

УДК 519.711.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АМПЛИТУДЫ ФУНКЦИИ ТОКА ДЛЯ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

Нармурадов Ч. Б., Джураева Н. Т.

normchnor2016@umail.uz

Термезский государственный университет, г. Термиз, ул. Баркамол авлод, 43

Решения проблемы гидродинамической устойчивости имеет большое практическое значение, так как все гидродинамические характеристики движения существенно зависят от того ламинарное это движение или турбулентное. Проблема устойчивости однофазных гидродинамических систем сводится к проблеме на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда. Существующие численные методы для решения проблемы устойчивости можно разделить на несколько групп: 1) конечно-разностные методы; 2) методы пошагового интегрирования; 3) метод исключения и дифференциальной прогонки; 4) спектральный метод; 5) спектрально-сеточный метод. Анализ этих методов показывают, что почти все перечисленные методы, кроме спектрального и спектрально-сеточного метода, предназначены для нахождения только одного собственного значения. Спектральные и спектрально-сеточные методы позволяют определить сразу все собственные значения проблемы устойчивости. Спектрально-сеточный метод эффективен по сравнению с спектрального метода. Спектрально-сеточный метод обладает высокой точностью, экономичен и одновременно определяет все собственные значения и собственные векторы проблемы гидродинамической устойчивости.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, число Рейнольдса, волновое число, собственные значения, собственные функции, однофазное, уравнения Орра-Зоммерфельда, спектрально-сеточный метод, высокая точность, эффективность, экономичность, ламинарное и турбулентное течение

Цитирование: *Нармурадов Ч. Б., Джураева Н. Т.* Математическое моделирование амплитуды функции тока для плоского течения Пуазейля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 4(16). — С. 14–24.

1 Введение

Вязкость отражает свойство жидкости сопротивляться относительному перемещению соседних жидких слоев. Отдельные концентрические слои скользят один по другому, и притом так, что скорость везде имеет осевое направление. Движение такого рода называется ламинарным течением (от латинского слова «lamina»- слой) [1-5]. Вследствие вязкости, частицы жидкости близкие к стенкам, текут медленнее, чем частицы более удаленные от стенок. Течение происходит упорядоченным образом в виде движущихся один относительно другого слоев. (слоистое, или ламинарное течение). Однако наблюдения показывают, что при более высоких числах Рейнольдса течение перестает быть упорядоченным, т.е. становится турбулентным.

Первые систематические исследования обоих, столь различных форм течения были выполнены О. Рейнольдсом [6]. Им же был осуществлен опыт с окрашенной струйкой. До сих пор, пока течение остается ламинарным, введенная в него окрашенная жидкость движется в трубе в виде резко очерченной струйки, но, как только течение становится турбулентным, эта струйка расплывается и почти равномерно

окрашивает всю движущуюся в трубе жидкость. Это показывает, что при турбулентном течении на главное течение жидкости, происходящее в направлении оси трубы, налагаются поперечные движения, т.е. движения, происходящие в направлении, перпендикулярном к оси трубы. Эти поперечные движения и приводит к перемешиванию движущейся жидкости. В результате своих исследований О.Рейнольдс открыл закон подобия, также названные впоследствии его именем. Согласно закону подобия Рейнольдса, переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит всегда при приблизительно, одинаковым числе Рейнольдса $Re = \rho UL/\mu$, где ρ -плотность жидкости или газа, μ -вязкость, U -характерная скорость основного потока, L -характерная длина. Число Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное, называется критическим числом Рейнольдса $Re_{кр}$. Следовательно, те течения, для которых $Re < Re_{кр}$ ламинарны, и те же течения, для которых, $Re > Re_{кр}$ - турбулентны.

Теоретические исследования, имевшие целью объяснить описанное выше, явление перехода ламинарного течения в турбулентное, качались уже в прошлом столетии. В основе всех этих исследований лежит представление, что ламинарное течение подвергается воздействию некоторых малых возмущений. Каждая теория стремилась проследить за развитием во времени возмущений, наложенных на основное течение, причем форма этих возмущений особо определялась в каждом отдельном случае. Решающим вопросом, подлежавшим решению, было установление того, затухают или нарастают возмущения с течением времени. Затухание возмущений со временем должно было означать, что основное течение устойчиво и наоборот, нарастание возмущений со временем должно было означать, что основное течение неустойчиво и поэтому возможен переход в турбулентное течение. Таким путем пытались создать теорию устойчивости ламинарного течения, которая позволяла бы теоретически вычислить критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$ для заданного ламинарного течения. Теперь уже общепризнано, что турбулентность является более естественным состоянием течения жидкости, а ламинарное течение встречается только тогда, когда число Рейнольдса так мало, что отклонение от этого течения имеет тенденцию к затуханию.

