

УДК 62-85+681.587

# ШУМОПОДОБНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ И ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Аннакулова Г.К.**

к.ф.-м.н., вед.н.с. Научно-исследовательского центра по проблемам отраслевого машиноведения при ТГТУ,  
тел: +(93)527-94-90, e-mail: annafulova\_g@ mail.ru

**Абдуллаева М.Г.**

к.ф.-м.н., с.н.с. Научно-исследовательского центра по проблемам отраслевого машиноведения при ТГТУ

**Игамбердиев К.А.**

м.н.с. Научно-исследовательского центра по проблемам отраслевого машиноведения при ТГТУ

Рассмотрена динамическая модель колесной машины, создающей шумоподобные автоколебания и хаотическое поведение. Построены фазовые портреты и временная реализация колебаний при различных значениях параметров. Установлены условия появления хаотических решений.

**Ключевые слова:** шумоподобные автоколебания, хаотизация, нелинейность, динамическая модель, дифференциальные уравнения, отображение, колесная машина, фазовый портрет.

## NOISE-LIKE AUTO-OSCILLATIONS AND CHAOTIC BEHAVIOR OF DYNAMICAL SYSTEMS

Annakulova G.K., Abdullaeva M.G., Igamberdiev K.A.

A dynamic model of a wheeled vehicle, which creates noise-like auto-oscillations and chaotic behavior is considered. Phase portraits and temporal realization of oscillations are constructed for different values of the parameters. The conditions for the appearance of chaotic solutions are established.

**Keywords:** noise-like auto-oscillations, chaotisation, nonlinearity, dynamic model, differential equations, mapping, wheeled machine, phase portrait.

## DINAMIK TIZIMNING SHOVQINSIMON AVTOTEBRANISHLARI VA XAOTIK HARAKATI

Annafulova G.Q., Abdullaeva M.G', Igamberdiev K.A.

G'ildirakli mashinaning shovqinsimon avtotebranishlari va betartib (xaotik) harakati dinamik modeli ko'rilgan. Parametrlarning turli qiymatlarida tebranishlar fazaviy portretlari va vaqt bo'yicha o'zgarishlari qurilgan. Xaotik echim paydo bo'lish shartlari aniqlangan.

**Tayanch iboralar:** shovqinsimon avtotebranishlar, xaotizatsiya, nochiziqlik, dinamik model, differensial tenglamalar, ko'rinish, g'ildirakli mashina, fazaviy portret.

### 1. Введение

Известно, что любая динамическая система представляется в виде конструкции машины или ее деталей, иногда группой машин, которые обладают массой и способны совершать колебательное движение. В зависимости от назначения системы колебательное движение может быть нежелательным, маловажным или необходимым для осуществления задачи.

Возможность регулирования колебательных процессов, или сведения их к минимуму, когда они нежелательны, оказываются актуальной проблемой в машиностроении, поскольку нежелательные колебания в механизме могут нарушать прочность

сочленений деталей, вызвать неисправность работы или поломку машины.

Основной задачей исследования является анализ движения динамической системы и сил, связанных с этим движением, а конечная цель анализа колебаний есть определение их влияния на характеристики и надежность рас-сматриваемых систем.

Изучение особенностей динамических систем заключается в выявлении переходных режимов. Изменение параметров динамической системы приводит к изменению сложного состояния равновесия (через бифуркацию) к предельному циклу (Пуанкаре, Андронов, Хопф) и к тору (Рюэль, Такенс, Колмогоров, Арнольд, Мозер), а затем в детерминированный хаос (Лоренц) [1-3].

Машинные агрегаты представляют собой сложные механические системы с нелинейностями, влияние которых на динамические качества существенно. Для конструкций современных машин и их агрегатов характерен ряд существенных нелинейностей, обусловленных действием сил сухого (вязкого) трения в соединениях несущих частей (ходовых и др.)

При рассмотрении реальной динамической системы необходимо считаться с наличием «случайных возмущений», т.е. случайных отклонений от того динамического процесса, ход которого определяется уравнениями, описывающими данную систему. Эти отклонения неизбежны в реальных системах, тогда возникает вопрос о том, какое влияние могут оказать эти случайные отклонения на характер изучаемых нами динамических процессов.

