

УДК 532.536

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ

Нармурадов Ч.Б.

д.ф.-м.н., заведующий кафедрой,
Термезский государственный университет,
тел.: (+99891) 577-93-16, e-mail: normchnor2016@umail.uz

Тойиров А.Х.

старший преподаватель,
Термезский государственный университет,
тел.: (+99897) 242-31-50, e-mail: akbarbek2014@umail.uz

Для математического моделирования нелинейных волновых систем все более широко применяются численные методы. В то же время их применение к решению эволюционных задач с большими градиентами, описываемых нестационарными уравнениями в частных производных наталкиваются на серьёзные трудности. Они связаны, главным образом, с наличием малого параметра при старшей производной и, как следствие, появлением в решении областей сильной пространственной неоднородности. Поэтому требования, предъявляемые к аппроксимационным свойствам численных методов, резко возрастают. Для решения указанных систем в основном применялись спектральные методы. В данной работе для численного моделирования нелинейных волновых систем применяется спектрально-сеточный метод. В спектрально-сеточном методе интервал интегрирования по пространственной переменной разбивается на сетку, в элементах сетки приближенное решение аппроксимируется с помощью линейной комбинации различного числа рядов по полиномам Чебышева первого рода. Среди ортогональных полиномов только полиномы Чебышева обладают минимаксным свойством, т.е. для этих полиномов максимальное отклонение от искомого решения минимально. Кроме того, для вычислительного применения полиномов Чебышева имеются удобные рекуррентные формулы. С помощью этих формул можно легко вычислить значения полиномов и их производных нужного порядка. При применении спектрально-сеточного метода во внутренних узлах введенной сетки налагаются требования непрерывности приближенного решения и его производных до $(m-1)$ -го порядка, где m – порядок старшей производной дифференциального уравнения. В результате аппроксимации основного дифференциального уравнения, начально-краевых условий и условий непрерывности спектрально-сеточным методом получается система алгебраических уравнений.

Спектрально-сеточный метод применен для численного моделирования начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и нелинейных эволюционных уравнений. Проведенные численные расчёты показывают высокую вычислительную эффективность спектрально-сеточного метода.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные волновые системы, спектрально-сеточный метод, эволюционные задачи, интервал интегрирования, сетка аппроксимация, полиномы Чебышева первого рода, алгебраическая система, приближенное решение, эффективность, численные результаты.

MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR WAVE SYSTEMS

Normurodov Ch.B., Toyirov A.Kh.

Numerical methods are increasingly used for the mathematical modeling of nonlinear wave systems. At the same time, their application to the solution of evolutionary problems with large gradients, described by non-stationary partial differential equations, is subject to serious difficulties. They are associated mainly with the presence of a small parameter with the oldest derivative and, as a consequence, the appearance in the solution of regions of strong spatial inhomogeneity. Therefore, the requirements imposed on the approximation property of numerical methods increase sharply. To solve these systems, spectral methods were mainly used. In this paper, the spectral-grid method is used to numerically simulate nonlinear wave systems. In the spectral-grid method, the interval of integration over the spatial variable is divided into a grid, in the grid elements the approximate solution is approximated with the help of a linear combination of a different number of series in Chebyshev polynomials of the first kind. Among the orthogonal polynomials, only Chebyshev polynomials have a minimax property, ie for these polynomials the maximum deviation from the required solution is minimal. In addition, for computational application of Chebyshev polynomials there are convenient recurrence formulas. With the help of these formulas it is easy to calculate the values of polynomials and their derivatives of the required order. When applying the spectral-grid method, the internal nodes of the introduced grid are subject to the continuity requirements of the approximate solution and its derivatives up to $(m-1)$ -th order, where m is the order of the highest derivative of the differential equation. As a result of approximation of the basic differential

equation, initial-boundary conditions and continuity conditions by a spectral-grid method, a system of algebraic equations is obtained.

The spectral - grid method is applied to numerical modeling of initial - boundary value problems for heat conduction equations and nonlinear evolution equations. The numerical calculations performed show the high combining efficiency of the spectral-grid method.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear wave systems, spectral-grid method, evolution problems, interval of integration, approximation grid, Chebyshev polynomials of the first kind, algebraic system, approximate solution, efficiency, numerical results.

CHIZIQLI BO'LMAGAN TO'LQINLI TIZIMLARNI MATEMATIK MODELASHTIRISH Normurodov Ch.B., Toyirov A.X.

Sonli metodlar chiziqli bo'lmagan to'lqinli tizimlarni matematik modelashtirishga tobora keng qo'llanilayapti. Ayni paytda, ularning nostatsionar tenglamalar bilan tavsiflanadigan, katta gradientga ega bo'lgan evolyutsion tenglamalarni yechishga tatbiqi jiddiy qiyinchiliklarga sabab bo'ladi. Ushbu qiyinchiliklar asosan yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjudligi tufayli, yechim sohasida kuchli fazoviy notekisliklar paydo bo'lishi bilan bog'liq. Shu sababli, sonli metodlarning approksimatsiyalash hususiyatlariga qo'yiladigan talab, keskin ortib ketadi. Qayd etilgan tizimlarni tadqiq etishda asosan spektral metodlar qo'llanib kelingan. Ushbu ishda chiziqli bo'lmagan to'lqinli tizimlarni sonli modelashtirishga spektral – to'r metodi qo'llaniladi. Spektral – to'r metodida fazoviy o'zgaruvchi bo'yicha integrallash intervalida to'r kiritiladi, to'rning har bir elementida taqribiy yechim birinchi turdagi Chebishev ko'phadlarining turli chiziqli kombinatsiyalari orqali approksimatsiyalanadi. Ortogonal ko'phadlar orasida faqat Chebishev ko'phadlarigina minimaks hususiyatiga ega, ya'ni, ular uchun izlanayotgan yechimdan maksimal cheklanish minimal bo'ladi. Bundan tashqari, Chebishev ko'phadlarining hisoblash nuqtai-nazaridan tadqiq uchun qulay rekurrent formulalar mavjud. Ushbu formulalar yordamida ko'phadlar va ularning kerakli tartibli hosilalarini osongina hisoblash mumkin. Spektral – to'r metodining qo'llanilishida kiritilgan to'rning ichki tugunlarida taqribiy yechim va uning $(m-1)$ – tartibligacha bo'lgan hosilalarining uzluksizligi talabi qo'yiladi, bu yerda m – differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila tartibi. Asosiy differensial tenglama, boshlang'ich – chegaraviy shartlar va uzluksizlik shartlarini spektral – to'r metodi bilan approksimatsiyalash natijasida algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi.