2 Постановка задачи

Исследование проблемы гидродинамической устойчивости сводиться к численному моделированию обобщенной проблеме на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда [6]:

$$\frac{1}{ikRe} D^2\psi - \left((U(\eta) - \lambda)D - \frac{d^2U}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad (1)$$

$$\psi_0 < \psi < \psi_1$$

$$\psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\psi_0) = 0, \psi(\eta_1) = \frac{d\psi}{d\eta}(\psi_1) = 0 \quad (2)$$

с однородными краевыми условиями (2), которые означают требования непроницаемости и прилипания. Здесь $D = \frac{d^2}{d\psi^2} - k^2$ - дифференциальный оператор, $U(\psi)$ - профиль скорости основного течения, ψ - координата, направленная поперек основного течения, k - волновое число, Re - число Рейнольдса, $\psi(\eta) = \psi_r + i\psi_i$ - амплитуда функции тока для возмущений, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - собственные значения задачи, где λ_r - фазовая скорость волнового возмущения, λ_i - коэффициент нарастания. Если $\lambda_i > 0$, то течение неустойчиво, если $\lambda_i < 0$, то оно устойчиво. Если же $\lambda_i = 0$, то колебания нейтрально устойчивы.

С точки зрения проблемы гидродинамической устойчивости представляет интерес нахождение собственных значений проблемы (1) - (2) [5-10]. В то же время существует другая самостоятельная задача, исследование поведения собственных функций проблемы (1) - (2). В данной работе исследуются динамика изменения вещественной и мнимой части собственных функций $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$. Авторам неизвестно каких-либо работ по решению указанной задачи.

3 Метод решения

Для численного моделирования проблемы (1) - (2) применяем спектрально-сеточный метод (ССМ) [15-23]. Для этого интервал интегрирования $[\eta_0, \eta_1]$ разобьем на сетку $\eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N = \eta_1$ и таким образом получим N различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N], \\ j = 0, 1, \dots, N - 1$$

Дифференциальное уравнение (1) на каждом из этих элементов принимает вид

$$D^2\psi_j - ikRe[U_j((\eta) - \lambda)D - U_j''(\eta)]\psi = 0, \\ j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

Краевые условия (2) записываются в точках η_0 и η_N :

$$\psi_1(\eta_0) = \frac{d\psi_1}{d\eta}(\eta_0) = 0, \psi_N(\eta_N) = \frac{d\psi_N}{d\eta}(\eta_N) = 0 \quad (4)$$

в точках разбиения потребуем непрерывность решения уравнения (3) и его производных до 3-го порядка. Эти условия имеют вид

$$\psi_j^{(t)}(\psi_j) = \psi_{j+1}^{(t)}(\psi_j), t = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5)$$

где t - указывает порядок производной. Решения ψ_j уравнения (3)-(4) представим в виде ряда по полиномам Чебышева первого ряда. Для этого каждый элемент $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ отображаем на интервале $[-1, +1]$ с помощью следующей замены независимой переменной:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2}y, m_j = \eta_j + \eta_{j-1}, l_j = \eta_j + \eta_{j-1} \quad (6)$$

через l_j обозначена длина j -го элемента. После этого преобразования уравнение (3) принимает вид

$$D_j^2\psi_j - ik_jRe_j[U_j((y) - \lambda)D_j - U_j''(y)]\psi_j = 0, \\ j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

где

$$D_j = \frac{d^2}{dy^2_j} - k_j^2, k_j = \frac{l_j}{2}k, Re_j = \frac{l_j}{2}Re.$$

Из условий (4) - (5) имеем

$$\psi_j(-1) = 0, \frac{d\psi_1}{dy}(-1), l_j^{-t}\psi_j^{(t)}(+1) = l_{j+1}^{-t}\psi_{j+1}^{(t)}(-1), \\ t = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \psi_N(+1) = 0, \frac{d\psi_N}{dy}(+1) = 0. \quad (8)$$

