УДК 510.65

ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ КОРРЕКТОРА ОТ КОДИРОВКИ

[1]***Кабулов А.В.***, [2]***Норматов И.Х.***
[1]anvarkabulov@mail.ru, [2]ibragim_normatov@mail.ru
[1]Национальный университет Узбекистана;
[2]Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий

В статье рассматриваются не всюду определенные функции многозначной логики. Исследуется проблема логического продолжения функций многозначной логики в классе дизъюнктивных нормальных форм. Доказывается теорема об инвариантном продолжении функций многозначной логики в классе дизъюнктивных норм, который не зависит от принятой кодировки. Строится алгоритм построения множества инвариантных точек, независящих от принятой кодировки.

Ключевые слова: кодировка, логика, конъюнкция, дизъюнкция, множества, квазибулевский, инвариант, синтез, эквивалент

Цитирование: *Кабулов А.В., Норматов И.Х.* Принцип независимости продолжения корректора от кодировки // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 1(19). — С. 120–129.

1 Введение

Известно [1–5], что продолжение функции с помощью формул типа д.н.ф. существенно зависит от того, какими символами закодировано значение функции. Так, если в множестве $E_k = \{0,\, 1,\, ...,\, k-1\}$ провести перестановку π , то функцию F_1^1, построенную по новой кодировке, нельзя получить из предыдущей функции F' перестановкой π , примененной к компонентам набора. Однако существует подмножество вершин решетки E_n^k на котором продолжение не зависит от принятой кодировки. На элементах этого подмножества значение $F_1{}'$ получается применением к F' перестановки π . Подмножество $\hat{M}$ обладающее этим свойством, является, вообще говоря, расширением подмножества $\tilde{M}_F$ с которого строилось продолжение корректора. При попадании набора $P_j^{A_1}(S)\,,\ P_j^{A_2}(S)\,, ..., P_j^{A_n}(S)$ в $\hat{M}$ достоверность корректора цепи можно считать достаточно высокой. Оказывается, что множество $\hat{M}$ может быть эффективно построено и исследовано, что и делается в настоящей работе. Продолжение корректора на множестве $E_n^k \backslash \hat{M}$ строится на основе эвристического принципа: оно должно реализоваться минимальной по сложности или по крайней мере достаточно простой формулой. Продолжение корректора на множестве $E_n^k \backslash \hat{M}$ строится на основе эвристического принципа: оно должно реализоваться минимальной по сложности или по крайней мере достаточно простой формулой.

Пусть задано множество $[S]$ объектов, $k-1$- мерный предикат

$$P = P\left(S,\, [S]\,, K_1,\, ...\,, K_{k-1}, \tilde{J}\right),\ k > 2,$$

где $K_i,\ i = \overline{1,\ k-1}$, - выделенные, попарно непересекающиеся подмножества (классы) множества $[S]$, $\tilde{J}$ - информация об этих подмножествах, $P\,(S) = j,$если $S \in K_j,\ \ j = \overline{1,\ k-1},\ \ S \in [S]\,.$

Рассмотрим эвристические алгоритмы [4–8] $A_1,\ A_2, \dots ,\ A_n$, определенные на множестве информаций $\left\{\tilde{J}\left(S\right)\right\}$ объектов из $[S]$ и вычисляющие свойство $P^A\left(S\right)$. Эвристика $A_i,\ i = \overline{1,\ n}$, дается как оператор, переводящий $\tilde{J}\left(S\right)$ в $P^{A_i}\left(S\right),\ P^{A_i}\left(S\right) \in [\Delta, 1, \dots , k-1]\ :\ A_i\left(\tilde{J}\left(S\right)\right) = P^{A_i}\left(S\right)$; здесь Δ означает отказ от вычисления. Для удобства в некоторых случаях вместо $\Delta, 1, \dots , k-1$ будем рассматривать коды $0,\ 1, \dots ,\ k-1$.