Для того чтобы учесть влияние случайных возмущений на систему, предполагается, что в правые части уравнений системы кроме «регулярных» функций входят еще «случайные» функции, учитывающие характер случайных процессов в системе [2, 5]. Предположим, что эти процессы в системе происходят таким образом, что в течение некоторого времени случайные отклонения отсутствуют, затем происходит быстрое изменение состояния системы, затем снова случайные отклонения отсутствуют, снова – быстрое изменение состояния системы и т.д. На языке фазового пространства это выглядит следующим образом. Представляющая точка в течение некоторого времени движется по той фазовой траектории, на которой она находилась в начальный момент, затем она скачком переходит на какую-либо другую (близкую) фазовую траекторию, снова движется дальше некоторое время, снова перескакивает и т.д.

В силу наличия случайных скачков движение представляющей точки подчиняется теперь как динамическим, так и статическим законам. В соответствии с этим были поставлены вопросы о вероятности того или иного движения и о вероятностных характеристиках поведения системы [4, 5].

В работе [5] при определенных предположениях о характере скачков определено математическое ожидание времени входа изображающей точки за границы данной области фазовой плоскости. При помощи этой модели может быть вычислено математическое ожидание времени перехода системы из одного состояния в другое.

Типы возможных возмущений:

а) «белый шум» (для ускорений);

б) периодическая последовательность случайных импульсов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим колебания нелинейной одномассовой системы, изображенной на рис. 1. Данная система является динамической моделью колесной машины

при коэффициенте распределения подрессоренных масс, равном единице [5].

Дифференциальное уравнение колебаний системы записывается в форме [5]:

$$m \ddot{x} = F_c x - F_\mu \dot{x} + R \operatorname{sgn} \dot{x} = Py + \theta \dot{y}, \quad (1)$$

где  $x$  - координата подрессоренной массы ( $m$ ), отсчитываемая от положения, в котором энергия деформации упругих элементов равна нулю,  $F_c, F_\mu, R$  - упругая характеристика рессоры, характеристика гидроамортизатора и характеристика сухого трения рессоры, зависящая от скорости;  $P = F_c, \theta = F_\mu$  - коэффициенты кинематического возбуждения; в этом случае процесс  $y(S(t)) = y(s)$  описывает высоты неровностей дороги при движении транспортного средства по закону  $s = S(t)$ .

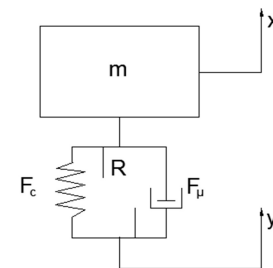


Рис. 1. Схема одномассовой нелинейной колебательной системы

Случайная функция  $y = (s)$  [5] имеет экспоненциально-косинусную корреляционную функцию и может быть выражена через стационарный пространственный «белый шум»  $\xi(s)$ .

Микропрофили  $y(s)$  ( $s$  - путевая координата) некоторых типов дорог описываются корреляционной функцией [5]:

$$K_{yy}(s) = \sigma_{yy}^2 \exp(-\alpha(s)), \quad (2)$$

которой соответствуют спектральная плотность

$$\Phi_{yy}(\omega) = \frac{\sigma_{yy}^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (3)$$

и формирующий фильтр

$$\frac{dy}{ds} + \alpha y = \sigma_y \sqrt{2\alpha} \xi(s), \quad (4)$$

где  $\xi(s)$  - пространственный «белый шум»,

$$\langle \xi(s) \xi(s') \rangle = \delta(s - s'). \quad (5)$$

Переходя в соотношении (4) к переменной

$$t = \frac{s}{v_0},$$

получаем уравнение формирующего фильтра воздействия при движении колесной машины с постоянной скоростью  $v_0$ :

$$\dot{y} + \alpha v_0 y = \sigma_y \sqrt{2\alpha v_0} \eta(t), \quad (6)$$

где  $\eta(t)$  – «белый шум» с единичной интенсивностью определяем для уравнения (1) без учета сил трения рессоры.

Для этого необходимо определить функции  $U(x), T_0(E), S(E)$  – потенциальная функция, собственный период малых колебаний, функция, зависящая от полной энергии (постоянная энергии), соответственно определяемые из формул [1]:

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x), \quad U(x) = \frac{1}{2} \Omega^2 x^2,$$

$$T_0(E) = T_0(0) = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad S(E) = ET_0(E).$$

С учетом соотношений (7) по формуле

$$\eta(t) = \frac{DS(E)}{T_0(E)}$$

имеем

$$\eta(t) = DE = \frac{D}{2} (\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2), \quad (7)$$

где  $D = 1, \quad \Omega^2 = \frac{F_c}{m}$ .