Приближенное решение задачи (7) - (8) на каждом из элементов будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_j(y) &= \sum_{n=0}^{P_j} a_n^{(j)} T_n(y), \\ U_j(y_1^{(j)}) &= \sum_{n=0}^{P_j} b_n^{(j)} T_n(y_1^{(j)}), \\ y_1^{(j)} &= \cos(\pi l/p_j), l = 0, 1, 2, \dots, p_j; j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{9}$$

где $T_n(y)$ полиномы Чебышева первого рода, $y_l^{(j)}$ - их узлы, p_j - количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на j - элементе сетки. Коэффициенты разложения $b_n^{(j)}$ для функции $U_j(y)$ в (9) определяются следующим обратным преобразованием [7-12]:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{P_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_1^{(j)}) T_n(y_1^{(j)}), n = 0, 1, \dots, p_j,$$

$c_0 = c_{p_j} = 2$, при $m \neq 0, p_j, j = 1, 2, \dots, N$.

Для удобства изложения ССМ уравнение (7) запишем в операторном виде, т.е.

$$L_j \psi_j = 0, j = 1, 2, \dots, N, \tag{10}$$

где L_j - дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$L_j = D_j^2 - ik_j Re_j [U_j((y) - \lambda) D_j - U_j''(y)]$$

Подставляя ряды (9) в уравнение (10), потребуем, чтобы левая часть (10) на каждом из элементов сетки была ортогональной к первым $(p_j - 4) - m$ полиномам Чебышева, т.е.

$$(L_j \psi_j, T_n) = 0, n = 0, 1, \dots, p_j - 4, j = 1, 2, \dots, N \tag{11}$$

где $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1 - x^2)^{-1/2} dx$ - скалярное произведение на отрезке $[-1, +1]$

Кроме того, потребуем, чтобы ряд по полиномам Чебышева (9) точно удовлетворял краевым условиям и условиям непрерывности (8). С учетом следующих свойств полиномов Чебышева $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ и $T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2} n^2$ эти условия записываются в виде [22-23].

Таким образом, для определения $\bar{m} = N(p_j + 1)$ неизвестных $a_n^{(j)}$ ($n = 0, 1, \dots, p_j, j = 1, 2, \dots, N$) имеем $\bar{m} = N(p_j + 1)$ уравнений. Этими уравнениями служат: $N(p_j - 3)$ - уравнений ортогональности (11), $4(N - 1)$ - условий непрерывности и 4 граничных условия. В общем случае, когда на разных элементах задано разное количество полиномов Чебышева, получаем $\bar{m} = (p_1 + p_2 + \dots + p_N + N)$ уравнений для определения такого же количества неизвестных. Полученную систему удобно записать в матричном виде:

$$(A - \lambda B)x = 0 \tag{12}$$

Комплексные матрицы A и B имеют блочно-диагональную структуру, а вектор x содержит коэффициенты $a_n^{(j)}$ в разложении (9), т.е.

$$X^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)},)$$

где W - в общем случае невырожденная квадратная матрица. Тогда порядок матриц T и W будет таким: $(\bar{m} - 4N) * (\bar{m} - 4N)$, где \bar{m} - общее количество полиномов в ССМ, т.е.

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^m (p_j + 1).$$

Преобразование Q применяется для обнуления некоторых элементов уравнений, получающихся из краевых условий и условий непрерывности. Для наглядности эти условия записаны в матрицах T и W . Преобразование Q , соответствующее краевым условиям и условиям непрерывности, формируется отдельно от матриц T и W . Преобразование Q в основном ориентировано к приведению уравнений с соответствующими краевыми условиями и условиями непрерывности блочно-диагонального вида. Умножая (15) слева на матрицу $W^(-1)$, получаем

$$(D - \lambda E)Y = 0, D = TW^(-1). \tag{16}$$

Собственные значения системы (16) могут быть найдены стандартными методами. В данной работе они определялись с помощью QR - алгоритма. Образования Q число строк и столбцов комплексных матриц T и W уменьшаются на $4N$, где N - число элементов сетки. При этом высокая точность метода сохраняется.