Положим $I\left(S\right) = \left(P^{A_1}\left(S\right),\ P^{A_2}\left(S\right), \dots, P^{A_n}\left(S\right)\right)$, и корректор $F\left(x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n\right)$ исправляет значение $P^{A_t}\left(S\right),\ \ t = \overline{1\ n},\ S \in [S]$, вычисленное алгоритмами A_t, т.е. F формирует значение $P\left(S\right)$ как функцию от $I\left(S\right)$. Тогда функционирование корректора описывается функцией F k – значной логики.

Так как число эвристических алгоритмов A_i может меняться, естественно рассматривать не один корректор, описываемый F, а последовательность корректоров, задаваемых соответственно функциями

$$F_1\left(x_1\right),\ F_2\left(x_1,\ x_2\right), \dots , F_m\left(x_1,\ x_2, \dots , x_m\right).$$

В качестве m-го элемента последовательности могут рассматриваться либо произвольная функция k-значной логики ($k \geqslant 3$) от переменных $x_1,\ x_2, \dots , x_m$, либо любая функция, обладающая некоторыми естественными свойствами.

В работе доказывается теорема, обосновывающая применение построенного алгоритма. Алгоритм является практически эффективным. Он построен в виде, удобном для реализации на ЭВМ. Полученный результат позволяет определить коррекцию нестрогих алгоритмов как применение к результатам алгоритмов A_t при вычислении свойств P_j функции k-значной логики из заданной последовательности. Номер функции в последовательности определяется числом корректируемых алгоритмов. Результат корректировки зависит, вообще говоря, от порядка в множестве корректируемых алгоритмов.

2 Постановка задачи

Пусть $M = [I\left(S\right)]$ - множества всех $I\left(S\right)$, где $S \in [S]$. Рассмотрим $F\left(x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n\right) \in P_n^k$, заданную на

$$M \subseteq E_n^k:\ F\left(x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n\right) = \left\{j : \text{если } \tilde{x} = I\left(S\right),\ S \in L_j,\ j = \overline{1,\ n-1}\right\}.$$

Рассмотрим множество функций многозначной логики, зависящих от n переменных, т.е. множество функций, определенных на множестве всех вершин n- мерной k-решетки E_n^k [9–15] и принимающих значения из множества $E_k = \{0,\ 1,\ \dots,\ k-1\}$. При такой интерпретации существует взаимно-однозначное соответствие между функциями многозначной логики, зависящими от n аргументов, и подмножествами $N_f \subseteq E_n^k$. Функция $f\left(x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n\right)$ и подмножество $N_f \subseteq E_n^k$. соответствуют друг другу в случае

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in N_f \\ 0 & \text{если } x \in E_n^k \backslash N_f \end{cases}$$

где

$$\gamma \in E_f \subseteq \{0,\ 1,\ \dots ,\ k-1\}.$$

Можно считать, что множество E_f разбивает функцию f на ряд подфункций $f_{\gamma_1}\left(\tilde{x}\right),\ f_{\gamma_2}\left(\tilde{x}\right), \dots ,\ f_{\gamma_m}\left(\tilde{x}\right)$, а множество N_f - на попарно непересекающиеся подмножества $N_{f_{\gamma_1}},\ N_{f_{\gamma_2}}, \dots ,\ N_{f_{\gamma_m}}$, где $m = |E_f|$,

$$f_{\gamma_i}(\tilde{x}) = \begin{cases} \gamma_i, & \text{если } f(x) = \gamma_i, \\ 0, & \text{если } f(x) \neq \gamma_i, \end{cases}$$

$$N_{f_{\gamma_i}} = \left\{\tilde{\alpha} : \left(\tilde{\alpha} \in E_n^k\right) \wedge \left(f(\tilde{\alpha}) = \gamma_i\right)\right\}, \ \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Легко заметить, что

$$f(\tilde{\alpha}) = \max_{\gamma_i} \left\{f_{\gamma_1}(\tilde{\alpha}), f_{\gamma_2}(\tilde{\alpha}), \ldots, f_{\gamma_m}(\tilde{\alpha})\right\}. \tag{1}$$

