

УДК 004.4

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКТИВНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ

*Жабборов Н. М., Равшанов З. Н.*

ravshanzade-09@mail.ru

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека. г. Ташкент, ул.  
Университетская, 4

В статье исследуется процесс распространения активных аэрозольных соединений, образующихся вследствие химических реакций в атмосфере и перехода одних веществ в другие более токсичные вещества. Приведен краткий обзор научных работ, посвященных различным аспектам и математическому обеспечению процесса переноса и диффузии активных вредных веществ в атмосфере. Авторами разработана математическая модель исследуемого процесса, представленная в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Модель описывает процесс трансформации аэрозольных частиц в другие более токсичные формы, происходящий под влиянием химических реакций в атмосфере. Так как разработанная математическая модель процесса описывается полной системой уравнений гидромеханики, то для её решения авторами предложен алгоритм расщепления системы на три независимых подзадачи. Предложенный подход позволяет численно интегрировать задачу на распределенной вычислительной системе при соответствующей программной реализации.

**Ключевые слова:** математическая модель, перенос и диффузия вредных веществ, погоднo-климатический фактор, гидромеханика, численный алгоритм, программное средство, вычислительный эксперимент

**Цитирование:** *Жабборов Н. М., Равшанов З. Н.* Численное моделирование процесса распространения активных аэрозольных выбросов в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — №2(14). — С. 20–35.

### 1 Введение

Активная разработка существующих и новых углеводородных месторождений, запуск мощных производственных объектов, развитие транспортной инфраструктуры и т.д. приводит к резкому воздействию на окружающую среду. Техногенное воздействие неизбежно влечет нарушения экологического равновесия как локально – на отдельных территориях, так и глобально – в масштабах всей планеты. Это особенно заметно в государствах с интенсивным ростом производственных мощностей, в том числе, объектов легкой и тяжелой промышленности, первичной переработки сырья. К таким странам можно отнести Индию, Китай, Корею, Малайзию, Сингапур, ряд стран Европы и т.д. Например, в Китае и Индии за период 2014-2015гг. неоднократно объявлялись «желтый» и «красный» уровни экологической угрозы.

Результаты исследований [1] показали, что загрязнение воздуха в Китае является прямой или косвенной причиной смерти примерно 1,6 миллиона человек каждый год. Факт того, что неблагоприятная экология атмосферы уносит 4400 жизней в день – ошеломляет. Анализ указанного исследования показал, что самыми опасными загрязнителями воздуха являются крошечные аэрозольные частицы, выделяемые в

результате работы электростанций, сжигания ископаемого топлива на объектах производства и в отопительных системах. Эти крошечные частицы, выброшенные в атмосферу, попадают в лёгкие и кровь людей, что приводит к заболеваниям, таким как астма, болезни сердца и др. Исследователями утверждается, что их оценки смертности основаны на данных Всемирной организации здравоохранения, полученных в рамках программы по исследованию причин смертности от пяти заболеваний, связанных с воздействием различных уровней загрязнения воздуха мелкозернистыми частицами. Результаты исследования отражают зависимость роста числа раковых, астматических, аллергических и другие заболеваний, а также сокращения численности многих видов фауны и флоры от масштаба и степени нарушений экологического баланса по всему земному шару.

В своем докладе на Климатическом Саммите ООН в Париже Президент Российской Федерации В.В. Путин подчеркнул: «Выбросы парниковых газов в атмосферу всех стран мира в 2012 году составили 46 миллиард тон» [2]. Эти тревожные факты говорят о том, что перед мировым сообществом стоит острая проблема – защита окружающей среды от техногенных факторов. В виду ее актуальности, в Российской Федерации 2017 год объявлен годом экологии.

Несмотря на то, что Узбекистан является одним из благоприятных регионов в мире с точки зрения экологического состояния, на государственном уровне особое внимание уделяется решению этой проблемы. Активно работают экологические комитеты по охране окружающей среды и недропользованию. В ВУЗах республики для подготовки специалистов в области экологии созданы и открываются новые кафедры и научные направления, в том числе, связанные с применением математических методов для исследования экологических процессов. Обзор научных публикаций за последние годы показывает, что в перечне актуальных задач, решаемых с помощью математического моделирования, вопросы экологии занимают особое место.

Анализ источников [3–11] показал, что воздействие аэрозольных частиц на состояние окружающей среды зависит, как правило, от совокупности химических и физических процессов происходящих в атмосфере. При переносе и диффузии вредных веществ в атмосфере существенную роль играют состав и размер частиц аэрозолей. Для адекватного описания формирования аэрозолей необходимы комплексные математические модели, учитывающие динамические, физико-химические и кинетические процессы, происходящие в атмосфере. Такой подход позволяет в рамках единой модели учитывать сложные взаимосвязи между динамическими и физико-химическими процессами и процессами формирования аэрозолей в атмосфере.

С помощью разработанной модели можно воспроизвести эволюцию газовых примесей и аэрозольных частиц в атмосфере, начиная с молекулярного уровня до образования частиц в несколько микрон с учетом их ионного состава. Также, можно эффективно представить пространственно-временную изменчивость газовых примесей и аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы и оценить антропогенную нагрузку на природную среду.

