УДК 517.957

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ*

[1]***Арипов М.А.***, [2]***Имомназаров Х.Х.***, [2]***Караваев Д.А.***, [2]***Коробов П.В.***
[1]mirsaidaripov@mail.ru; [2]imom@omzg.sscc.ru
[1]Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент;
[2]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

Рассматривается краевая задача для системы уравнений описывающей движения двухжидкостной среды с равновесием фаз по давлению. Доказано существование обобщенного решения с помощью метода ортогонального расширения путем введения в систему градиента дополнительной скалярной функции с нулевым граничным условием. Свести решение расширенной системы к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления, и задачи с множителем Лагранжа для второй скорости.

Ключевые слова: переопределенная стационарная система двухскоростной гидродинамики, задача Стокса, обобщенное решение, множитель Лагранжа, вязкость.

Цитирование: *Арипов М., Имомназаров Х., Караваев Д., Коробов П.* Обобщенное решение одной переопределенной стационарной системы двухжидкостной среды // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 2(20). — С. 20–25.

1 Введение

Формы движения двухфазных потоков значительно многообразнее, а законы, ими управляющее, существенно сложнее, чем формы движения и законы гидродинамики однородных сред. Интерес исследователей к проблемам и задачам механики многофазных сред обусловлен широким распространением таких систем в природе и их интенсивным использованием в современной технике. Математические модели многофазных или гетерогенных сред описывают различные явления гидро- и газодинамики, теории фильтрации, ракетостроения, угле- и нефтедобычи, ядерной и неядерной теплоэнергетики, металлургической и строительной промышленности, астрофизики. Модели многофазных сред возникают также при рассмотрении разнообразных задач описания техногенных систем: моделирование динамических процессов в нефтяных скважинах и приповерхностных пластах; а так же при описании эндогенных процессов и при решении связанных с ними задач геодинамики и моделирования рудообразующих структур в рамках единой согласованной модели эволюции системы, включающей верхнюю мантию, мантийную литосферу и земную кору, включая геоэкологический мониторинг за конкретными природными и техногенными объектами.

В работах В.Н. Доровского для объяснения локализации и генерации магмы предложена нелинейная математическая модель на основе метода законов сохранения. В этих работах сплошная среда в геологическом временном масштабе представлена как вязкая жидкость-1 за счет собственной вязкости, либо достигающая необходимых термодинамических условий протекания фазового перехода по другим причинам. По границам зерен и межзеренным узлам начинает скапливаться магма - жидкость-2 с

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №. 18-51-41002.

вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется сквозь систему, его породившую. Другими словами, эта модель представляет собой динамику взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду, как своеобразный процесс фильтрации.

Задача интерпретации наблюдений экспериментальных данных в гетерофазных средах со сложной реологией может быть последовательно решена в рамках внутренне непротиворечивой, согласованной математической модели. Основой для построения такой модели может выступать феноменологический метод законов сохранения (Халатников, 1967), который не требует введения дополнительных параметров среды, в отличие от моделей типа Френкеля-Био (Доровский, 1991; Доровский, Перепечко, 1992, Жабборов, Имомназаров, 2012). Такая модель использует для описания деформаций реологически сложной среды параметры, соответствующие эффективному тензору деформаций в подходе Годунова (Годунов, 1973; Роменский, 2010).

Решение реологических гетерофазных моделей возможно с использованием как численно-аналитических, так и численных методов. При исследовании переопределенных стационарных систем дифференциальных уравнений двухфазных сред эффективным является метод расширения переопределенной системы до хорошо обусловленной эллиптической (Гудович, Крейн, 1971). Данный метод решения переопределенных систем был успешно применен для построения вариационно-разностного алгоритма аппроксимации обобщенного решения в теории электромагнитизма (Урев, 2009). В применении к двухскоростным средам данный метод используется впервые для описания течений двухжидкостных сред и в присутствие диссипации энергии (Имомназаров, Урев, 2015).

В настоящее время такого рода переопределенные задачи еще не исследованы и будут исследованы впервые. Математическая модель двухскоростной среды, является термодинамически согласованной (Блохин, Доровский, 1994, Жабборов, Имомназаров, 2012).