Функцию $f_\gamma(\tilde{x})$ принимающую только два значения $(0 \ \ \gamma)$, будем называть квазибулевской, а представление функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде (1) - квазибулевским представлением многозначной логической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Введем функцию

$$J_M(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x \in M \\ \quad 0 & \text{если } x \notin M, \end{cases}$$

где $\mathrm{M} \subseteq E_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

Элементарной конъюнкцией (э.к.) назовем выражение

$$\mathfrak{A} = \min\left[\mathrm{J_{M_1}}(\mathrm{x_1}), \mathrm{J_{M_2}}(\mathrm{x_2}), \ldots, \mathrm{J_{M_n}}(\mathrm{x_n}), \gamma\right],$$

где, $\varnothing \neq \mathrm{M}_j \subseteq E_k, \ \left(j = \overline{1, \ n}\right)$.

Далее для краткости формулы $\max\left[\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m\right]$ будут условно обозначаться как $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i$: если $\mathfrak{A}_i$ есть аналог э.к., то указанная формула будет называться дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.).

Областью истинности э.к. $\mathfrak{A}$ назовем область $N_{\mathfrak{A}}$, в которой $\mathfrak{A}$ принимает значение γ. Легко видеть, что область $N_{\mathfrak{A}} = \prod\limits_{j=1}^{n} M_j$ есть подрешетка (подмножество множества E_n^k) решетки E_n^k. При таком геометрическом рассмотрении э.к. соответствует подрешетка $N_{\mathfrak{A}}$, решетки E_n^k.

Рангом э.к. $\mathfrak{A}$ назовем число

$$r(\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^{n} (k - |\mathrm{M}_j|) = kn - \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{M}_j|.$$

Формулу, $\mathfrak{M} = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{t} \mathfrak{A}_i$ где все $\mathfrak{A}_i, \ \left(i = \overline{1, \ t}\right)$ - э.к., назовем дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.).

Заметим, что каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многозначной логики соответствует непустой класс д.н.ф., реализующих данную функцию. Множество всех интервалов, соответствующих э.к. определенной д.н.ф. из этого класса, определяет покрытие N_f подрешетками решетки E_n^k. Отсюда следует, что подмножества $\mathrm{M} \subseteq E_n^k$ можно задавать при помощи д.н.ф.

Пусть $I = \{N_{\mathfrak{A}}\}$, есть некоторое подмножество подрешеток из E_n^k.

Подрешетку $N_B \in I$ назовем максимальной относительно М если не существует в I подрешетки $N_{\mathfrak{A}}$, такой, что $N_{\mathfrak{A}} \neq N_B$ и $N_{\mathfrak{A}} \supseteq N_B$.

Для представления функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде д.н.ф. мы рассматривали ее квазибулевское представление: $f = f_{\gamma_1} \vee f_{\gamma_2} \vee \ldots \vee f_{\gamma_m}$ причем $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m$.

Заметим, что для одной и той же функции $f(\tilde{x})$ может существовать несколько эквивалентных квазибулевских представлений. В самом деле,

$$f = f_{\gamma_1} \vee f_{\gamma_2} \vee ... \vee f_{\gamma_m} = f^* = f^*_{\gamma_1} \vee f^*_{\gamma_2} \vee ... \vee f^*_{\gamma_m},$$

где

$$N_{f^*_{\gamma_i}} = N_{f_{\gamma_i}} \cup Q_i,\ Q_i \subseteq \bigcup_{j>i} N_{f_{\gamma_j}},\ \left(i = \overline{1,\ m}\right).$$

Мы рассмотрим только одно "максимальное"представление

$$f' = f'_{\gamma_1} \vee f'_{\gamma_2} \vee ... \vee f'_{\gamma_m},$$

где $N_{f'_{\gamma_i}} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} N_{f_{\gamma_j}},\ \left(i = \overline{1,\ m}\right).$

Выделим все максимальные подрешетки $N_{B^i_j},\ \left(i = \overline{1,\ m}\right)$, содержащиеся в $N_{f'_{\gamma_i}}$, имеющие непустое пересечение с $N_{f_{\gamma_i}}$ и такие, что значение B^i_j равно γ_i в $N_{B^i_j},\ \left(i = \overline{1,\ m}\right)$.