В работе [3] рассмотрен комплекс математических моделей для решения задач динамики и кинетики многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. Сформулирована базовая математическая модель, включающая динамические газо- и жидкофазные химические процессы, а также кинетические процессы нуклеации, конденсации, испарения и коагуляции с использованием неравновесной функции распределения частиц по размерам. Особое внимание уделяется механизмам образования частиц новой фазы из газов предшественников при гомогенной нуклеации

паров серной кислоты и воды. Для построения вычислительного алгоритма решения дискретных аналогов уравнений гидромеханики использован метод расщепления по физическим процессам. На каждом малом интервале получалась схема, состоящая из шести этапов:

- 1) перенос многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей по траекториям,
- 2) турбулентная диффузия,
- 3) фотохимическая трансформация,
- 4) кинетические процессы конденсации,
- 5) процессы коагуляции,
- 6) совместная модель химических процессов, протекающих в газовой и жидкой фазах с учетом процессов массообмена на разделе газ-частица.

По разработанным моделям проводились численные эксперименты для воспроизведения пространственно-временной изменчивости газовых примесей и аэрозолей в атмосфере в региональном и глобальном масштабах.

В работе [4] проведены аналитические исследования процессов распространения в атмосфере вредных выбросов предприятий. В качестве основного атмосферного загрязнителя рассматривается углекислый газ ( $\text{CO}_2$ ). Решается задача при разовом мгновенном выбросе вредной примеси в стандартном приземном слое атмосферы с заданным ветровым полем. Автором получено выражение для концентрации примесей в стационарном случае и при непрерывно действующем источнике загрязнения. Построены уровни равного загрязнения атмосферы и проанализирована их трансформация при изменении параметров источника.

Исследование [5] посвящено разработке трехмерной нестационарной математической модели процесса распространения радионуклидов в атмосфере и расчета доз облучения, позволяющей проводить прогнозные расчеты эволюции радиационной обстановки в районе Волгодонской атомной электростанции. Разработанная математическая модель учитывает факторы, определяющие распространение радионуклидов в атмосфере и загрязнение подстилающей поверхности, а также формирование индивидуальных доз облучения. На основе разработанной модели и численного алгоритма был создан проблемно-ориентированный программный комплекс «RADExpert». Данный комплекс предназначен для проведения прогнозных расчетов распространения радионуклидов и индивидуальных доз облучения, оперативной оценки последствий внештатных ситуаций работы ВОАЭС с учетом характеристик местности, различных метеоусловий и радионуклидных составов выбросов. RADExpert отличается от известных программных комплексов данного типа тем, что состоит из геоинформационной, моделирующей и экспертно-аналитической систем. Автором получены новые взаимозависимости, позволяющие учитывать влияние метеорологических условий на процесс распространения радионуклидов при авариях 1-го и 2-го типов, которые создают экологически неблагоприятные последствия для городов Цимлянск и Волгодонск.

Задача численного моделирования влияния дымовых аэрозолей в атмосфере рассмотрена в работе [6]. В работе предлагается негидростатическая модель атмосферного пограничного слоя, учитывающая фазовые переходы в системе «пар-вода-лед». Разработано математическое обеспечение для расчета различных сценариев формирования конвективной облачности в районе пожара и переноса дымового аэрозоля. При выводе математической модели процесса распространения дымовых аэрозолей были учтены процессы конвекции, турбулентного обмена, влажности, силы и направления ветра. Количество и распределение осадков при наличии в атмосфере

различных концентраций примесей позволили сделать предположение, что активный вертикальный тепломассоперенос, генерируемый в зоне массовых лесных пожаров, может оказаться фактором влияния локальных процессов (в зоне пожара) на атмосферную циркуляцию регионального масштаба. Как утверждают авторы, полученные результаты моделирования распространения дымового аэрозоля в тропосфере под влиянием различных метеорологических факторов являются новыми.

В диссертационной работе [7] рассмотрен процесс распространения активной примеси в свободной и облачной атмосфере. Предложена математическая модель рассеяния активной примеси в атмосфере, основанная на применении линеаризованных уравнений движения Навье-Стокса. Основное отличие данной модели от других моделей рассеяния примесей в атмосфере состоит в том, что используя данную модель, можно найти значения мгновенной концентрации активной примеси в любой точке облачной атмосферы, основываясь на простых для определения физических параметрах: поле давления, поле температуры, поле плотности, векторное поле скорости атмосферного воздуха. Коэффициенты турбулентной диффузии в предлагаемой модели используются только при моделировании процесса рассеяния водяного пара.

В [8] рассмотрена задача оперативного прогноза методом учета эмиссий загрязняющих веществ в атмосферу от очагов лесных пожаров. При моделировании переноса загрязняющих веществ в атмосфере от очагов лесных пожаров учтено обратное влияние состава воздуха на прогноз метеорологических величин.

В работах [9–13] созданы численный алгоритм и программный комплекс для обработки и анализа видеоизображений на базе персонального компьютера и разработаны методы анализа, позволяющие определять дисперсию примеси и коэффициенты турбулентной диффузии по видеоизображениям аэрозольного шлейфа от стационарного точечного источника выброса вредных веществ в атмосфере. Разработанный алгоритм преобразования цифровой видеопоследовательности в динамическое изображение позволяет существенно уменьшить объем исходной видеoinформации. С использованием созданных программ статистической обработки были построены динамические изображения. Данные изображения используются при расчетах коэффициента турбулентной диффузии.