2 Постановка задачи

В ограниченной односвязной области Ω трехмерного евклидова пространства R^3 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается линеаризованная стационарная неоднородная система двухскоростной гидродинамики с одним давлением [1]:

$$\nu_1 \mathbf{\Delta v}_1 - \nabla p = \mathbf{f}_1, \quad \mathrm{div}\mathbf{v}_1 = 0, \qquad \text{в } \Omega$$

$$\nu_2 \mathbf{\Delta v}_2 - \nabla p + \nabla\varphi = \mathbf{f}_2, \quad \mathrm{div}\mathbf{v}_2 = 0, \quad \text{в } \Omega \tag{1}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{0},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},\ \varphi = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega.$$

где $\mathbf{f}_i = (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3})-$ массовые силы, $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$, $i = 1, 2$, - скорости соответствующих подсистем, $\nabla-$ оператор градиента по $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, ν_1 и ν_2- соответствующие сдвиговые вязкости фаз.

3 Метод решения

Решение системы (1) сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала рашается задача для $(\mathbf{v}_1, p)$:

$$\nu_1 \mathbf{\Delta v}_1 - \nabla p = \mathbf{f}_1, \quad \mathrm{div}\mathbf{v}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{2}$$

Затем определяется пара $(\mathbf{v}_2, \varphi)$ как решение системы

$$\nu_2 \mathbf{\Delta v}_2 + \nabla\varphi = \nabla p + \mathbf{f}_2, \quad \mathrm{div}\mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \ \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{3}$$

Сначала приведем обобщенную постановку задачи (2). Для этого используем необходимые обозначений фунциональных пространства приведенные в [2]. Через $H^k(\Omega)$, где k положительное целое, будем обозначать скалярные гильбертовы пространства Соболева $W_2^k(\Omega)$. Норма и полунорма в них обозначаются через $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ и $|\cdot|_{k,\Omega}$ соответственно.

Таким образом, если $p, q \in L^2(G)$, а $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(G)$, то

$$(p,q)_{0,G} = \int_G pq\, d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{u},\mathbf{v})_{0,G} = \int_G \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, d\mathbf{x}.$$

Введем билинейные формы $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $X \times X$ и $b_1(\mathbf{v}, q)$ на $X \times P$

$$a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \nu_1(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})_0 = \nu_1 \sum_{i,j=1}^{3} \big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\big)_0, \qquad b_1(\mathbf{v}, q) = -(q, \mathrm{div}\mathbf{v})_0.$$

Система (2) является стационарной задачей Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости. В качестве ее обобщенной постановки примем широко распространенную смешанную формулировку: найти вектор-функцию $\mathbf{v}_1 \in X$ и функцию $p \in P$, удовлетворяющие равенствам

$$a_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) + b_1(\mathbf{u}, p) = -(\mathbf{f}_1, \mathbf{u})_0 \quad \forall \mathbf{u} \in X, \qquad b_1(\mathbf{v}_1, q) = 0 \quad \forall q \in P. \tag{4}$$

Смешанная постановка (4) задачи Стокса в терминах скорость-давление исследована, например, в [3]. Там же подробно рассмотрен метод конечных элементов для численного решения данной задачи.

Теперь сформулируем обобщенную постановку для задачи (3). Для этого введем гильбертовы пространства, см.[3]

$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)\},$$

$$H_0(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega) : \mathbf{n}\times\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\},$$

$$V = H_0(\mathrm{rot};\Omega), \quad Q = H_0^1(\Omega).$$

Пространство V снабжается следующей нормой:

$$\|\mathbf{u}\|_V = (\|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}, \qquad \mathbf{u} \in V.$$