Д.н.ф. $\mathfrak{M} = \bigvee\limits_{i=1}^{m}\bigvee\limits_{j=1}^{I_i} B^i_j$ назовем сокращенной дизъюнктивной нормальной формой функции $f(\tilde{x})$.

Покрытие множества N_f максимальными подрешетками назовем неприводимым, если после удаления любой из входящих в него подрешеток оно перестает быть покрытием.

Д.н.ф., реализующая функцию f, называется тупиковой если ей соответствует неприводимое покрытие множества N_f.

Рассмотрим функцию $F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ многозначной логики, заданную на

$$M \subseteq E^k_n:\ F(\tilde{x}) = \gamma_j,$$

если $\tilde{x} \in M_j,\ \left(j = \overline{1,\ m}\right),\ m < k,\ \gamma_j \in E_k,\ M = \bigcup\limits_{i=0}^{m} M_i$ и $M_i \cap M_j = \varnothing$ при $\left(i \neq j,\quad i, j = \overline{0,\ m}\right)$. Причем $\gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_m,\ \ \gamma_0 = 0$.

Таким образом $F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ определена заданием попарно непересекающихся множеств $M_0,\ M_1, ..., M_m$. Функция $F(\tilde{x})$ задано вообще говоря, не на всем множестве E^k_n. Существуют различные доопределенния в классе функций $F(\tilde{x})$, многозначной логики, не эквивалентные между собой.

Нашей задачей является нахождение простейших, в некотором смысле, доопределений.

Для $F(\tilde{x})$ выделим все максимальные интервалы $N_{B^i_j},\ \left(i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{0,\ I_i}\right)$, содержащиеся в $E^k_n \backslash \bigcup\limits_{v=0}^{i-1} M_v$, имеющие непустое пересечение с M_i такие, что значение B^i_j равно γ_i.

Д.н.ф. $\mathfrak{M} = \bigvee\limits_{i=1}^{m}\bigvee\limits_{j=1}^{I_i} B^i_j$ назовем сокращенной нормальной формой для $F(\tilde{x})$. Нетрудно видеть, что д.н.ф. $\mathfrak{M}_{\Sigma\text{т}F}$ однозначно определяется функцией F.

Укажем теперь точки, в которых при изменении значений функции F (переход к F') меняются значения $\mathfrak{M}_{\Sigma\text{т}F}$ (переход к $\mathfrak{M}_{\Sigma\text{т}F'}$).

Алгоритмический метод продолжения функции по принципу инвариантности.

Рассмотрим функцию $F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ многозначной логики, заданную на $M \subseteq E^k_n$:

$$F\left(\tilde{x}\right)=\gamma_j,\ \tilde{x}\in M_j,\ \left(j=\overline{0,\ k-1}\right), \tag{2}$$

где $M=\bigcup\limits_{i=0}^{m}M_i$ и $M_i\cap M_j=\varnothing$ при $i\neq j$.

Обозначим через $\{\pi\}$ совокупность всех перестановок множества $\{0,1,...,k-1\}$: $\pi=\left(i_0,\,i_1,...,\,i_{k-1}\right)$. Функции $F_\pi\left(\tilde{x}\right)=i_j$, если $\tilde{x}\in M_j,\ \left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$, назовем π - перестановкой $F\left(\tilde{x}\right)$.

Будем говорить, что точка $\tilde{\alpha}\in E_n^k\backslash M$ сохраняет кодировку (код) множества $M_j\subseteq M,\ j=\overline{0,\ k-1}$ относительно перестановки π, если $\mathfrak{M}_{\Sigma TF}\left(\tilde{\alpha}\right)=j$ и $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}\left(\tilde{\alpha}\right)=i_j$.