В работах [14–16] проведены исследования процесса распространения и трансформации примесей в регионе озера Байкал, на основе разработанной нелинейной модели объекта, описывающейся уравнением турбулентной диффузии. Проведенные исследования авторов показывают, что наибольшее влияние на озеро Байкал оказывают выбросы предприятий Слюдянки и Байкальска. Проведенными вычислительными экспериментами установлено незначительное влияние Иркутско-Черемховского промышленного комплекса, в силу удаленности источников выбросов от озера и наличия орографических неоднородностей. При северо-западном ветре со скоростью 2 м/с Приморский хребет и Олхинское плато задерживают третью часть ртути от попавшей на озеро. В радиусе 5 км от одиночного источника оседает примерно 10% валового выброса ртути, что соответствует результатам других исследователей.

Работа [17] посвящена построению информационной модели расчета распространения примеси в приземном слое атмосферы над промышленными регионами. Для реализации рассмотренных задач в работе была разработана структура информационной модели расчета загрязнения атмосферы, которая включает 3 стадии обработки экологической информации: предобработку, обработку и постобработку. Предлагаемая структура содержит: модуль импорта информации с целью перевода информации, предоставленной субъектами экологического мониторинга из распространенных

форматов в формат внутреннего представления в виде SQL базы данных. SQL база исходных данных, в зависимости от ее типа, распределяется на три блока: информация о концентрациях загрязняющих веществ, метеорологическая и географическая информация. Так как исходные данные от субъектов мониторинга могут поступать в неопределенном порядке, необходимо выполнять сортировку каждый раз при добавлении новых данных в базу, ввиду того, что для большинства методов прогнозирования важен порядок наблюдения во времени. На этапе предварительной обработки производится исключение из дальнейшей обработки или коррекция исходных данных, которые являются аномальными. На этапе инициализации предусматривается расчет и инициализация параметров, которые не зависят ни от времени, ни от пространственных характеристик, а зависят только от типа территориально распределенного объекта и являются общими для большинства методов расчета.

Работы [18, 19] посвящены определению источников загрязнения атмосферы математическими методами, в основе которых лежит решение обратной задачи переноса примеси. Эти методы позволяют по определенному числу точек наблюдений восстановить параметры источников загрязнения и выяснить территориальное расположение аэрозольного загрязнения. В результате проведенных исследований определены количественные характеристики загрязнения территории города предприятием циркониевого цикла и пространственное распределение загрязняющих веществ. Также была отработана методика выявления источников загрязнения по результатам наблюдений состояния окружающей среды.

Вместе с тем, анализ многочисленных публикаций позволяет утверждать, что в исследованиях авторов не рассмотрены химические процессы, протекающие в газовой и жидкой фазах с учетом массообмена на разделе газ-частица в трехмерной постановке и учетом скорости перемещения воздушной массы атмосферы по трем направлениям  $u, v, w$ .

Также следует отметить, что при математическом моделировании процесса распространения вредных веществ в работах многих авторов предполагается, что распространение вредных веществ от источников не достигает рассматриваемых границ области решения задачи и отсутствует приток вредных веществ через них.

Исходя из сказанного, в настоящей работе предприняты усилия для восполнения указанного пробела. Целью настоящей работы является разработка математической модели и численного алгоритма решения задачи переноса и диффузии активных аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы при взаимодействии с влажной воздушной массой.

## 2 Постановка задачи

В процессе переноса и диффузии часть аэрозольных соединений под влиянием химических реакции в атмосфере переходит в другие формы, которые иногда представляют собой более токсичные вещества, чем первоначальные. Цепочку превращений аэрозольных частиц можно представить следующим образом:  $\varphi \rightarrow \varphi_0 \rightarrow \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n$ . Этот процесс описывается системой дифференциальных уравнений переноса и диффузии [3, 21, 22]:



Коэффициент диффузии зависит от расстояния от источника загрязнения и  $\theta_0^2$  – дисперсии возмущений направления ветра, осреднённой за достаточно большой промежуток времени. Здесь  $R$  – расстояние от источника,  $k_x$  – параметр, определяемый по характеристикам приземного слоя. Коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью  $\xi$  изменяется в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$ . Если частица попадает в твердую стенку, то считается  $\xi = 0$ , если ударяется о водную поверхность, то  $\xi = 1$ . Обычно часть аэрозольных выбросов в зависимости от своей массы, метеорологических и климатических условий, характеристик подстилающей поверхности и географического расположения области распространения попадает на подстилающую поверхность. Затем часть из них снова попадает в атмосферу. Считают, что  $\xi$  является постоянной величиной в рассматриваемой области. Это искажает прогноз распределения частиц на подстилающей поверхности. Чтобы избежать такой проблемы, при разработке математической модели процесса нужно учитывать  $\xi = \xi(x, y, z, r)$ .

Для учета поглощения аэрозольных частиц в растительном покрове коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью  $\xi$  необходимо вычислять с помощью формулы:

$$\xi(x, y, z, r) = \begin{cases} 0, & z > z_k, \\ 0, 264u(z)^{1,65} w_g^{0,66} s(z), & z < z_h. \end{cases}$$

Здесь  $z_h$  – высота слоя растительности,  $s(z)$  – удельная поверхность растительности. Задача рассматривается в течении времени  $(0, T)$ , коэффициент турбулентности зависит от высоты и времени прогнозирования процесса.