Обозначим через $-\mathbf{F}_2$ правую часть в первом уравнении системы (3): $-\mathbf{F}_2 = \nabla p + \mathbf{f}_2$. Имея ввиду формулу векторного анализа для определения векторного оператора Лапласа, перепишем систему (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\nu_2 \mathrm{rotrot}\mathbf{v}_2 - \nabla\varphi = \mathbf{F}_2 && \text{в } \Omega, \\ &\mathrm{div}\mathbf{v}_2 = 0 && \text{в } \Omega, \\ &\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \ \varphi = 0 && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь вариационную постановку задачи (5) в области Ω сформулируем следующим образом: пусть $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, требуется найти пару функций $(\mathbf{v}_2, \varphi) \in V \times Q$, удовлетворяющих равенствам

$$a_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}) + b_2(\mathbf{u}, \varphi) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0 \qquad \forall\, \mathbf{u} \in V, \quad b_2(\mathbf{v}_2, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in Q. \tag{6}$$

Здесь $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$ обозначают билинейные формы на пространствах $V \times V$ и $V \times Q$ соответственно

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_2 \int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$b_2(\mathbf{u}, \psi) = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla\psi\, d\mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{u} \in V,\ \forall\, \psi \in Q.$$

Очевидно, что $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$ являются непрерывными билинейными формами на пространствах $V \times V$ и $V \times Q$ соответственно, а $F(\mathbf{u}) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0 -$ непрерывным линейным функционалом на пространстве V.

Билинейным формам $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$ отвечают два ограниченных линейных оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V')$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, H^{-1}(\Omega))$, определяемые как

$$< \mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} >= a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$< \mathcal{B}\mathbf{u}, \psi >= b_2(\mathbf{u}, \psi) \qquad \forall\, \mathbf{u} \in V, \forall\, \psi \in Q,$$

где V' и $H^{-1}(\Omega) = Q' -$ сопряженные пространства для V и Q соответственно, а запись $< \cdot,\cdot >$ обозначает отношение двойственности между элементами исходного и сопряженного ему пространства.

Воспользуемся теперь спецификой нашей исходной задачи (6), связанной с конкретным видом билинейных форм $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$, которая позволяет исключить из системы (6) множитель Лагранжа φ. Отметим, что если $\psi \in Q$, то $\nabla\psi \in V$, и тогда

$$a_2(\mathbf{u}, \nabla\psi) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{u} \in V, \forall\, \psi \in Q,$$

что позволяет выделить из системы (6) отдельную задачу для множителя Лагранжа φ, а именно, найти $\varphi \in Q$:

$$b_2(\nabla\psi, \varphi) = (\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 \qquad \forall\, \psi \in Q. \tag{7}$$

Используя (7), перепишем второе уравнение в системе (6) в следующем виде:

$$b_2(\mathbf{v}_2, \psi) + \beta b_2(\nabla\psi, \varphi) = \beta(\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 \qquad \forall\, \psi \in Q, \tag{8}$$

где $\beta > 0-$ произвольная постоянная.

Равенство (8) будем рассматривать как другое уравнение относительно функции φ, то есть как задачу определения $\varphi \in Q$:

$$c(\varphi, \psi) = \beta^{-1} b_2(\mathbf{v}_2, \psi) - (\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 \qquad \forall\, \psi \in Q. \tag{9}$$

Здесь $c(\cdot,\cdot) : Q \times Q \to \mathbb{R} -$ билинейная форма, определенная равенством

$$c(\varphi, \psi) = -b_2(\nabla\psi, \varphi) \qquad \forall\, \varphi, \psi \in Q.$$

Непрерывность формы $c(\cdot,\cdot)$ на $Q\times Q$ и ее $Q-$ эллиптичность показаны в [4]. Ограниченность линейного функционала в правой части (9) на пространстве Q также устанавливается просто:

$$|(\mathbf{F}_2,\nabla\psi)_0-\beta^{-1}b_2(\mathbf{v}_2,\psi)|\leqslant(\|\mathbf{F}_2\|_0+\beta^{-1}\|\mathbf{v}_2\|_0)\|\psi\|_1\quad\forall\,\psi\in Q.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы Лакса-Мильграма для однозначной разрешимости вариационной задачи (9).