Точку $\tilde{\alpha}\in E_n^k\backslash M$ назовем точкой, сохраняющей кодировку множества M_j если она сохраняет кодировку M_j относительно любой перестановки $\pi\in\{\pi\}$.

Пусть $\mathfrak{M}=\mathop{\mathrm{V}}\limits_{\pi:\pi\in(\pi)}\ \mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}$

Теорема. Точка $\tilde{\alpha}\in E_n^k\backslash\bigcup\limits_{i=0}^{k-1}M_i$ сохраняет код множества M_j в том и только в том случае, когда:

1) в д.н.ф. $\mathfrak{M}$ существует э.к. $\mathfrak{A}$ такая, что

$$N_{\mathfrak{A}}\cap M_j\neq\varnothing,\ \ \tilde{\alpha}\in N_{\mathfrak{A}},\ \ N_{\mathfrak{A}}\cap M_i=\varnothing,$$

где $\left(i=0,\,...,j-1,\,j+1,\,...,\,k-1\right)$;

2) каждый интервал $N_{\mathfrak{A}}$, где э.к. $\mathfrak{A}$ входит в д.н.ф. $\mathfrak{M}$ пересекается с $M_i,\ \ (i\neq j)$ и содержит точку M_j.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка $\tilde{\alpha}$ сохраняет код множества M_j. Тогда для кодировки $\pi=\{i_0,i_1,...,i_{k-1}\}$ д.н.ф. $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}$ существует э.к. $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A}\left(\tilde{\alpha}\right)=k-1$.

По определению, $N_{\mathfrak{A}}\subseteq E_k^n\backslash\bigcup\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1}M_i$, т.е. интервал $N_{\mathfrak{A}}$ не пересекается ни с одним множеством $M_i,\ \ (i\neq j)$. Первое условие доказано.

Рассмотрим теперь перестановку π, в которой $i_j=0$. Предположим, что в д.н.ф. $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}$ существует э.к. $\mathfrak{A}$ такая, что интервал $N_{\mathfrak{A}}$ пересекается с $M_l,\ (l\neq j)$ и содержит в M_j точку $\tilde{\alpha}$. Пусть в этом интервале нет точек множества M_j. Легко заметить, что в этом случае $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}\left(\tilde{\alpha}\right)\neq0$ и перестановка π не сохраняет код множества M_j. Мы доказали второе необходимое условие сохранения точкой $\tilde{\alpha}$ множества M_j.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Предположим, что для каждого интервала $N_{\mathfrak{A}}\left(M_l,\tilde{\alpha}\right),\ \left(l\neq j\right)$, содержащего точку $\tilde{\alpha}$, пересекающегося с множествами M_j и M_i, э.к. $\mathfrak{A}$ - принадлежит Ξ. Причем в произвольной кодировке $\pi=\{i_0,i_1,...,i_{k-1}\}\in\{\pi\}$ э.к. $\mathfrak{A}\left(\tilde{\gamma}\right)=i_l$, при $\tilde{\gamma}\in N_\eta\left(M_l,\tilde{\alpha}\right)$. Обозначим через N_B, интервал такой, что $N_B\cap M_j\neq\varnothing$, $N_B\cap M_l=\varnothing$, $\left(i\neq l\right)$, $\ \tilde{\alpha}\in N_B$ и для произвольной перестановки $\pi=\{i_0,i_1,...,i_{k-1}\}$ э.к. $\mathfrak{A}\left(\tilde{\gamma}\right)=i_j$, при $\tilde{\gamma}\in N_B,\ \ B\in\Xi$.

Если в некоторой кодировке π значение функции F_π - на наборах множества M_I меньше, чем значения F_π-на M_j, т.е. $i_j>i_I$, то точка $\tilde{\alpha}$ будет покрыта интервалами $N_{\mathfrak{A}}\left(M_l,\tilde{\alpha}\right)$, но также будет покрыта интервалом N_B. Так как внешней операцией в д.н.ф. является взятие максимума, то $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}\left(\tilde{\alpha}\right)=i_j$.