Введем обозначения  $x = x_1, \quad \dot{x} = x_2, \quad y = x_3$ , тогда уравнения движения (1) и (4) с учетом соотношения (7) примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 2 \frac{\alpha}{m} (x_3 - x_2) + \Omega^2 (x_3 - x_1) + \frac{R}{m} \operatorname{sgn} x_1,$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha_1 v_0 x_3 - \sigma_y \sqrt{\frac{\alpha_1 v_0}{2}} (\dot{x}_2^2 + x_1^2),$$

где  $\alpha = F_\mu / 2$ .

На рис. 2 приведены диаграммы фазовых портретов, временная реализация колебаний, а также профиль дороги по реализации  $\eta(t)$  согласно соотношению (7). Согласно рис. 2, при значениях  $\alpha > \Omega$  и большом сухом трении колебания сильно демпфированные, т.е. подвеска передает толчки почти непосредственно на кузов транспортного средства независимо от скорости движения. Это означает, что подвеска «очень жесткая». Согласно рис. 2 а, б, при большом сухом трении амплитуды колебаний намного меньше, чем при малом (рис. 2 в)).

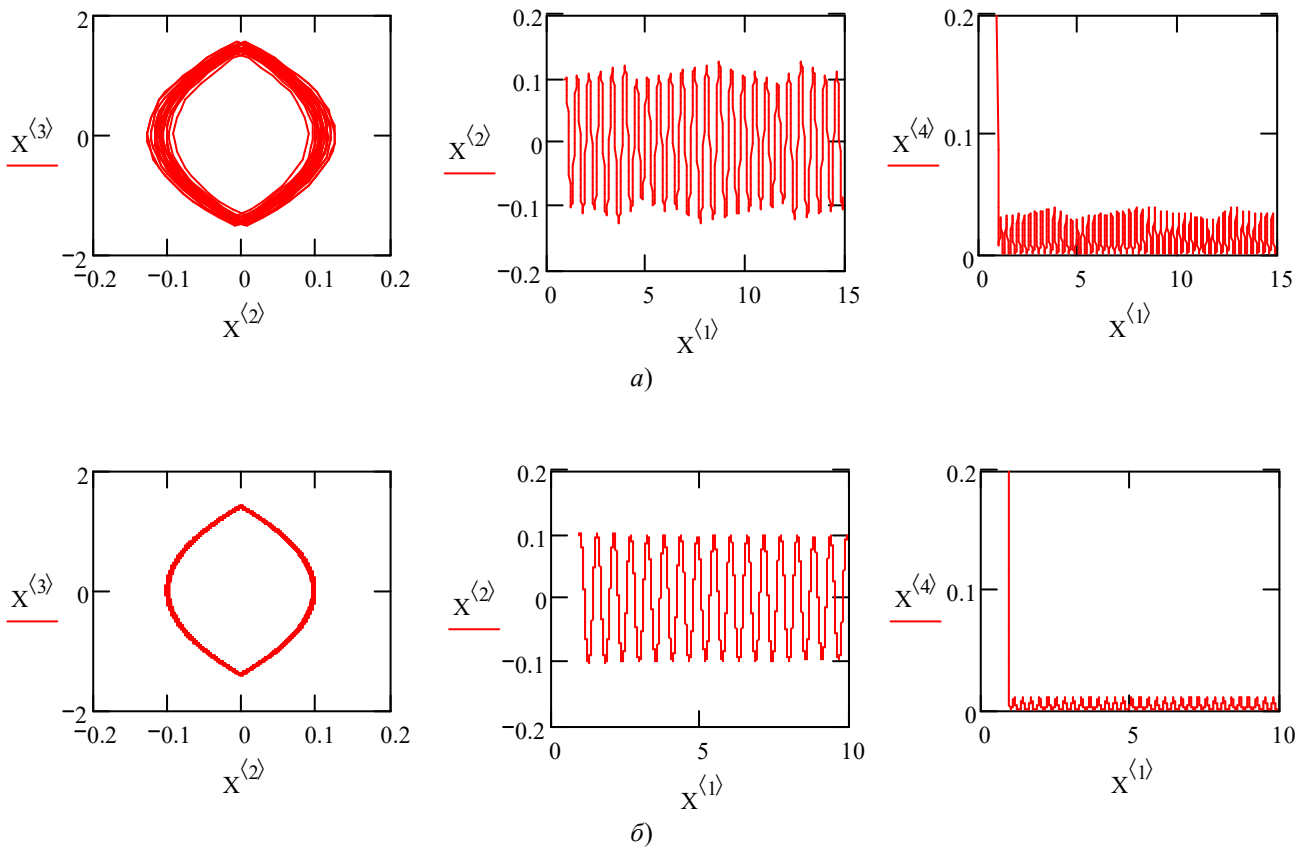
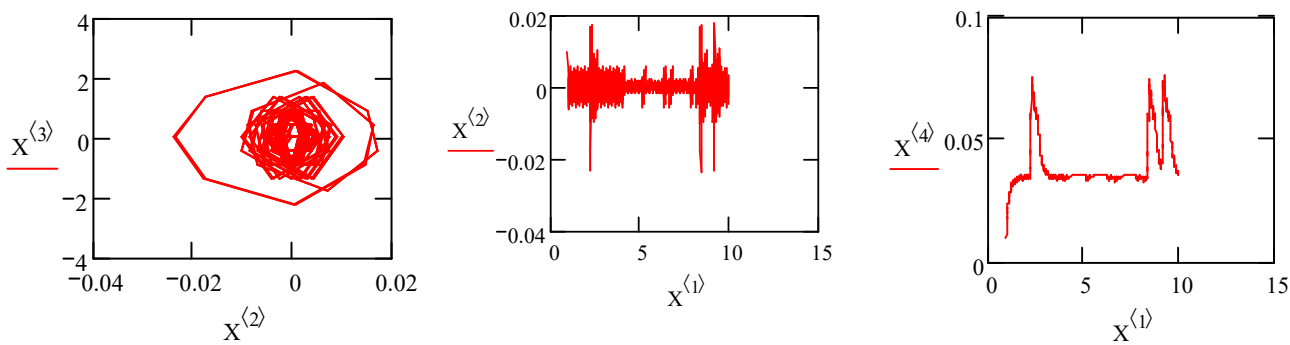