Spektral – to'r metodi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi va chiziqli bo'lmagan evolyutsion tenglamalarni boshlang'ich – chegaraviy shartlari bilan sonli modelashtirishga tadqiq etilgan. O'tkazilgan sonli hisoblashlar spektral – to'r metodining hisoblash samaradorligi yuqori ekanligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: matematik modelashtirish, chiziqli bo'lmagan to'lqinlar, spektral-to'r metodi, evolyutsion masalalar, integrallash intervali, to'r approksimatsiya, birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari, algebraik sistema, taqribiy yechim, samaradorlik, sonli natijalar.

1. Введение

Одним из наиболее характерных свойств волновых движений является то, что они продолжают существовать и после устранения причин, их вызывающих [1]. Волны обычно сохраняются в течение длительного времени и могут передавать возмущения на очень большие расстояния. В действительности, волны приобретают наиболее характерную для них форму именно после распространения на «большое» расстояние от области, в которой они «зародились». Одна из важных и трудных математических проблем связана с описанием поведения волн малой амплитуды, испытывающих слабую диссипацию на больших интервалах времени.

Среди нелинейных систем особое место занимают автоколебательные системы [2]. Автоколебательными системами являются часы, ламповые генераторы электромагнитных колебаний, паровые машины и двигатели внутреннего сгорания, словом, все реальные системы, которые способны совершать незатухающие колебания при отсутствии периодических воздействий извне.

Численные решения начально-краевых задач гидроаэродинамики с большими градиентами наталкиваются на серьезные трудности в связи с

отсутствием достаточного пространственного разрешения в областях сильной неоднородности. Эти трудности во многих случаях преодолеваются применением спектральных методов и их модификации, обладающих свойством высокоточной пространственной аппроксимации при увеличении числа базисных функций. В прикладных расчётах, однако, не всегда удается увеличить числа базисных функций до необходимой величины, поскольку рост порядка матриц в получаемой алгебраической системе существенно ограничен ресурсами компьютеров.

В данной работе для преодоления указанных трудностей применяется спектрально-сеточный метод [3-7]. В зависимости от вида начальных данных или предполагаемого вида решения в интервале интегрирования вводятся сетка. Во внутренних узлах сетки налагается требование непрерывности решения и его производных до $m-1$ порядка, где m – порядок дифференциального уравнения. На граничных узлах сетки ставятся соответствующие краевые условия для рассматриваемой задачи. Приближенное решение на элементах сетки представляется в виде конечных рядов по полиномам Чебышева первого рода. Полученная система уравнений с помощью линейных невырожденных преобразований сводятся

к двум автономным системам: линейной системе алгебраических уравнений и системе (в общем случае нелинейной) обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения первой системы используются стандартные методы, а для решения второй применяется явный алгоритм, развитый [16].

Поэтому применение спектрально-сеточного метода дает возможность, во-первых, распределить полиномы Чебышева по элементам с учетом поведения градиента решения и, во-вторых, привести к существенному уменьшению порядка матриц в возникающий алгебраической системы. В этом методе при заданном числе элементов сетки N для достижения требуемой точности расчётов необходимо правильно расположить узлы сетки и выбрать количество полиномов p_j на элементах сетки. Эти вопросы тесно связаны, поскольку сближая узлы сетки, можно уменьшать число полиномов на элементах и наоборот. В практических расчётах более удобно выбрать равномерную сетку, задавая разные количество полиномов p_j на каждом элементе сетки. Тогда количество необходимых полиномов зависит от относительной величины градиентов решения на том или ином элементе. Градиенты решения часто можно оценить исходя из асимптотического анализа. В задачах имеющих большие градиенты как известно [17], что вблизи стенки – в так называемом критическом слое-поведение решения определяется быстрым изменением вязких решений, вдали от стенки возмущения медленно затухают.

2. Постановка задачи

Одна из важных и трудных математических проблем связана с описанием поведения волн малой амплитуды, испытывающих слабую диссипацию на больших интервалах времени [1]. Эти ограничения не такие уже специальные, как может показаться на первый взгляд. Поскольку, как следует из наблюдений, волны действительно способны долго существовать вне источников, ограничения, связанные с предположением о малой диссипации и больших интервалах времени, являются вполне естественным. В газовой динамике, имеется слабая диссипация, характеризуемая безразмерным параметром Re^{-1} , где Re число Рейнольдса. В этом случае величина амплитуды волны ε мала, но конечна. В случаях, представляющий наибольший интерес, соответствующее нелинейное уравнение следует рассматривать на интервалах времени порядка ε^{-1} .

Изучаемый процесс описывается уравнением Бюргерса. Рассматривается следующая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - u \frac{\partial u}{\partial \eta}, a < \eta < b, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= 0, \\ u(b, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(\eta, 0) = u_0(\eta). \quad (3)$$

3. Спектрально-сеточный метод

Разобьём интервал интегрирования $[a, b]$ на M различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], [\eta_2, \eta_3], \dots, [\eta_{i-1}, \eta_i], \dots, [\eta_{M-1}, \eta_M],$$

где $\eta_0 = a$, $\eta_M = b$. Для представления приближенного решения в виде рядов по полиномам Чебышева каждый элемент $[\eta_{i-1}, \eta_i]$ интервала интегрирования $[a, b]$ отображаем на интервал $[-1, 1]$ с помощью следующей замены независимой переменной

$$\eta_i = \frac{m_i}{2} + \frac{l_i}{2} y, \quad (4)$$

где $m_i = \eta_i + \eta_{i-1}$, $l_i = \eta_i - \eta_{i-1}$ – длина i -го элемента сетки и $y \in [-1, 1]$. После этого преобразования задача (1) – (3) принимают вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{2}{l_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{2}{l_i} u_i \frac{\partial u_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5)$$

$$u_i(1) = u_{i+1}(-1), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (6)$$

$$\frac{1}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial y}(1) = \frac{1}{l_{i+1}} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y}(-1), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (7)$$

$$u_{01}(-1) = u_{0N}(1) = 0, \quad (8)$$

$$u_{0i}(y, 0) = u_0 \left(\frac{m_i}{2} + \frac{l_i}{2} y, 0 \right), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

где уравнения (6)–(7) – требования непрерывности приближенного решения и его первой производной во внутренних узлах сетки, уравнение (8) – вид начальных данных (начальные данные для последующего положения принципиального значения не имеют и поэтому не рассматривается).