Если $i_j>i_l$, то $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}\left(\tilde{\delta}\right)=i_l$ при $\tilde{\delta}\in N_{\mathfrak{A}}\left(M_l,\tilde{\alpha}\right)$.

Но в интервале $N_{\mathfrak{A}}\left(M_l,\tilde{\alpha}\right)$, существует точка $\tilde{\gamma}$, принадлежащая M_j такая, что $\mathfrak{M}_{\Sigma TF_\pi}\left(\tilde{\gamma}\right)=i_j$, и по условию $i_j>i_l$. Следовательно, определяемая нами функция в точке $\tilde{\gamma}$, не будет равняться i_j. Поэтому каждый такой интервал $N_{\mathfrak{A}}\left(M_l, \tilde{\alpha}\right)$ не может участвовать в построении продолжения. Достаточность теоремы доказана.

Алгоритм синтеза множества, инвариантного относительно кодировки и продолжения. Основываясь на результатах теоремы, строим алгоритм синтеза совокупности вершин решетки E_n^k, сохраняющих кодировку множеств M_j, $\left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$ при построении простейших продолжений не всюду определенной функции $F\left(\tilde{x}\right)$.

Пусть M_j - совокупность всех вершин $\tilde{\alpha} \in E_n^k$, сохраняющих кодировку множества M_j, $\left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$, и $\tilde{M} = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \tilde{M}_i$.

Рассмотрим алгоритм синтеза множества M_j. Опишем его следующим образом:

1. Для всех M_j находим $\{N_j\}$ - совокупность интервалов $N_{\mathfrak{A}}$ таких, что $N_{\mathfrak{A}} \cap M_j \neq$ $= \varnothing$ и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$.

2. Для $\{N_j\}$, $\left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$ строим множество $\{N_j\}'$ всех интервалов $N_j \in \{N_j\}$ пересечение которых с M_i, $\{i=0,\ 1,...,j-1,j+1,...,k-1\}$ пусто.

Если $\{N_j\}$ не пусто, то в $\bigcup\limits_{N:N\in\{N_j\}'} N$ выделим точки $\tilde{\alpha}$, не принадлежащие M_j и такие, что не существует интервала $N_{\mathfrak{A}}$, который содержит $\tilde{\alpha}$: $N_{\mathfrak{A}} \cap M_j \neq \varnothing$, содержится в $\bigcup\limits_{N:N\in\{N_j\}'} N$ и э.к. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$. Очевидно, что совокупность всех таких $\tilde{\alpha}$, образует M_j, $\left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$.

3. Объединяя множества $\tilde{M}_0, \tilde{M}_1, ..., \tilde{M}_{k-1}$ получаем множество $\tilde{M}$.

Некоторые приложения метода инвариантного продолжения.

Пусть подмножество $S^n = S_1 * S_2 * ... * S_n$ где S_i - произвольное подмножество действительных чисел, $i=\overline{0,\ n}$. Введем метрику $\rho\left(\alpha,\beta\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i|$. Шаром $S_R^{\tilde{\alpha}}$ с центром $\tilde{\alpha}$, и радиусом r в S^n назовем множество всех $\tilde{\beta} \in S^n$ таких, что $\rho\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\right) \leqslant r$.

Пусть функция $F\left(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\right)$, принимающая k значений $\{0,\ 1,...,k-1\}$, задано на множеству $M \subseteq S^n$: $F\left(\tilde{x}\right)=j$, если $\tilde{x} \in M_j$, $\left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$, $M=\bigcup\limits_{i=0}^{m} M_i$ и $M_i \cap M_j = \varnothing$.

Функцию $F'\left(\tilde{x}\right)$ назовем продолжением $F\left(\tilde{x}\right)$, если $F'\left(\tilde{x}\right)=j$ при $\tilde{x} \in \mathrm{M}_j$, $\mathrm{M}_j \subseteq \mathrm{M'}_j$, $\mathrm{M}_i \cap \mathrm{M}_j = \varnothing$, $\left(j=\overline{0,\ k-1}\right)$, $(i \neq j)$ при $i \neq j$.