4 Результаты расчетов

При исследовании проблемы гидродинамической устойчивости ламинарного течения движение разлагается на основное, устойчивость которого подлежит исследованию, и на возмущающее. Линь [1] показал, что в соответствии с теоремой Сквайра [14] вместо трехмерной задачи в случае плоского течения Пуазейля можно рассматривать двухмерную задачу, так как критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$ для двумерных возмущений меньше чем $Re_{кр}$ для трехмерных возмущений.

Пусть основное течение $U(y)$ в (3) является течением Пуазейля в плоском бесконечном канале, т.е. $U(y) = 1 - y^2$. В этом случае характерной длиной L является полуширина канала, а характерной скоростью- средняя скорость U_0 - основного течения. Число Рейнольдса определяется по формуле $Re = \rho U_0 L / \mu$, где ρ - плотность, μ - вязкость газа. Граничные условия (4) для возмущений в потоке Пуазейля имеют вид

$$\psi(\pm 1) = 0, \frac{d\psi}{dy}(\pm 1) = 0. \tag{17}$$

Равенства (17) выражают обычные требования непроницаемости и прилипания. Для численного моделирования (3), (17) применен выше изложенный спектрально-сеточный метод (ССМ).

Расчет спектра уравнения Орра-Зоммерфельда, а также расчет критического числа Рейнольдса для течения Пуазейля с применением спектрального метода был проведен в [8], а с помощью спектрально-сеточного метода проведен в [15,19,21]. В этих работах используя 32 полиномов Чебишева для $k = 1$, $Re = 10^4$ собственное значение для неустойчивой моды найдено с высокой точностью

$$\lambda = 0.23752649 + 0.00373967i,$$

при этом точное знание данной моды есть

$$\lambda = 0.23752649 + 0.00373967i.$$

В работах [15,19,21] показана высокая точность и эффективность спектрально-сеточного метода. В то же время в [24], используя разностную схему шестого порядка точности с узлами, равномерно расположенными относительно растянутой координаты та же неустойчивая мода найдено с точностью

$$\lambda = 0.23752964 + 0.00374248i.$$

с 43 узлами, а также

$$\lambda = 0.23752650 + 0.00373969i.$$

со 100 узлами сетки. На равномерной сетки эта же схема дает

$$\lambda = 0.2370744 + 0.00375620i.$$

с 43 узлами сетки. В работе [9] найдено

$$\lambda = 0.237413 + 0.003681i.$$

используя 50 членов разложения по симметричным функциям.

Результаты полученным спектрально-сеточным методом с точностью 7 знаками получаются при использовании в аппроксимации такого количество полиномов, которое более чем в 2 раза меньше количество узлов сетки в конечно-разностных методах, необходимого для получения такой же точности. Учитывая, что матричные методы поиска собственных значений примененные как в [9], так и в [24], требуют времени пропорционально кубу, а памяти квадрату количества полиномов (функций, точек сетки), спектрально-сеточный метод много превосходит другие методы по эффективности.

Были проведены расчеты собственных значений и собственных функций уравнения Орра-Зоммерфельда для различных чисел Рейнольдса, лежащих вне ($\lambda_i < 0$) на ($\lambda_i = 0$) и внутри ($\lambda_i > 0$) нейтральной кривой ($\lambda_i = 0$). Результаты приведены в таблицах 1; 2, в таблице 2 для сравнения приведены некоторые результаты работы [25].

Таблица 1

Re	K	λ_r	λ_i
10000	1	0.2375265	0.0037397
6000	1.02071	0.2622475	0.0003575
5772.22	1.02056	0.2640017	0.0000000
5772.12	1.02071	0.2640200	-0.0000002
5250	1.02071	0.2683958	-0.0009652
6000	0.848	0.2398535	-0.0050281
6000	0.875	0.2436641	-0.0033966

Таблица 2

Re	K	Работа [25]	
		λ_r	λ_i
6000	1.02071	0.2623	0.0003
5772.12	1.02071	0.26402	0.00000
5250	1.02071	0.2684	-0.0010