Как правило, ночью и в подутреннее время наблюдается устойчивая и безразличная стратификация атмосферы, а в дневное время – неустойчивая. Данное обстоятельство необходимо учитывать при построении вычислительного алгоритма и программного обеспечения. Для вычисления коэффициента турбулентности воспользуемся метеорологическими характеристиками в пограничном слое атмосферы, которые функционально связывают вертикальное распределение коэффициента турбулентности от стратификации атмосферы и числа Россби. Обычно, высоты загрязняющих источников расположены по вертикали неравномерно. Поэтому основная задача решается по  $x, y$  на равномерных сетках, а по вертикали – на неравномерных. Коэффициент турбулентности выбирается в зависимости от стратификации атмосферы и высоты источников загрязнения.

Коэффициент диффузии  $\mu$  также зависит от скорости ветра, т.е. изменяется по вертикали и по времени. Поэтому при построении вычислительного алгоритма необходимо учитывать изменение этих параметров в поставленной задаче.

### 3 Метод решения

Систему (1) и соответствующие начальное и граничные условия (2)-(3) представим в векторно-матричном виде [21–23]:

$$EL\Phi + A\Phi = F; \quad (4)$$

$$\Phi_H = 0 \text{ при } t = 0; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= (1 - \alpha_1)(\Phi - \Phi_H) \text{ при } x = 0; \\ -\alpha_2 \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= (1 - \alpha_2)(\Phi - \Phi_H) \text{ при } x = L_x; \\ \beta_1 \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= (1 - \beta_1)(\Phi - \Phi_H) \text{ при } y = 0; \\ -\beta_2 \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= (1 - \beta_2)(\Phi - \Phi_H) \text{ при } y = L_y; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ при } z = H_{vg}; \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \xi \Phi \text{ при } z = H_{pz}. \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Здесь  $H_{pz}$  – подстилающая поверхность,  $H_{vg}$  – верхняя граница,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\tilde{\sigma}_0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_1 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{\sigma}_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial}{\partial z} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Задачу (4)-(6) решаем в области  $D$ , представляющей собой прямой параллелепипед. Так как все собственные числа матрицы  $A$  являются простыми и действительными, то её можно представить в виде

$$A = B\lambda B^{-1}. \quad (7)$$

Здесь  $\lambda$  – диагональная матрица состоящая из собственных чисел матрицы  $A$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

столбцами матрицы  $B$  являются собственные вектора матрицы  $A$ , соответствующие собственному числу  $\lambda_i$ ;  $B^{-1}$  – обратная матрица.

Умножая (4) на  $B^{-1}$ , преобразуем систему и получим

$$LB^{-1}\Phi + B^{-1}A\Phi = B^{-1}F. \quad (8)$$

Вводя обозначение

$$B^{-1}\Phi = \Phi^{(1)}, B^{-1}F = F^{(1)} \quad (9)$$

и так как  $B^{-1}A\Phi = B^{-1}B\lambda B^{-1}\Phi = \lambda\Phi^{(1)}$  уравнение (8) преобразуем к виду

$$L\Phi^{(1)} + \lambda\Phi^{(1)} = F^{(1)}. \quad (10)$$

В скалярной форме уравнение (10) имеет следующий вид

$$L\varphi_i^{(1)} + \lambda_i\varphi_i^{(1)} = f_i^{(1)}; (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (11)$$

$$\varphi_i^{(1)}(x, y, z) = \varphi_{i,0}^{(1)}(x, y, z); \text{ при } t = 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \mu \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= (1 - \alpha_1) \left( \varphi_i^{(1)} - \varphi_{i,H}^{(1)} \right); \\ \beta_1 \mu \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=L_x} &= (1 - \beta_1) \left( \varphi_i^{(1)} - \varphi_{i,H}^{(1)} \right); \\ \alpha_2 \mu \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= (1 - \alpha_2) \left( \varphi_i^{(1)} - \varphi_H^{(1)} \right); \\ \beta_2 \mu \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=L_y} &= (1 - \beta_2) \left( \varphi_i^{(1)} - \varphi_H^{(1)} \right); \\ \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=H_{pz}} &= \xi \varphi_i^{(1)}; \quad \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=H_{vg}} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, I$ .

Итак, после ортогонального преобразования, от связанной системы дифференциальных уравнений переноса и диффузии пришли к  $I$  - независимым уравнениям переноса и диффузии. Решая задачу (10)-(13) получим значение функции  $\hat{O}^{(1)} = (\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_I^{(1)})$  в области  $D$ . Чтобы перейти от функции  $\varphi_i^{(1)}$  к функции  $\hat{O} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_I)$  воспользуемся (9). Для этого уравнение (8) умножим слева на матрицу  $B$

$$BB^{-1} = B^{(1)}, \quad BB^{-1} = E,$$

$$\Phi^{(1)} = (\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_I^{(1)})$$

Отсюда приходим к решению искомой задачи (1)-(3).