Приближенное решение уравнений (5) – (8) будем искать в виде рядов по полиномам Чебышева первого рода $T_n(y)$ [8-15]:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= \sum_{n=0}^N a_n^j T_n(y), \\ T_n(y) &= \cos(n \cdot \arccos y) \end{aligned} \quad (10)$$

где N – количество полиномов, используемых для аппроксимации на j -ом элементе. Выберем на каждом из M элементов $N+1$ дискретную точку: $y_l = \cos(\pi l/N), l = 0, 1, \dots, N$ и запишем систему (5)–(8) и этих точках.

Для этого введем матричные обозначения следующим образом. Заменим в (5)–(7) с учетом (10) производные по y выражениями:

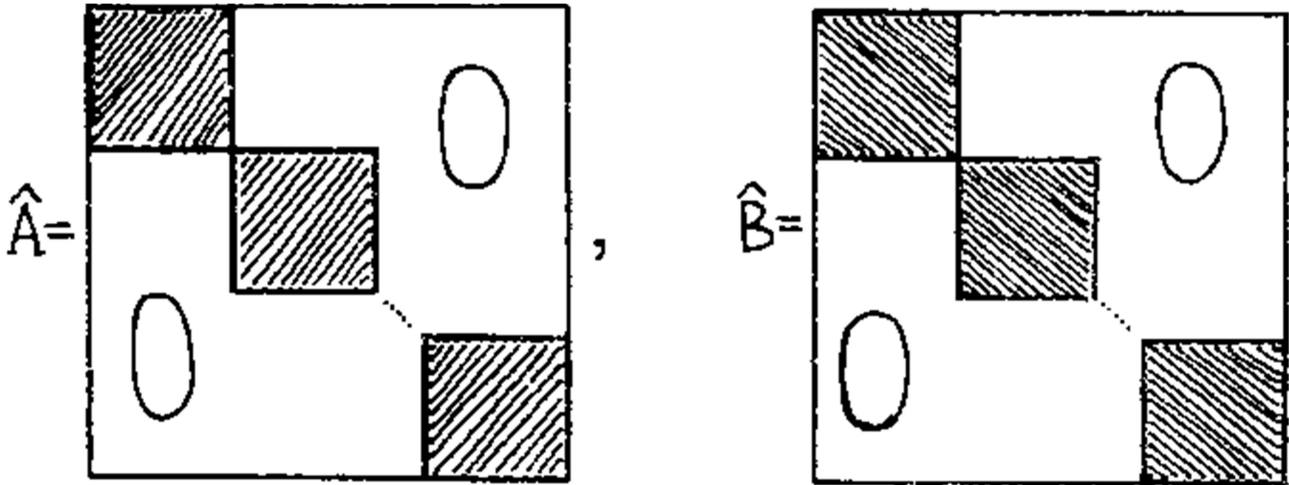
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \hat{B}v, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \hat{A}v, \quad (12)$$

где v – вектор длины $(N+1)M$ с компонентами:

$$v \equiv \{u_1(y_0) \dots u_1(y_N), u_2(y_0) \dots u_2(y_N), u_3(y_0) \dots, u_M(y_0) \dots u_M(y_N)\} \quad (13)$$

в \hat{A} и \hat{B} – квадратные матрицы размерности $((N+1)M) \times ((N+1)M)$, имеющие блочно–диагональную структуру:



Выведем формулы для коэффициентов матриц \hat{A} и \hat{B} .

Коэффициенты разложения a_m^j для функции $u_j(y_e)$ определяются обратным преобразованием [3]:

$$a_m^j = \frac{2}{NC_m} \sum_{l=0}^N u_j(y_l) T_m(y_l) \quad (14)$$

$m = 0, 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$

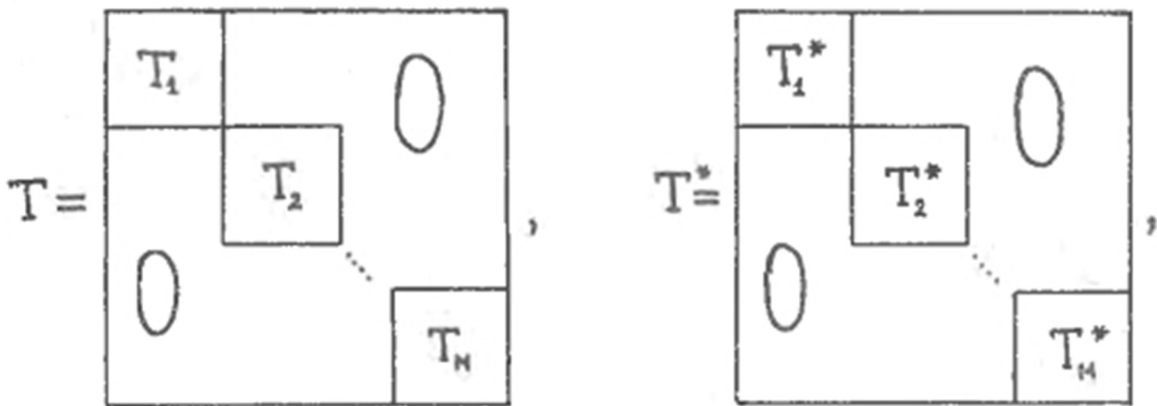
$C_0 = C_N = 2, C_m = 1, \text{ при } m \neq 0, N.$