Очевидно, что существуют различные продолжения функции $F\left(\tilde{x}\right)$ не эквивалентные между собой. Определим такие точки, где продолжения функции $F\left(\tilde{x}\right)$ не зависит от принятой кодировки.

Введем элементарную функцию (э.ф.)

$$\mathfrak{A}_{\tilde{\alpha},r}^{r}\left(\tilde{x}\right)=\begin{cases}\gamma, & \text{если } \tilde{x} \in S_n^{\tilde{\alpha}}\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$$

Шар $S_n^{\tilde{\alpha}}\left(\mathfrak{A}_{\tilde{\alpha},r}^{\gamma}\right)$ назовем допустимым для $F\left(\tilde{x}\right)$ относительно M_j, если

$$S_n^{\tilde{\alpha}} \cap M_j \neq \varnothing,\ \ S_n^{\tilde{\alpha}} \subseteq S^n \backslash \bigcup_{j=1}^{\gamma-1} M_j.$$

Далее будем рассматривать реализацию функции F в виде дизъюнкции э.ф., областью определения которых являются шары. Пусть M_j -шар $S_{r_i}^{\tilde{\alpha}_i}$ с радиусом r_i и центром в $\tilde{\alpha}_i$, $i=\overline{0,\ n}$. Исследуем точку $\tilde{\alpha}$ на сохранение кодировки $S_r^{\tilde{\alpha}_i}$. Рассмотрим точку $\tilde{\delta}_i$ на отрезки $\left(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}_j\right)$, $j=\overline{1,\ n}$, $j \neq i$ такую, что $\rho\left(\tilde{\alpha},\tilde{\delta}\right)=\rho\left(\tilde{\delta},\tilde{\alpha}_j\right)=r_j$.

Нетрудно заметить что, если $\rho\left(\tilde{\alpha},\tilde{\delta}_j\right) > \rho\left(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}_i\right) = r.$ для любого $j \neq i$, то $\tilde{\alpha}$ сохраняет код множеству M_i.

Описание программы синтеза инвариантного множества. По заданному множеству вершин, разбитому на классы, программа строит инвариантное продолжение для каждого класса. В ее теле функционирует восемь процедур. Схема их взаимодействия приведена на рис.1.

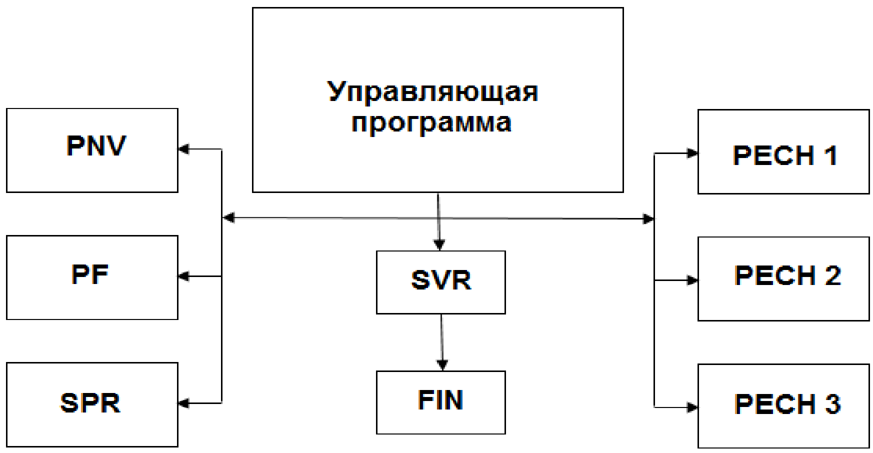

Рис. 1 Схема взаимодействия процедуры

• Процедура SPR расширяет заданную вершину до интервала размерности $(n-1)$.

• Процедура $PF(P)$ служит для нахождения пересечения интервалов; P - признак (если для одной переменной $P = 0$, то интервалы не пересекаются; если для всех переменных $P \neq 0$, то интервалы пересекаются).