Для примера рассмотрим цепочку превращений, состоящих из трех звеньев. Тогда система уравнений (1)-(3) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \\ - \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sigma_1 \varphi_1 = f_1; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \\ - \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \sigma_2 \varphi_2 - \tilde{\sigma}_1 \varphi_1 = 0; \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \\ - \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \sigma_3 \varphi_3 - \tilde{\sigma}_2 \varphi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

с краевыми условиями

$$\varphi_i(x, y, z) = \varphi_{i,0}(x, y, z) \text{ при } t = 0, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha_2 (\varphi_i - \varphi_{i,H}); \\ -\beta_1 \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big|_{x=L_x} &= \beta_2 (\varphi_i - \varphi_{i,H}); \\ \alpha_3 \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \alpha_4 (\varphi_i - \varphi_{i,H}); \\ -\beta_3 \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \Big|_{y=L_y} &= \beta_4 (\varphi_i - \varphi_{i,H}); \\ k \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \xi \varphi_i; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $i = 1, 2, 3$ .

Систему (14)-(16) запишем в векторном и матричном виде

$$EL\Phi + A\Phi = F; \quad (17)$$

$$\Phi = \Phi_H \text{ при } t = 0; \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \mu \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} &= (1 - \alpha_1) (-); \\ -\beta_1 \mu \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=L_x} &= (1 - \beta_1) (-); \\ \alpha_2 \mu \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} &= (1 - \alpha_2) (-); \\ -\beta_2 \mu \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=L_y} &= (1 - \beta_2) (-); \\ \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \xi; \quad \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\sigma}_1 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для преобразования матрицы  $A$  найдем ее собственные вектора и собственные числа

$$|A - \lambda E| = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} \sigma_1 - \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\sigma}_1 & \sigma_2 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_2 & \sigma_3 - \lambda_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(\sigma_1 - \lambda_1)(\sigma_2 - \lambda_2)(\sigma_3 - \lambda_3) = 0 \text{ и } \lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \lambda_3 = \sigma_3.$$

Все собственные числа простые и вещественные.

Теперь найдем собственные вектора, соответствующие собственным значениям  $\lambda_i$

$$AX = \lambda X$$

Для  $X_i$  имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 - \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\sigma}_1 & \sigma_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_2 & \sigma_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_1 - \lambda_1) x_{11} = 0; \\ -\tilde{\sigma}_1 x_{11} + (\sigma_2 - \lambda_1) x_{21} = 0; \\ -\tilde{\sigma}_2 x_{21} + (\sigma_3 - \lambda_1) x_{31} = 0. \end{cases}$$

Известно, что  $\sigma_1 - \lambda_1 = 0$ ,  $x_{11} \neq 0$ . Для определенности считаем  $x_{11} = 1$ . Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} x_{11} = 1; \\ -\tilde{\sigma}_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)x_{21} = 0; \\ -\tilde{\sigma}_2 x_{21} + (\sigma_3 - \sigma_1)x_{31} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = 1; \\ x_{21} = \frac{\tilde{\sigma}_1}{(\sigma_2 - \sigma_1)}; \\ x_{31} = \frac{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}; \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tilde{\sigma}_1}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ \frac{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \end{pmatrix}.$$

Для  $X_2$  имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\tilde{\sigma}_1 & \sigma_2 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_2 & \sigma_3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_1 - \lambda_2) x_{12} = 0; \\ -\tilde{\sigma}_1 x_{11} + (\sigma_2 - \lambda_2) x_{22} = 0; \\ -\tilde{\sigma}_2 x_{21} + (\sigma_3 - \lambda_2) x_{32} = 0. \end{cases}$$

Известно, что  $\sigma_2 - \lambda_2 = 0$ ,  $x_{22} \neq 0$ ,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  $x_{12} = 0$ . Для определенности считаем  $x_{22} = 1$ . Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} x_{13} = 0 \\ x_{23} = 0 \\ x_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В итоге получим

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\sigma}_1}{(\sigma_2 - \sigma_1)} & 1 & 0 \\ \frac{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} & \frac{\tilde{\sigma}_2}{(\sigma_3 - \sigma_2)} & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью  $X$  можем вычислить  $X^{-1}$ . Собственные числа и собственные вектора известны. Теперь можно преобразовать систему (17), тогда получим три независимых уравнения. При этом соответственно преобразуются и краевые условия. Каждое преобразованное уравнение с соответствующими краевыми условиями решается методом дробных шагов. С помощью соотношения (8) от преобразованной функции  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)}$  переходим к искомым функциям  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

## 4 Выводы

Таким образом, получена система независимых дифференциальных уравнений с соответствующими преобразованными краевыми условиями, описывающая процесс переноса и диффузии активных аэрозольных частиц, которую можно решать методом

дробных шагов на гибридных вычислительных систем при соответствующей реализации программного средства.

Для интегрирования поставленной задачи и вычисления основных параметров математической модели процесса получены функциональные зависимости.

Для учета поглощения аэрозольных частиц растительным покровом получена формула для вычисления коэффициента взаимодействия с подстилающей поверхностью.

На основе разработанной математической модели, численного алгоритма и программного обеспечения можно проводить вычислительные эксперименты на ЭВМ для исследования, прогнозирования и мониторинга процесса распространения активных вредных веществ в атмосфере.

Анализируя результаты проведенных вычислительных экспериментов на ЭВМ можно принимать управленческие решения, в частности, по оптимальному размещению вновь возводимых промышленных предприятий и объектов социального назначения.