Для удобства дальнейшего изложения запишем формулы (10) и (14) в матричном виде:

$$v = Ta, \quad (15)$$

$$a = T^* v, \quad (16)$$

где $a = \{a_0^1, a_1^1, \dots, a_N^1, a_0^2, a_1^2, \dots, a_N^2, \dots, a_0^M, a_1^M, \dots, a_N^M\}$,
 - вектор (см. (13)), T и T^* – блочно–диагональные матрицы размерности $((N+1)M) \times ((N+1)M)$:



$$T_j = \begin{pmatrix} T_0(y_0) & T_1(y_0) & \dots & T_N(y_0) \\ T_0(y_1) & T_1(y_1) & \dots & T_N(y_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(y_{N-1}) & T_1(y_{N-1}) & \dots & T_N(y_{N-1}) \\ T_0(y_N) & T_1(y_N) & \dots & T_N(y_N) \end{pmatrix}, \quad T_j^* = \begin{pmatrix} \frac{T_0(y_0)}{4} & \frac{T_0(y_1)}{2} & \dots & \frac{T_0(y_{N-1})}{2} & \frac{T_0(y_N)}{4} \\ \frac{T_1(y_0)}{2} & T_1(y_1) & \dots & T_1(y_{N-1}) & \frac{T_1(y_N)}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{T_{N-1}(y_0)}{2} & T_{N-1}(y_1) & \dots & T_{N-1}(y_{N-1}) & \frac{T_{N-1}(y_N)}{2} \\ \frac{T_N(y_0)}{2} & \frac{T_N(y_1)}{2} & \dots & \frac{T_N(y_{N-1})}{2} & \frac{T_N(y_N)}{4} \end{pmatrix}$$

В аналогичном виде в тех же дискретных точках y_l могут быть представлены первая и вторая пространственные производные:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Tb, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = Td, \tag{18}$$

причем, компоненты векторов b и d определяются через компоненты вектора a [1]

$$c_m b_m^j = 2 \sum_{\substack{P=m+1 \\ P \equiv m \pmod{2}}}^N P a_P^j, \quad m \geq 0, \quad j = 1, \dots, M \tag{19}$$

$$c_m d_m^j = 2 \sum_{\substack{P=m+2 \\ P \equiv m \pmod{2}}}^N P(P^2 - n^2) a_P^j, \quad m \geq 0, \quad j = 1, \dots, M \tag{20}$$

Запись $a \equiv b \pmod{2}$ означает, что $a - b$ делится на 2. Формулы (19) и (20) также запишем в матричном виде:

$$b = Ra, \tag{21}$$

$$d = Pa. \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) соответственно в (17) и (18) и учитывая (21), приходим к псевдоспектральной аппроксимации пространственных производных:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \hat{B}v, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \hat{A}v, \tag{24}$$

где через \hat{A} и \hat{B} обозначены следующие матричные произведения размерности $((N+1)M) \times ((N+1)M)$:

$$\hat{A} = TPT^*, \quad \hat{B} = TRT^*. \tag{25}$$

Введем также матрицы \tilde{A} и \tilde{B} :

$$\tilde{A} = \frac{1}{\mu} K^2 \hat{A}, \quad \tilde{B} = K\tilde{B}, \tag{26}$$

где K – диагональная матрица:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_1} & & & & \\ & \frac{1}{K_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{K_m} & \\ & & & & \frac{1}{K_M} \end{pmatrix}$$

Записывая дифференциальные уравнения (5) только во внутренних точках элементов ($l = 1, \dots, N-1$), условия (6) и (7) в граничных точках соседних элементов, а (8) в граничных точках интервала, приходим к следующей системе:

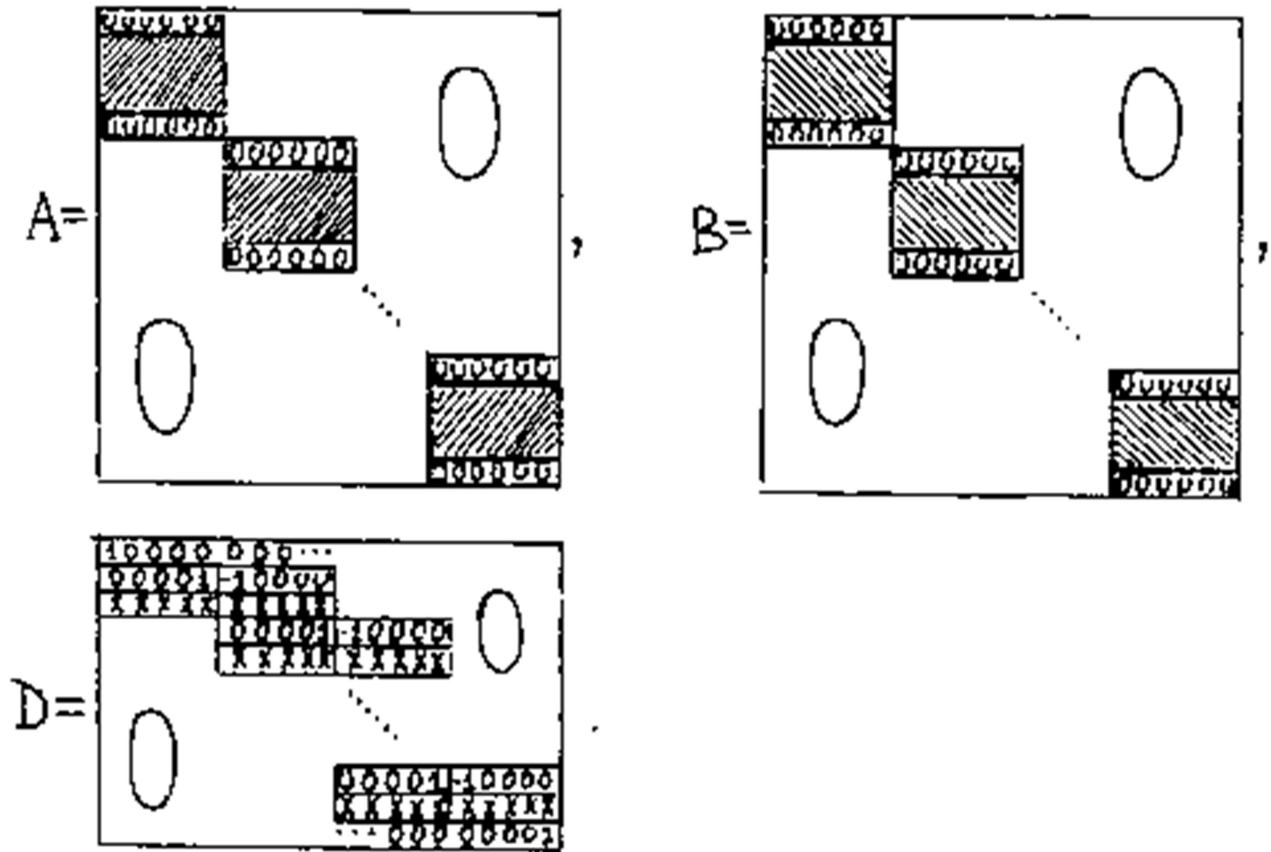
$$\frac{dS}{dt} = Av - v \cdot Bv, \tag{27}$$