Для численного моделирования амплитуды функции тока для возмущений следует вычислить вектор $Q^{(-1)}$ х для системе (13) и таким образом, находятся компоненты собственного вектора

$$X^T = (a_0^{(1)}, \dots, a_{p_N}^{(N)})$$

Затем с помощью этих компонент вычисляются суммы (9) и определяются амплитуда функции тока для возмущений в потоке Пуазейля. Построены графики амплитуды функции тока для возмущений неустойчивой симметричной моды для течения Пуазейля при $Re = 6 \cdot 10^3$ и $k = 1.02071$ на рис.1 и при $Re = 10^4$ и $k = 1$ на рис.2

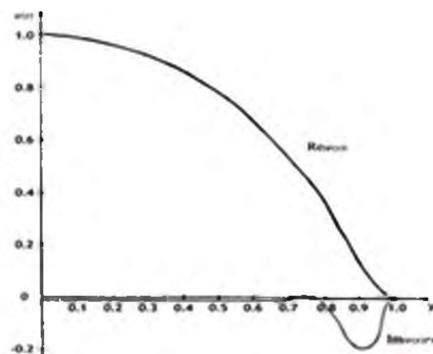


Рис. 1 Изменение амплитуды функции тока при $Re = 6 \cdot 10^6$ и $k = 1.02071$

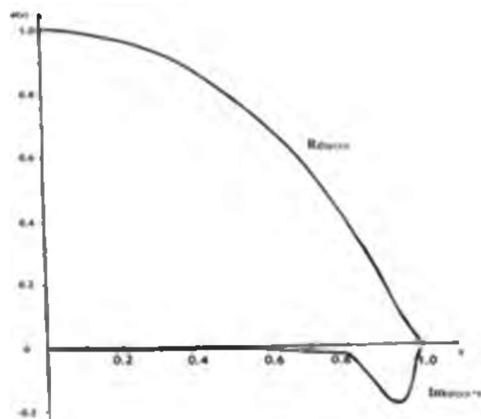


Рис. 2 Изменение амплитуды функции тока при $Re = 10^4$ и $k = 1$

Проведенные расчеты еще раз демонстрируют высокую точность и эффективность спектрально-сеточного метода.

5 Заключение

1. Разработан алгоритм спектрально-сеточного метода для вычисления амплитуды функции тока. [6]
2. Получены собственные значения и собственные функции плоского течения Пуазейля для различных чисел Рейнольдса и волновых чисел. Показано, что спектрально-сеточный метод очень эффективен по сравнению с другими методами решения проблемы гидродинамической устойчивости.
3. Исследованы амплитуды функции тока для возмущений и построены их графики.

Литература

- [1] *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. — М.: Иностранная литература, 1958. 195 с.
- [2] *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. — М.: Мир, 1971. 350 с.
- [3] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. 571 с.
- [4] *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1977. 366 с.
- [5] *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. — М.: Физматлит, 2005. 88 с.
- [6] *Жарилкасинов А., Лисейкин В. Д., Скобелев Б. Ю., Яненко Н. Н.* Применение неравномерной сетки для численного решения задачи Орра-Зоммерфельда // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск, 1983. № 5(14). С. 45–54.
- [7] *Слепцов А. Г.* Проекционно-сеточные методы решения задач Орра-Зоммерфельда // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск, 1983. № 5(14). С. 111–126.
- [8] *Orszag S. A.* Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. fluid mech. — 1971. № 4(50). P. 689–701.
- [9] *Grosch C. E., Salwen H.* The stability of steady and time development plane Poiseuille flow // J. fluid mech. — 1968. № 1(34). P. 177–205.
- [10] *Gottlieb D.* The stability of pseudospectral – Chebishev methods // Math.comput. — 1981. № 153(36). P. 107–118.
- [11] *Fox L., Parker I. B.* Chebishev polynomials in numerical analysis. — London: Oxford university press, 1968. 205 p.
- [12] *Паиковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебишева. — М.: Наука, 1983. 384 с.
- [13] *Скорыходов С. Л.* Численный анализ спектра задачи Орра-Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — Москва, 2007. № 10(47). С. 1672–1691.
- [14] *Squire H. B.* On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. — 1933. № A.142. P. 621–628.
- [15] *Нармурадов Ч. Б., Соловьев А. С.* О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. — Москва, 1986. № 1. С. 46–50.
- [16] *Нармурадов Ч. Б., Соловьев А. С.* Устойчивость двухфазного потока газ - твердые частицы в пограничном слое // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. — Москва, 1987. № 2. С. 60–64.