## Литература

- [1] Загрязнение воздуха в Китае является причиной смерти 4400 человек в день. URL: [http://inosmi.ru/epoch\\_times/20150818/229704802.html?id=229704928](http://inosmi.ru/epoch_times/20150818/229704802.html?id=229704928).
- [2] Выступление Владимира Путина на открытии климатической конференции в Париже. URL: <http://rusvesna.su/news/1448892801>.
- [3] Марчук Г. И., Алоян А. Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере и их значение для биосферы // Биосфера, 2009. Т. 1. № 1. С. 48–57.
- [4] Чернявский С. А. Математическая модель процесса распространения в атмосфере газовых загрязнителей при различных погодных условиях // Технические науки – от теории к практике, 2013. № 20. URL: <https://goo.gl/YnemTf>.
- [5] Глушанин М. В. Математическое моделирование и разработка программного комплекса в задачах распространения радионуклидов в атмосфере: дис. ... канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2009. 179 с.
- [6] Дубровская О. А., Климова Е. Г. Прогнозирование распространения дымовых аэрозолей на территории Сибири // Вычислительные технологии, 2007. Т. 12. № 5. С. 68–77.
- [7] Ионисян А. С. Математическое моделирование процесса распространения активной примеси в свободной и облачной атмосфере: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ставрополь, 2003. 190 с.
- [8] Ревокатова А. П., Суржова Г. В., Курсанов А. А., Ривин Г. С. Прогноз загрязнения атмосферы Московского региона с помощью модели COSMOART // Вестник Московского университета. Серия 5: География, 2012. № 4. С. 25–32.
- [9] Dmitriev B. N., Petrov A. V., Sutorikhin I. A. Definition coordinates diffusion of particles of an impurity under the dynamic images of aerosol plums // SPIE. — 3991\* 0277-786x/03. – P. 375–388.
- [10] Granovskiy E. A., Lyfar V. A., Skob Yu. A., Ugryumov M. L. Numerical Modeling of Hydrogen Release, Mixture and Dispersion in Atmosphere // Abstracts Book and CD-ROM. Proceedings the International Conference on Hydrogen Safety Place of publication: Pisa (Italy), 2005. — 10p. (ICHS Paper No. 110021)
- [11] Witcofski R. D., Chirivella J. E. Experimental and Analytical Analyses of the Mechanisms Governing the Dispersion of Flammable Clods Formed by Liquid Hydrogen Spills // Int. J. Hydrogen Energy, 1984. – Vol. 9. – № 5 – P. 425–435.

- [12] *Петров А. В.* Использование полистатической схемы визирования при мониторинге аэрозольных выбросов // Ползуновский вестник. 2004. № 2. С. 99–103.
- [13] *Петров А. В., Суторихин И. А.* Определение дисперсии примеси и мощности выброса от промышленного источника // Международная конференция «ENVIROMIS 2004». Тезисы докладов-Томск: ЦНТИ. 2004. С. 29.
- [14] *Макухин В. Л., Потемкин В. Л.* Моделирование переноса и трансформации загрязняющих примесей, в том числе ртути, на акватории оз. Байкал // Междисциплинарный научный и прикладной журнал «Биосфера», 2012. Т. 4. № 3. С. 286–292.
- [15] *Аргучинцев В. К.* Численное моделирование распространения аэрозолей в пограничном слое атмосферы // Оптика атмосферы и океана, 1994. Т. 7. С. 1106–1111.
- [16] *Аргучинцев В. К., Аргучинцева А. В.* Моделирование мезомасштабных гидротермодинамических процессов и переноса антропогенных примесей в атмосфере и гидросфере региона оз. Байкал // Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. С. 255.
- [17] *Павлий В. А., Аверин Г. В.* Информационно-аналитические модели переноса примесей над территориально-распределенными объектами // Тези доп. міжнар. наук. конф. “Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій” (ISDMIT 2006), Евпатория, 2006. С. 108–111.
- [18] *Левенец В. В., Ролик И. Л., Мец К. А.* Оценка риска при воздействии выбросов в атмосферу Вольногорского горно-металлургического комбината // Научно - производственный журнал «Экология и промышленность», 2009. № 3. С. 83–89.
- [19] *Левенец В. В., Ролик И. Л.* Метод выражения специфических и неспецифических ингаляционных рисков в единичных показателях // Вестник НТУ «ХПИ», 2010. № 69. С. 78–83.
- [20] *Кожеевникова М. Ф., Левенец В. В., Ролик И. Л.* Программная реализация метода оценки риска от загрязнения атмосферного воздуха выбросами химического производства // Вестник НТУ «ХПИ», 2009. № 24 С. 164–171.
- [21] *Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N.* Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // American Journal of Modeling and Optimization, 2015. – Vol. 3. – № 2 – P. 35–39.
- [22] *Равшанов Н., Шарипов Д. К., Ахмедов Д.* Моделирования процесса загрязнения окружающей среды с учетом рельефа местности погодных-климатических факторов // Информационные технологии моделирования и управления – Воронеж, 2015. № 3 С. 222–235.
- [23] *Sharipov D. K.* Development of mathematical software aerosol transport and diffusion of the atmospheric emissions // European Applied Sciences, 2013. – Vol. 1. – № 1 – P. 233–240.