$$Dv = 0. \tag{28}$$

Здесь точка означает покомпонентное произведение двух векторов, через S обозначен вектор длины $(N+1)M$:

$$S \equiv \{0, u_1(y_1) \dots u_1(y_{N-1}), 0, 0, u_2(y_1) \dots u_2(y_{N-1}), 0, 0, u_3(y_1) \dots, 0, u_M(y_1) \dots u_M(y_{N-1}), 0\}, \tag{29}$$

матрицы A, B размерности $((N+1)M) \times ((N+1)M)$ и матрица D размерности $2M \times ((N+1)M)$ имеют вид:



Коэффициенты каждого заштрихованного блока матриц A и B совпадают с соответствующими коэффициентами матриц \tilde{A} и \tilde{B} . Что касается матрицы D , то в первой и последней ее строке стоят коэффициенты условий (8), в оставшихся четных строках ($l = 2j, j = 2, \dots, M - 1$) - коэффициенты уравнений (6), а в нечетных ($l = 2j - 1, j = 2, \dots, M$) - коэффициенты уравнений (29) (соответствующие строки матрицы \tilde{B}).

Система (27)–(28) является "дифференциально-алгебраической" - она содержит $(N - 1)M$ обыкновенных дифференциальных уравнений (26) и $2M$ линейных алгебраических условий (28) с $(N + 1)M$ неизвестными. Покажем, что путем невырожденных линейных преобразований она может быть сведена к двум автономным системам уравнений: дифференциальной системе меньшего порядка $(N - 1)M$ только во внутренних точках интервала и алгебраической системе стандартного вида $Ax = b$ для оставшихся компонент решения (в граничных точках элементов).

Обозначим через X, Y, V_j и W_j комбинации переменных в условиях (27) и будем рассматривать их как новые зависимые переменные:

$$\begin{aligned}
 V_j &\equiv u_j(y_N) - u_{j+1}(y_1) = 0, & j = 1, \dots, M - 1 \\
 W_j &\equiv \frac{1}{K_j} \frac{\partial u_j}{\partial y}(y_N) - \frac{1}{K_{j+1}} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial y}(y_1) = 0, \\
 & & j = 1, \dots, M - 1 \\
 X &\equiv u_1(y_0) = 0, \\
 Y &\equiv u_N(y_N) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

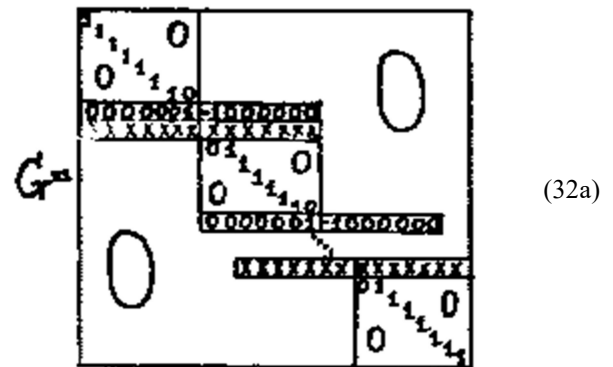
тогда вектор

$$w = \{X, u_1(y_1) \dots u_1(y_{N-1}), V_1, W_1, u_2(y_1) \dots u_2(y_{N-1}), V_2, W_2, \dots, V_{M-1}, W_{M-1}, u_M(y_1) \dots u_M(y_{N-1}), Y\}
 \tag{31}$$

совпадает с S из (30) и связан с v из (13) соотношением:

$$w = Gv.
 \tag{32}$$

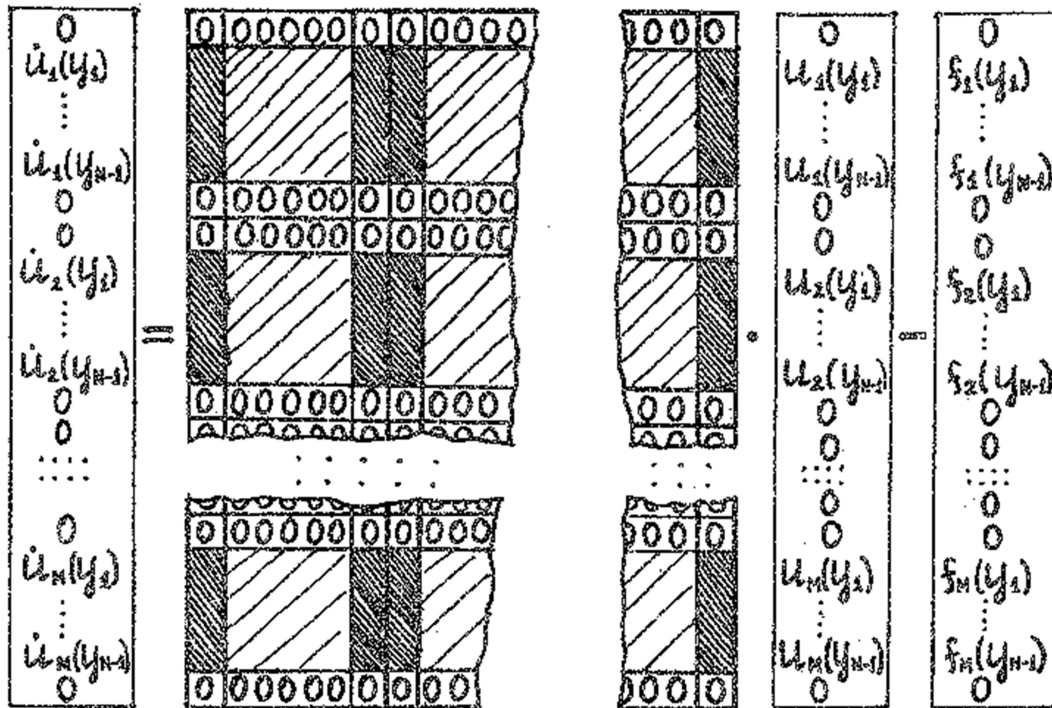
Здесь G - невырожденная матрица размерности $((N + 1)M) \times ((N + 1)M)$



в которой строки с номерами $j(N+1)$ ($j=1, \dots, M-1$) суть строки матрицы D с номерами $2j$ ($j=1, \dots, M-1$), а строки $j(N+1)+1$ ($j=1, \dots, M-1$) - ее строки с номерами $2j-1$ ($j=2, \dots, M$).