Рис. 2. Диаграммы и временная реализация колебаний при значениях параметров:

а -  $\sigma_y = \sqrt{3.42}$  ;  $\alpha_1 = 0.0045$ ;  $c = 3924$ ;  $m = 390$ ;  $v_0 = 150$ ;  $R = 3900$ ;

б -  $\sigma_y = \sqrt{3.42}$  ;  $\alpha_1 = 0.0045$ ;  $c = 3924$ ;  $m = 390$ ;  $v_0 = 1500$ ;  $R = 3900$ ;

в -  $\sigma_y = \sqrt{3.42}$  ;  $\alpha_1 = 0.0045$ ;  $c = 3924$ ;  $m = 390$ ;  $v_0 = 15$ ;  $R = 58500$



в)

продолжение Рис. 2.

$$\begin{aligned}
 a - \sigma_y &= \sqrt{3.42} ; \alpha_1 = 0.0045; c = 3924; m=390; \nu_0=150; R=3900; \\
 \bar{b} - \sigma_y &= \sqrt{3.42} ; \alpha_1 = 0.0045; c = 3924; m=390; \nu_0=1500; R=3900; \\
 \bar{v} - \sigma_y &= \sqrt{3.42} ; \alpha_1 = 0.0045; c = 3924; m=390; \nu_0=15; R=58500
 \end{aligned}$$

Изучим проявление хаотического поведения во времени динамической системы (1) - (6). Уравнение (1) представляем в виде

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \Omega^2 x = kf(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (8)$$

где  $n$  – целое число;  $T$  – период между толчками из-за неровностей профиля дороги;  $2\alpha$  – постоянная демпфирования,  $k = F_0 / m$ .

Введем обозначения:

$$x = x, y = \dot{x}, z = t.$$

Тогда уравнение (8) можно представить как систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad (9)$$

$$\dot{y} = -2\alpha y + kf(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z - nT), \quad (10)$$

$$\dot{z} = 1. \quad (11)$$

Путем интегрирования уравнения (10) системы (9) – (11) можно свести к двумерному отображению для переменных  $(x_n, y_n)$ :

$$(x_n, y_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [x(nT - \varepsilon), y(nT - \varepsilon)].$$

При  $(n+1)T - \varepsilon > t > nT - \varepsilon$  общее решение уравнения (10) представляется в виде [2]:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_n e^{-2\alpha(t-nT)} + \\
 &+ k \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{nT-\varepsilon}^t e^{2\alpha(t'-nT)} \delta(t' - nT) dt'.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$y_{n+1} = e^{-2\alpha T} [y_n + kf(x_n)]. \quad (12)$$