*Поступила в редакцию 27.02.2018*

UDC 004.4

## NUMERICAL MODELING OF THE PROCESS OF DISTRIBUTION OF ACTIVE AEROSOL EMISSIONS IN THE ATMOSPHERE

*Jabborov N. M., Ravshanov Z. N.*

ravshanzade-09@mail.ru

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. 4 Universitetskaya st.,  
Tashkent, Uzbekistan

The process of distribution of active aerosol emissions, which are formed as a result of chemical reactions in the atmosphere and the transition of some substances to other more toxic substances is researched in the paper. A brief review of scientific papers devoted to various aspects and mathematical support of the process of transfer and diffusion of active harmful substances in the atmosphere is given. The authors developed a mathematical model of the process under study, presented in the form of a system of differential equations in partial derivatives. The model describes the process of transformation of aerosol particles into other more toxic forms, which occurs under the influence of chemical reactions in the atmosphere. Since the developed mathematical model of the process is described by the complete system of hydromechanical equations, then for its solution the authors propose an algorithm for splitting the system into three independent subtasks. The proposed approach makes it possible to integrate the problem numerically on a distributed computer system with the appropriate software implementation.

**Keywords:** mathematical model, transfer and diffusion of harmful substances, weather and climate factor, hydromechanics, numerical algorithm, software, computational experiment

**Citation:** Jabborov N. M., Ravshanov Z. N. 2018. Numerical modeling of the process of distribution of active aerosol emissions in the atmosphere. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(14):20–35.

## References

- [1] *Zagryazneniye vozduxa v Kitaye yavlyayetsya prichinoy smerti 4400 chelovek v den* [Air pollution in China is causing the death of 4,400 people per day]. (In Russian) *INOSMI.RU* [INOSMI.RU]. 2015. Available at: <http://inosmi.ru/epoch-times/20150818/229704802.html?id=229704928>.
- [2] *Vstupleniye Vladimira Putina na otkritii klimaticheskoy konferentsii v Parije* [Speech by Vladimir Putin at the opening of the Climate Conference in Paris]. (In Russian) Available at: <http://rusvesna.su/news/1448892801>
- [3] Marchuk, G. I., Aloyan A. E.. 2009. Dinamika i kinetika gazovix primesey i aerorozley v atmosfere i ix znacheniye dlya biosferi [Dynamics and kinetics of gas impurities and aerosols in the atmosphere and their significance for the biosphere]. *Biosfera : mejdissiplinarniy nauchniy i prikladnoy jurnal* [Biosphere: interdisciplinary scientific and applied journal]. Sankt-Petersburg. 1(1):48–57. (In Russian)
- [4] Chernyavskiy S. A.. 2013. Matematicheskaya model protsessa rasprostraneniya v atmosfere gazovix zagryazniteley pri razlichnx pogodnx usloviyax. [Mathematical model of the process of gas pollutants spreading in the atmosphere under different weather conditions]. *Texnicheskie nauki-ot teorii k praktike* [Technical sciences - from theory to practice]. 20. (In Russian) Available at: <https://goo.gl/YnemTf>
- [5] Glushanin M. V.. 2009. Matematicheskoe modelirovanie i razrabotka programmnoy kompleksa v zadachax rasprostraneniya radionuklidov v atmosfere : dissertatsiya ... kandidata texnicheskix nauk. [Mathematical modeling and development of a software system in the problems of radionuclides in the atmosphere: the dissertation ... The candidate of technical sciences]. (In Russian). 179 p. Rostov-na-Donu.
- [6] Dubrovskaya O. A., Klimova Ye. G.. 2007. Prognozirovaniye rasprostraneniya dimovix aerorozley na territorii Sibiri [Forecasting the spread of smoke aerosols in the territory of Siberia]. *Vchislitelne texnologii* [Computational technologies]. 20. (In Russian). Novosibirsk. 12(5):68–77.