Введем также обозначения:

$$\hat{H} = AG^{-1}, \quad (33)$$



Таким образом, из (35a) видно, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (26) свелась к системе меньшей размерности, причем с невырожденной матрицей H (из матрицы \hat{H} исключаются все нулевые строки и все столбцы, элементы которых умножаются на соответствующие нулевые элементы вектора w ; несколько таких столбцов выделено на рис.(35a) штриховкой):

$$\frac{dr}{dt} = Hr - f, \quad (36)$$

Здесь размерность $H : (M(N-1)) \times (M(N-1))$,

а

$$r = \{u_1(y_1) \dots u_1(y_{N-1}), u_2(y_1) \dots u_2(y_{N-1}), \dots, u_M(y_1) \dots u_M(y_{N-1})\},$$

$$f = \{f_1(y_1) \dots f_1(y_{N-1}), f_2(y_1) \dots f_2(y_{N-1}), \dots, f_M(y_1) \dots f_M(y_{N-1})\}$$

- векторы длины $(M(N-1))$, причем, r вектор отличается от вектора v только отсутствием компонент с номерами $(j-1)N+1$ и jN , где $j=1, \dots, M$. Недостающие компоненты вектора v находятся путем решения линейной алгебраической системы (32).

Система уравнений (36) является эволюционной. Для ее численного решения в данной работе, как уже говорилось, применялся метод [16,17] Именно, для

$$\hat{f} = v \cdot Bv, \quad (34)$$

в которых (26) принимает вид:

$$\frac{dw}{dt} = \hat{H}w - \hat{f}, \quad (35)$$

или покомпонентно:

перехода на следующий временной слой использовалась явная схема вида:

$$r(t + \tau) = r(t) + RQr(t) + Rf(t),$$

$$R\phi(t) = \frac{\tau}{12} [23\phi(t) - 16\phi(t - \tau) + 5\phi(t - 2\tau)], \quad (37)$$

$$Q = \frac{12}{\tau} (e^{H\tau} - E) (23E - 16e^{-H\tau} + 5e^{-2H\tau})^{-1},$$

где матрица Q получена с помощью специальных преобразований системы (36) - см. [16], R - оператор схемы Адамса-Бэшфорта 3-го порядка, E - единичная матрица, τ - шаг интегрирования. Применение схемы (37) в сравнении с обычной схемой Адамса-Бэшфорта дает возможность существенно ослабить ограничения на τ , связанные с требованиями ее устойчивости.

Таким образом, последовательность вычислений следующая:

- 1) область интегрирования разбивается на некоторое число элементов M ;
- 2) одношаговым алгоритмом (например, методом Рунге-Кутты) находится решение на первых двух временных слоях: $t = \tau, t = 2\tau$;
- 3) осуществляется ряд невырожденных преобразований матрицы H с целью ослабления условия устойчивости;
- 4) по формуле (37) осуществляется переход на новый временной слой $t = \tau$;

5) компоненты вектора v в граничных точках элементов находятся из решения алгебраической системы (32).

4. Результаты расчётов

Построенный алгоритм был применен к расчетам одномерных начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и Бюргерса.

В случае уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{38}$$

проводилось сравнение с аналитическим решением по нормам ошибок: абсолютной:

$$\Delta = \max_j |u_r(\eta_j, t_\varphi) - u_\tau(\eta_j, t_\varphi)|, \tag{39}$$

и относительной:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{\max_j |u_r(\eta_j, t_\varphi)|}, \tag{40}$$

где $u_r(\eta, t_\varphi)$ и $u_\tau(\eta, t_\varphi)$ – соответственно численное и аналитическое решение в фиксированный момент t_φ . Начальные условия в момент $t=0$ выбирались в виде гауссова распределения, нормированного на 1. Точное аналитическое решение в этом случае имеет вид:

$$u_r(\eta, t) = \sqrt{\frac{t_0}{t+t_0}} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{4R(t+t_0)}\right], \tag{41}$$

$$R = \frac{1}{\mu}, \quad \eta \in]-\infty, \infty[.$$

Постоянная t_0 определяет полуширину начального распределения: чем меньше t_0 , тем она уже. Всюду в расчетах: $t_0 = 0.15$, $\mu = \pi \cdot 10^2$, $n = 32$, $\tau = 0.01$. Интервал интегрирования выбран $[-1, 1]$. При заданной полуширине начального распределения функция (41) в граничных точках равна нулю с точностью 10^{-12} . Поэтому уравнение (41) решалось при следующих граничных условиях:

$$u(\pm 1, t) = 0, \tag{42}$$

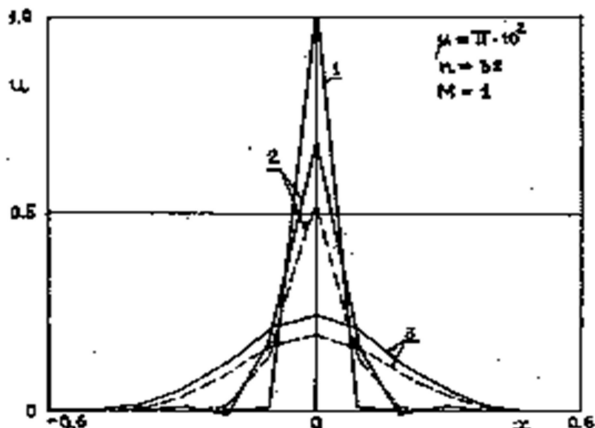


Рис.1

На рис.1 показана эволюция численного решения задачи (38), (42), найденного с использованием построенного метода в случае, когда область интегрирования не разбивалась на элементы ($M = 1$). Сплошные кривые 1, 2, 3 соответствуют численному решению в моменты времени $t = 0, 40\tau, 400\tau$. Пунктирные кривые 2, 3 соответствуют точному решению (41) в те же моменты времени. Видно, что при использовании полиномов Чебышева узлы на интервале расположены не рационально - они сгущаются к краям интервала, в то время как в области быстрого изменения решения находится всего лишь 14% узлов. В результате точность решения оказывается низкой: ε и Δ имеют порядок 10^{-1} (см. табл. 1).

