трансверсально-изотропного термоупругого параллелепипеда.

Таблица 3

Значения компонентов вектора перемещений, тензора деформаций и напряжений для термоупругого трансверсально-изотропного параллелепипеда при неравномерном поле температуры (20)

IJK	$U, V$	$W$	$\varepsilon_{11}$	$\sigma_{11}, \sigma_{22}$	$\sigma_{33}$
111	-0,169	-0,204	-0,0462	-0,281	-0,279
115	-0,315	0,0	-0,0650	0,224	4,44
221	-0,163	-0,148	0,157	0,92	-0,0083
321	-0,131	-0,142	0,355	2,05	0,0363
415	-0,135	0,0	0,967	5,63	3,91
551	0,0	-0,166	0,786	4,63	0,262
555	0,0	0,0	1,54	-5,79	-4,45

#### 4. Обсуждение результатов

Заметим, что согласно краевым условиям поверхность параллелепипеда свободна от нагрузок. Но значения компонентов тензора напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{33}$  на гранях параллелепипеда не являются тождественно нулями. Это связано с заменой исходной дифференциальной задачи вариационной задачей. Чтобы исследовать это явление, ставим дополнительные граничные условия

о тривиальности перемещений на поверхности параллелепипеда, т.е. рассмотрим защемленный со всех сторон параллелепипед. Тогда вместо табл. 3 получаем табл. 4 и можем удостовериться по ней о том, что значения компонентов тензора напряжений на границе параллелепипеда действительно являются нулями или незначительно отличаются от нуля. А в центре параллелепипеда значения компонентов тензора напряжений по модулю увеличиваются.

Таблица 4

Значения компонентов вектора перемещений и тензора напряжений для защемленного со всех сторон термоупругого трансверсально-изотропного параллелепипеда при неравномерном поле температуры (20)

IJK	$U$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{33}$
111	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
115	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
221	0,000E+00	0,269E-01	0,757E+00
321	0,000E+00	0,386E-01	0,109E+01
415	0,000E+00	0,538E-01	0,487E+01
551	0,000E+00	0,878E-02	0,247E+00
555	0,000E+00	-0,146E+02	-0,742E+01

#### 5. Заключение

Решена численно термоупругая задача о трансверсально-изотропном параллелепипеде при постоянном и неравномерном полях температуры. Рассмотрены случаи, когда поверхность

параллелепипеда свободна от нагрузок и защемлена по всем граням параллелепипеда. Также проанализировано влияние вариационно-разностного метода на погрешность результатов вокруг границы параллелепипеда.

#### Литература

- [1] Победря Б.Е., Шешенин С.В. О методах упругих решений // МТТ. – 1987. - № 5. - С. 54-75.
- [2] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. - М.: МГУ, 1996. – 343 с.
- [3] Грин А.Е., Нахди П.М. Общая теория упруго-пластических сред // Механика. - 1965. - № 5 (3). – С. 111-142.
- [4] Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [5] Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
- [6] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: МГУ, 1984. – 336 с.
- [7] Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. - М.: Мир, 1964.
- [8] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964.
- [9] Коваленко А.Д. Тепловые напряженные в элементах конструкций. - 1973. - С. 43-47.

- [10] *Кудинов А.Н.* Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления в условиях нагрева // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – Киев: Наукова думка, 1966. – Вып. 6. – С. 213.
- [11] *Левин В.М.* О коэффициентах температурного расширения неоднородных материалов // *Изв. АН СССР. МТТ.* – М., 1967. – С. 88-94.
- [12] *Мелан Э.Ю., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1998.
- [13] *Михайлов М.Д.* Нестационарные температурные поля в оболочках. – М.: Энергия, 1967.
- [14] *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963.
- [15] *Цаплин А.И.* К решению пространственной задачи термоупругости вариационно-разностным методом // *Вопросы теории упругости и пластичности.* – Свердловск, 1978. – С. 65-72.
- [16] *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
- [17] *Филоненко-Бородич М.М.* Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // *ПММ.* – 1951. – Т. 15, № 2. – С. 37-48.
- [18] *Береснев А.Н.* Термоупругое напряжение в ортотропном параллелепипеде // *Ученые записки Кемеровского гос. пед. инс.* – Кемерово, 1970. – Вып. 23. – С. 95-112.
- [19] *Докторов Я.Я.* Итерационные схемы расщепления для несвязанных задач термоупругости в параллелепипедах // *Изв. АН СССР. МДТ.* – М., 1973. – № 2. – С. 185.
- [20] *Pell W.H.* Thermal deflections of anisotropic thin plates // *Q. Appl. Math* 4. 1946. – Pp. 275-290.
- [21] *Khaeir A.A.* Thermoelastic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells // *Int J. Solids and Structures.* – 1996. – Vol.33. – № 27. – Pp. 4007-4017.
- [22] *Chen W.Q., Ding H.J., Ling D.S.* Thermoelastic field of a transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2004. – Vol. 41. – Pp. 69-83.
- [23] *Киселев В.А.* Плоская задача теории упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 151 с.
- [24] *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.