Представим задачу (9) в операторном виде. Известно (см.[3], п.1.2), что ограниченный линейный оператор $\mathcal{C}:Q\to H^{-1}(\Omega)$, определяемый равенством

$$<\mathcal{C}\varphi,\psi>=c(\varphi,\psi)\qquad\forall\,\varphi,\psi\in Q,$$

является изоморфизмом и, следовательно, имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{C}^{-1}:H^{-1}(\Omega)\to Q$. Напомним также определение обобщенной дивергенции функции $\mathbf{F}_2\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ как функционала $\mathrm{div}\mathbf{F}_2\in H^{-1}(\Omega)$, который задается равенством

$$<\mathrm{div}\mathbf{F}_2,q>=-(\mathbf{F}_2,\nabla q)_0\qquad\forall\,q\in Q.$$

Теперь вариационную задачу (9) можно переписать в следующем виде:

$$<\mathcal{C}\varphi,\psi>=<\beta^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_2,\psi>+<\mathrm{div}\mathbf{F}_2,\psi>\qquad\forall\,\psi\in Q,$$

что соответствует операторному уравнению

$$\mathcal{C}\varphi=\beta^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_2+\mathrm{div}\mathbf{F}_2.$$

Таким образом, решение задачи (9) можно представить как

$$\varphi=\beta^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_2+\mathcal{C}^{-1}\mathrm{div}\mathbf{F}_2.\tag{10}$$

Подставляя в первое уравнение системы (6) вместо функции φ ее выражение в правой части (10), получим отдельную вариационную задачу для определения векторной функции $\mathbf{v}_2$ во всем пространстве V. Именно, найти $\mathbf{v}_{2,\beta}\in V$: $\forall\,\mathbf{u}\in V$

$$a_2(\mathbf{v}_{2,\beta},\mathbf{u})+\beta^{-1}<\mathcal{B}\mathbf{u},\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_{2,\beta}>=(\mathbf{F}_2,\mathbf{u})_0-<\mathcal{B}\mathbf{u},\mathcal{C}^{-1}\mathrm{div}\mathbf{F}_2>.\tag{11}$$

Теорема существования и единственности решения вариационной задачи (11) доказана в [4].

4 Заключение

- Исходная переопределенная система с неоднородными дивергентными и краевыми условиями приведена заменами искомых скоростей к системе (1) с однородными условиями.

- Решение системы (1) сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной задачи для второй скорости.

- Для задачи Стокса принята смешанная обобщенная постановка в терминах скорость-давление, которая хорошо изучена.

- Для решения второй переопределенной задачи использован новый вариант метода регуляризации, ранее предложенный и исследованный в работах (Гудович, Крейн, 1971, Урев, 2009, Имомназаров, Урев, 2015).

Литература

[1] *Урев М. В., Имомназаров Х. Х., Жиан-Ган Тан* Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике — СибЖВМ, 20 (2017), 425-437 с.

[2] *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[3] *Гираулт В., Равиарт П. А.* Методы конечных элементов для уравнений Навье-Стокса. — Спрингер-Верлаг, Берлин, 1986.

[4] *Кремер И. А., Урев М. В.* Регуляризация стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде и решение ее методом конечных элементов — Сиб. журн. вычисл. матем., Сиб.; 12 (2009), 161-170.

Поступила в редакцию 01.02.2019

UDC 517.957

A GENERALIZED SOLUTION OF ONE OVERDETERMINED STATIONARY SYSTEM OF A TWO-FLUID MEDIUM

[1]***Aripov M.A.***, [2]***Imomnazarov Kh.H.***, [2]***Karavaev D.A.***, [2]***Korobov P.V.***

[1]mirsaidaripov@mail.ru; [2]imom@omzg.sscc.ru

[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;

[2] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

The boundary problem for the system of equations describing the motion of a two-fluid medium with phase equilibrium with respect to pressure is considered. The existence of a generalized solution is proved using the method of orthogonal expansion by introducing into the system a gradient of an additional scalar function with zero boundary condition. Reduce the solution of the extended system to the sequential solution of two boundary value problems: the Stokes problem for one speed and pressure, and the problem with the Lagrange multiplier for the second speed.

Keywords: overdetermined stationary system of two-speed hydrodynamics, Stokes problem, generalized solution, Lagrange multiplier, viscosity.

Citation: Aripov M., Imomnazarov H., Karavayev D., Korobov P. 2019. A generalized solution of one overdetermined stationary system of a two-fluid medium. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(20): 20–25.