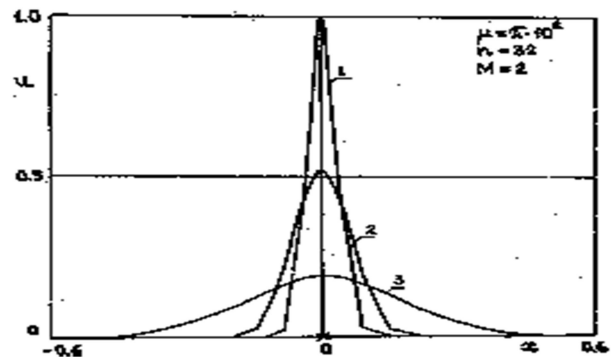


Рис.2

Рис. 2 показывает эволюцию численного решения той же задачи для случая, когда область интегрирования разбивалась на 2 элемента: $[-1, 0], [0, 1]$. Такое разбиение является более удачным – в область неоднородности попадает около 30% узлов сетки. Точность в этом случае на 2 порядка выше (см. табл. 2), поэтому сплошные кривые (численное решение) и пунктирные (точное решение) на рис. практически неразличимы.

Аналогичный эффект можно наблюдать и в случае нелинейных эволюционных уравнений. Ниже рассматривается начально-краевая задача для уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - u \frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{43}$$

$$u(\eta, 0) = -\sin \pi \eta, \tag{44}$$

$$u(\pm 1, t) = 0.$$

Аналитическое решение задачи (43) - (44) имеет вид отношения рядов из функций Бесселя [16]. При больших числах μ ($\mu \geq 10^2$) сравнение численного решения задачи (43)-(44) с аналитическим затруднено ввиду медленной сходимости рядов в аналитическом решении [16]. Поэтому точность вычислений оценивалась по порядку величины последних коэффициентов a_n^j в разложении (10) (порядок ошибки не превосходит указанной величины).

Таблица 1.

Результаты расчетов

t	0.01	0.1	0.4	2.0	4.2
Δ	$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$
ε	$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$3 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2.

Результаты расчетов

t	0.01	0.1	0.4	2.0	4.2
Δ	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
ε	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Конкретные вычисления были проведены при значениях параметров: $\mu = \pi \cdot 10^2, n = 64, \tau = 10^{-2} / 6\pi$. Результаты представлены на рис.3 и 4. На обоих рисунках кривые 1,2,3,4 показывают поведение численного решения, в момент времени $t = 0., 0.2, 0.5, 1.0$, а кривая 5 на рис.4 соответствует моменту $t = 2.0$. На рис.3 ($M = 1$) видно, что с ростом первой производной в точке $\eta = 0$ численное решение начинает осциллировать и при $t = 1.0$ амплитуда осцилляций вырастает настолько, что в

решении не остается ни одного верного знака. В случае разбиения области интегрирования на 2 элемента: $[-1, 0], [0, 1]$ (рис.4) амплитуда осцилляций при $t = 0.5$ существенно меньше - решение имеет 2 верных знака. Когда $t > 0.5$ осцилляции сглаживаются, точность решения вновь возрастает - к моменту $t = 2.0$, например, она достигает величины $\varepsilon \sim 10^{-4}$.

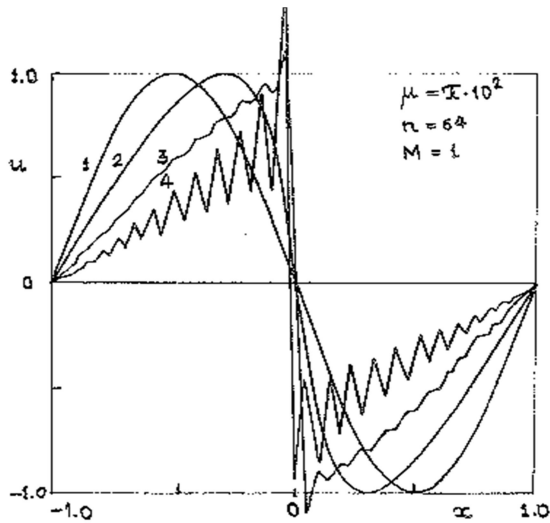


Рис.3

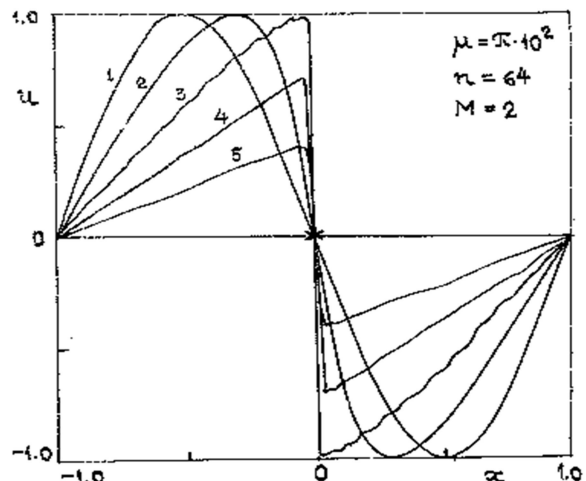


Рис.4

На рис.5 показана эволюция численного решения для случая, когда интервал интегрирования разбит на большее число элементов ($M=8$). Значения всех параметров те же, что и в предыдущих расчетах. Длины элементов соотносятся следующим образом: $K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = 8 : 4 : 2 : 1; K_5 = K_1, K_6 = K_3, K_7 = K_2, K_8 = K_1$. Видно, что при всех η за исключением узкой области вблизи $\eta = 0$, где амплитуда осцилляций пренебрежимо мала, осцилляции отсутствуют для всех значений t .