- [7] Ionisyan A. S.. 2003. Matematicheskoe modelirovanie protsessa rasprostraneniya aktivnoy primesi v svobodnoy i oblachnoy atmosfere : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. [Mathematical modeling of the process of active impurity propagation in free and cloudy atmosphere: dis. ... cand. fiz.-mat. science]. (In Russian). Stavropol 190 p.
- [8] Revokatova A. P., Surkova G. V., Kirsanov A. A. , Rivin G. S.. 2012. Prognoz zagryazneniya atmosferi Moskovskogo regiona s pomoshyu modeli COSMOART [Forecast of atmosphere pollution in the Moscow region using the COSMOART model]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 5: Geografiya* [Bulletin of Moscow University. Series 5: Geography]. (In Russian). 4:25–32.
- [9] Dmitriev B. N., Petrov A. V., Sutorikhin I. A.. Definition coordinates diffusion of particles of an impurity under the dynamic images of aerosol plums. *SPIE Vol. 3991\* 0277-786x/03.* . (In Russian). 375–388.
- [10] Granovskiy E. A., Lyfar V. A., Skob Yu. A., Ugryumov M. L. Numerical Modeling of Hydrogen Release, Mixture and Dispersion in Atmosphere *Abstracts Book and CD-ROM. Proceedings the International Conference on Hydrogen Safety* Place of publication: Pisa (Italy), 2005. — 10p. (ICHS Paper No. 110021)
- [11] Witcofski R. D., Chirivella J. E. Experimental and Analytical Analyses of the Mechanisms Governing the Dispersion of Flammable Clods Formed by Liquid Hydrogen Spills // *Int. J. Hydrogen Energy*, 1984. – Vol. 9. – 5: 425–435.
- [12] Petrov A. V.. 2004. Ispolzovaniye polistaticheskoy sxemi vizirovaniya pri monitoringe aerolniz vibrosov. [Use of a poly-static sighting scheme for monitoring aerosol emissions]. *Polzunovskiy vestnik No. 2* [Polzunovsky Herald No. 2]. (In Russian). P. 99–103.
- [13] Petrov A. V., Sutorixin I. A.. 2004. Opredeleeniye dispersii primesi i moshnosti vibrosa ot promishlennogo istochnika [Determination of dispersion of impurity and emission power from an industrial source]. *Mejdunarodnaya konferensiya «ENVIROMIS 2004». Tezisi dokladov* [International conference "ENVIROMIS 2004". Theses of reports]. Tomsk: SNTI. (In Russian). P. 29.
- [14] Makuxin V. L., Potemkin V. L.. 2012. Modelirovaniye perenosa i trans formatsii zagryaznyayushix primesey, v tom chisle rtuti, na akvatorii oz. Baykal. [Modeling of transport and transformation of contaminants, including mercury, in the water area of Lake Baikal]. *Mejdissiplinarniy nauchniy i prikladnoy jurnal «Biosfera»* [Interdisciplinary scientific and applied journal "Biosphere"]. (In Russian). Vol. 4. 3:286–292.
- [15] Arguchinsev V. K.. 1994. Chislennoye modelirovaniye rasprostraneniya aerolez v pogranichnom sloye atmosferi [Numerical simulation of the distribution of aerosols in the boundary layer of the atmosphere]. *Optika atmosferi i okeana* [Optics of the atmosphere and the ocean]. (In Russian). Vol. 7. P. 1106–1111.
- [16] Arguchinsev V. K., Arguchinseva A. V.. 2007. Modelirovaniye mezomasshtabnix gidrotermodynamicheskix protsessov i perenosa antropogennix primesey v atmosfere i gidrosfere regiona oz. Baykal. [Modeling of mesoscale hydrothermodynamic processes and the transfer of anthropogenic impurities in the atmosphere and hydrosphere of the Lake Baikal]. *Irkutsk : Izd-vo Irkutskogo gos. un-ta* [Irkutsk: Publishing House of Irkutsk State University]. (In Russian). P. 255.
- [17] Pavliy V. A., Averin G. V.. 2006. Informatsionno-analiticheskiye modeli perenosa primesey nad territorialno-raspredelennimi obyektmami [Information-analytical models of transfer of impurities over geographically distributed objects]. *Tezi dop. mijnar. nauk. konf. "Intellektualni sistemi prinyatiya rishen ta prikladni aspekti informatsiynix texnologiy"(ISDMIT 2006)* [Abstract supplementary international sciences Conf. "Intelligent Decision Making Systems and Applied Aspects of Information Technologies"(ISDMIT 2006)]. Yevpatoriya. (In Russian). P. 108–111.

- [18] Levenets V. V., Rolik I. L., Mets K. A.. 2009. Otsenka riska pri vozdeystvii vibrosov v atmosferu Volnogorskogo gorno-metallurgicheskogo kombinata [Risk assessment under the impact of atmospheric emissions of the Volnogorsk Mining and Metallurgical Plant]. *Nauchno - proizvodstvennyy jurnal «Ekologiya i promishlennost»* [Scientific and production magazine "Ecology and Industry"]. (In Russian). 3:83–89.
- [19] Levenets V. V., Rolik I. L.. 2010. Metod virajeniya spetsificheskix i nespetsificheskix ingyalyatsionnix riskov v yedinix pokazatelyax [Method of expression of specific and non-specific inhalation risks into a single measure]. *Vestnik NTU «XPI»* [Vestnik NTU "KPI"]. (In Russian). 69:78–83.
- [20] Kojevnikova M. F., Levenets V. V., Rolik I. L.. 2009. Programmnaya realizatsiya metoda otsenki riska ot zagryazneniya atmosfernogo vozduxa vibrosami ximicheskogo proizvodstva [Program implementation of the method of risk assessment from air pollution by chemical production emissions]. *Vestnik NTU «XPI»* [Vestnik NTU "KPI"]. (In Russian). 24:164–171.
- [21] Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N. 2015. Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere. *American Journal of Modeling and Optimization*, Vol. 3. – 2:35–39.
- [22] Ravshanov N., Sharipov D. K., Axmedov D.. 2015. Modelirovaniya protsessa zagryazneniya okrujayushey sredi s uchetom relefa mestnosti pogodno-klimaticheskix faktorov [Modeling the process of environmental pollution taking into account the terrain of weather and climate factors]. *Informatsionnie texnologii modelirovaniya i upravleniya* [Information technologies of modeling and management]. – Voronej. – (In Russian). 3:222–235.
- [23] Sharipov D. K. 2013. Development of mathematical software aerosol transport and diffusion of the atmospheric emissions. *European Applied Sciences* – Vol. 1. – 1:233–240.

*Received February 27, 2018*