- [17] *Нармурадов Ч. Б., Подгаев А. Г.* Сходимость проекционно-сеточного галеркинского метода // Моделирование в механике. — Новосибирск, 1989. №4(3). С. 113–130.
- [18] *Нармурадов Ч. Б., Подгаев А. Г.* Сходимость спектрально-сеточного метода // Узбекский математический журнал. — Ташкент, 2003. №2. С. 64–71.
- [19] *Нармурадов Ч. Б.* Об одном эффективном методе решения уравнения Орра - Зоммерфельда // Математическое моделирование. — Москва, 2005. №9(17). С. 35–42.
- [20] *Нармурадов Ч. Б.* Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование. — Москва, 2007. №6(19). С. 53–60.
- [21] *Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б.* Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. — Т.: Fan va texnologiya, 2011. 188 с.
- [22] *Нармурадов Ч. Б., Менглиев Ш. А., Джурсаева Н. Т.* Математические модели проблемы гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — Ташкент, 2015. №2. С. 6–12.
- [23] *Нармурадов Ч. Б., Менглиев Ш. А., Джурсаева Н. Т.* О методах решения проблемы гидродинамической устойчивости // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — Ташкент, 2015. №2. С. 58–65.
- [24] *Gary J., Helgason R.* A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems // J. comp. phys. — 1970. №5. P. 169–187.
- [25] *Reynolds W. C., Potter M. C.* Finite - amplitude instability of parallel shear flows // J. fluid Mech. — 1970. №3(27). P. 465–492.

Поступила в редакцию 18.05.2018

UDC 519.711.3

MATHEMATICAL MODELING OF THE AMPLITUDE OF THE FUNCTION OF CURRENT FOR THE PLANE POISEUILLE FLOW

Narmuradov CH. B., Djuraeva N. T.

normchnor2016@umail.uz

Termiz State University, Barkamol avlod st., Termiz, Uzbekistan

The question of the stability of laminar flows and the transition of laminar flow to turbulent flow forms part of the general problem of the onset of turbulence, and also has a great independent significance. To date, extensive experimental material has been accumulated on the behavior of currents in the zone of transition of laminar flow to turbulent flow and the available information indicate the great complexity of this phenomenon. The numerous theoretical studies undertaken are still far from complete. The solution of the problem of hydrodynamic stability is of great practical importance, since all the hydrodynamic characteristics of motion essentially depend on whether this motion is laminar or turbulent. The application of numerical methods to solving the basic equations of the Navier-Stokes equations for large Reynolds numbers encounters serious difficulties. They are connected, mainly, with the presence of a small parameter with the highest derivative and, as a consequence, the appearance in the solution of regions of strong spatial inhomogeneity. Therefore, the requirements imposed on the approximation properties of numerical methods increase sharply. The problem of the

stability of single-phase hydrodynamic systems reduces to an eigenvalue problem for the Orr-Sommerfeld equation. Existing methods for modeling the stability problem allow us to calculate with some accuracy the individual eigenvalues of the stability problem and obtain a solution in the regions of inhomogeneity. However, in calculating the spectrum of eigenvalues, as well as eigenfunctions, their effectiveness is insufficient. The Orr-Sommerfeld equation contains a small parameter with the highest derivative, so it is difficult to obtain approximate solutions close to the exact ones. Existing numerical methods for solving the stability problem can be divided into several groups: 1) finite-difference methods; 2) methods of step-by-step integration; 3) method of elimination and differential sweep; 4) the spectral method; 5) spectral-grid method. An analysis of these methods shows that almost all of the above methods, except for the spectral and spectral-grid method, are intended to find only one eigenvalue. Spectral and spectral-grid methods make it possible to determine all the eigenvalues of the stability problem at once. The spectral-grid method is effective in comparison with the spectral method. The spectral-grid method has high accuracy, is economical and simultaneously determines all eigenvalues and eigenvectors of the problem of hydrodynamic stability.

Keywords: hydrodynamic stability, Reynolds number, wave number, eigenvalues, eigenfunctions, single-phase, Orr-Sommerfeld equations, spectral-grid method, high accuracy, efficiency, efficiency, laminar and turbulent flow

Citation: Narmuradov CH. B., Djuraeva N. T. 2018. Mathematical modeling of the amplitude of the function of current for the plane Poiseuille flow. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 4(16):14–24.