Результаты расчетов, таким образом, показывают, что за счет разбиения интервала интегрирования на элементы точность численного решения в области больших градиентов может быть существенно повышена.

Представляет также определенный интерес сравнение изложенного метода с методом, описанным в [16]. Как и в данной работе в [16] использована спектрально-сеточная аппроксимация пространственных производных, причем на элементах решение аппроксимировалось рядами по полиномам Чебышева. В табл. 3 приведена величина $\max \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|$, вычисленная обоими методами, а также точное значение этой величины, найденное из аналитического решения. Через t_{\max} здесь обозначен момент времени, на который достигает максимума.

Таблица 3.

Результаты расчетов (здесь $\mu = 100\pi$)

Метод	Интервал	$\left \frac{\partial u}{\partial \eta} \right _{\max}$	π_{\max}	$N \times M$	$\pi\tau$
1.Спектрально-сеточный метод (данная работа)	[-1,1]	152.4	1.6038	16×4	10 ^{-7%}
2.Спектрально-элементный (Patera. А.Т [9])	[-1,1]	152.0	1.6033	16×4	10 ^{-7%}
3.Аналитическое решение		152.0	1.6037		

Значения всех параметров в обоих случаях совпадают. Видно, что и в том и в другом случае точность расчетов имеет одинаковый порядок. Преимущество предлагаемого метода однако, заключается в большей общности, поскольку в

отличие от [18] в нем не содержится каких-либо предположений о форме решения, а следовательно не требуется введения, дополнительных параметров, определяемых в процессе расчета.

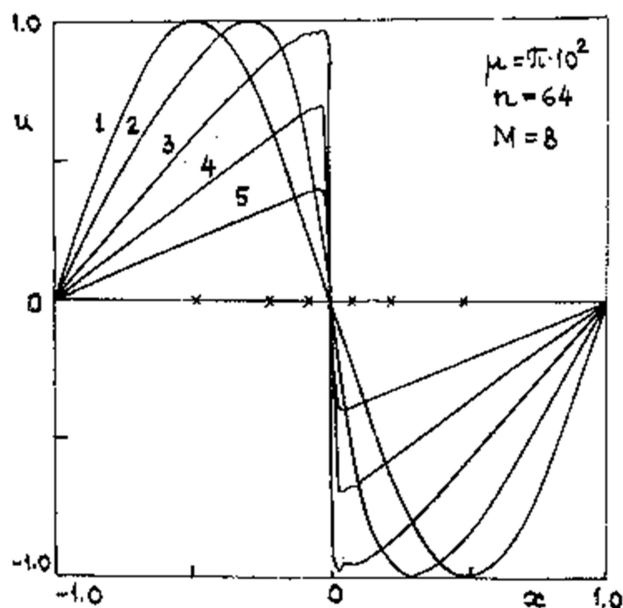


Рис. 5

5. Заключение

1. Построен спектрально-сеточный явный метод решения эволюционных задач с большими градиентами. В зависимости от местоположения областей неоднородности интервал интегрирования разбивается на конечное число элементов. На каждом из элементов используется спектральная

аппроксимация конечными рядами по базисным функциям.

2. Выполнены конкретные расчеты для одномерного уравнения Бюргерса, проведено сравнение с одноэлементным псевдоспектральным методом.

3. Показано, что применение спектрально-сеточной аппроксимации дает возможность значительно повысить точность расчетов, не увеличивая общее число базисных функций.

Литература

- [1] Лейбовича С., Сибасса А. Нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 320 с.
- [2] Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 384 с.
- [3] Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орро–Зоммерфельда // Математическое моделирование. – Москва, 2005. – № 9 (17). – С. 35-42.
- [4] Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование. – Москва, 2007. – № 6 (19). – С. 53-60.
- [5] Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. – Т.: «Fan va texnologiya», 2011. – 188 с.

- [6] *Нармурадов Ч.Б.* Алгоритм спектрально–сеточного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости пограничного слоя // *Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики»*. – Ташкент, 2001. – № 5-6. – С. 57-60.
- [7] *Нармурадов Ч.Б.* Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // *Докл. АН РУз*. – Ташкент, 2004. – № 1. – С. 19-26.
- [8] *Паиковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983.
- [9] *Basdevant C., Deville M., Haldenwang P., Lacroux J.M., Ouazzani J., Peyret R., Orlandi P., Patera A.T.* Spectral and finite-difference solutions of the Burgers equation // *Computers & Fluids*. – 1986. – V. 14. – P. 23-41.
- [10] *Orszag S.A.* Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries I. Galerkin (spectral) representations // *Stud. appl. math.* – 1971. – № 4(50). – P. 293-327.
- [11] *Orszag S.A.* Galerkin approximations to flows within slabs, spheres and cylinders // *Phys. rev. lett.* – 1971. – № 18(26). – P. 1100-1103.
- [12] *Orszag S.A.* Accurate Solution of the Orr–Sommerfeld stability equation // *J. fluid mech.* – 1971. – № 4(50). – P. 689-701.
- [13] *Ku H.G., Hatzivramidis D.* Solutions of the two–dimensional Navier – Stokes equations by Chebyshev expansion methods // *Computers and fluids*. – 1985. – № 1(13). – P. 99-113.
- [14] *Fulton S.R., Taylor G.D.* On the Gottlieb–Turkel time filter for Chebyshev spectral methods // *J. comput. phys.* – 1984. – № 2(55). – P. 302-312.
- [15] *Gottlieb D.* The stability of pseudospectral–Chebyshev methods // *Math. comput.* – 1981. – № 153(36). – P. 107-108.
- [16] *Игумнов А.Б., Соловьев А.С.* Устойчивый псевдоспектральный метод решения начально–краевых задач. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1986. – Т. 26. – № 12. – С. 1895-1900.
- [17] *Игумнов А.Б., Соловьев А.С., Яненко Н.Н.* Численное изучение волновых явлений в нелинейных средах с дисперсией. – Новосибирск, 1983. – 25 с. - (Препринт / АН СССР Сиб. отд.-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 25 - 83).
- [18] *Patera A.T.* A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion // *J. Comp. Phys.* – 1984. – V. 54. – P. 468-488.