Интегрируя (9) с учетом (12), получаем

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{2\alpha} [y_n + \Omega^2 x_n + kf(x_n)]. \quad (13)$$

Если учесть, что функция  $f(x)$  описывает профиль неровностей дорог в форме  $f(x) = F_0 \sin \theta$ , где  $\theta = 2\pi x_n$ , то соотношения (12) и (13) принимают форму

$$y_{n+1} = e^{-2\alpha T} [y_n + k \sin 2\pi x_n], \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{2\alpha} \times \\
 &\times [y_n + \Omega^2 x_n + k \sin 2\pi x_n].
 \end{aligned} \quad (15)$$

Система (14) и (15) имеет хаотические решения при выполнении условия

$$1 < \frac{2\alpha}{1 - e^{-2\alpha}} < K$$

при малых  $k$ .

На рис. 3 а - в представлена временная реализация колебаний при различных значениях параметров  $K, \Omega$  и  $k$ , в которых видны хаотические обращения по численному решению уравнений (14) и (15).

Таким образом, уравнения (14) и (15) представляют собой двумерное отображение системы трехмерных дифференциальных уравнений (9) – (11). Полученное отображение имеет структуру отображения, полученного Заславским для ротора с вязким затуханием и периодическим крутящим моментом [6].

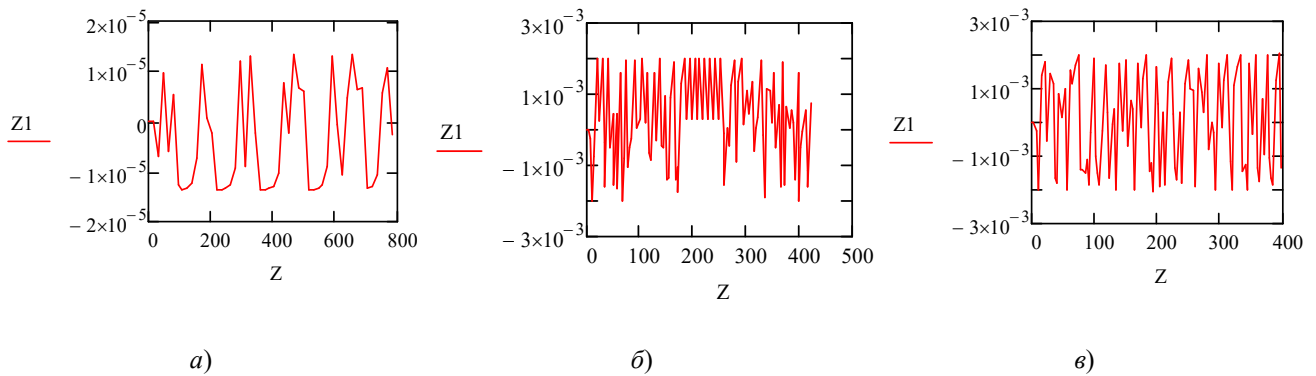


Рис. 3. Временная реализация колебаний при значениях параметров:

a -  $K = 9; \Omega = 25; k = 0.3;$

б -  $K = 9; \Omega = 100; k = 0.3;$

в -  $K = 7; \Omega = 25; k = 0.3$

### 3. Заключение

Изучены процессы возникновения сложных «шумоподобных» автоколебаний колесных машин, составлена математическая модель.

Исследованы колебания подвески транспортного средства при случайных воздействиях типа «белого шума». Получены

диаграммы фазовых портретов и временная реализация колебаний системы.

Исследовано проявление хаотического поведения во времени колебаний подвески транспортного средства. Получено двумерное отображение системы трехмерных дифференциальных уравнений. Полученное отображение имеет структуру отображения, полученного Заславским для ротора с вязким затуханием и периодическим крутящим моментом.

### Литература

- [1] Пуанкаре А. Избранные сочинения. - М.: Наука, Т. 2. - 543 с.
- [2] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Физматгиз, 1959. - 905 с.
- [3] Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. - М.: Наука, 1980. - 359 с.
- [4] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. - М.: Мир, 1968. - 432 с.
- [5] Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. - М.: Наука, 1980. - 368 с.
- [6] Мун Ф. Хаотические колебания. - М.: Мир, 1990. - 305 с.