• Процедура PNV служит для поиска таких вершин, которые пересекаются с полученным интервалом размерности $(n-1)$.

• Процедура SVR по заданному интервалу производит синтез вершин, входящих в этот интервал.

• Процедура FIN формирует рабочие наборы индексов.

• Процедуры $PECH\,1\ (A1,\ A2,\ PM)$, $PECH\,2\ (A1,\ A2,\ PM)$, и $PECH\,3\ (A1,\ A2,\ PM)$ служит для распечатки одно-, двух- и трехмерного массивов соответственно, где $A1,\ A2$ – граничные значения индексов, PM - печатаемый массив.

Инструкции к программе

Исходными для программы являются следующие величины:

CK - число классов: K - значность функции;

N - число переменных; CB - число вершин со всех классах; $R1,\ R2,\ R3,\ R4,\ R5$ - размерности массивов, используемых для промежуточных и конечных результатов;

$R1 = N^{R2}$; $R2 = max(N, CB-1)$; $R3$ - число расширений в R; $R4$ - число вершин в расширениях из R; $R5$ - число вершин инвариантном продолжении; $(\times N)$ - таблица, каждая строка которой соответствует одной вершине куба E_n^k, i-й элемент строки равен $2^{k-\alpha-1}$, где α - значение i-й переменной;

$CVK\ \ (1\times(+1))$ – вектор, i+1 - й элемент которого равен номеру последней вершины i-го класса;

$Q\,(8\times 8)$– матрица, используемая для проверки пересечения интервалов:

$$Q=\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&2&2&0&0&2&2\\ 0&1&2&3&0&1&2&3\\ 0&0&0&0&4&4&4&4\\ 0&1&0&1&4&5&4&5\\ 0&0&2&2&4&4&6&6\\ 0&1&2&3&4&5&6&7 \end{vmatrix}$$

Конечными результатами являются массивы $CIV\ \ (1\times(CK+1))$ – вектор, i+1-й элемент которого равен номеру последней инвариантной вершины i-го класса, $INP\,(1\times CIV\,(CK))$–таблица, каждая строка которой соответствует инвариантной вершине.

Блок-схема программы приведена на рис. 2.

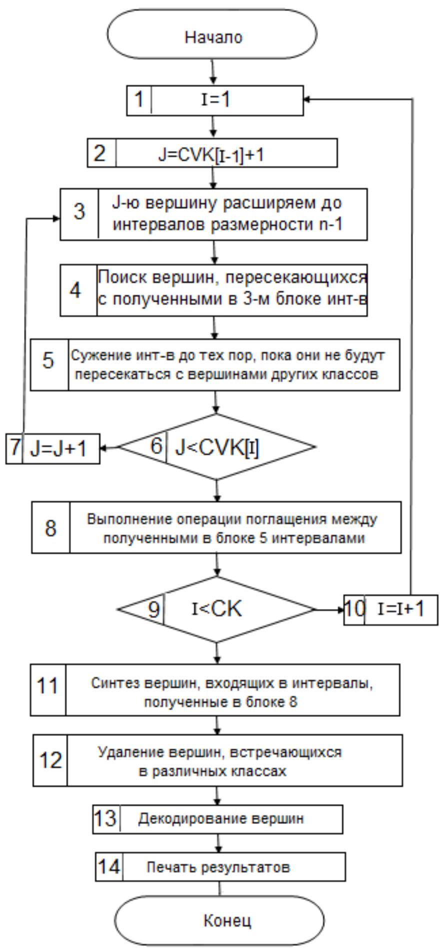

Рис. 2 Блок-схема программы

Контрольный пример. В качестве примера возьмем пять вершин куба E_3^3, разбитых на три класса. Исходными являются следующие данные:

$$K = 3,\ N = 3,\ CK = 3,\ CB = 5,\ R1 = 27,\ R2 = 4,\ R3 = \ 50,\ R4 = 100,\ R5 = 20,$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

матрица Q и

$$CVK = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

Конечными результатами будут

$$CIV = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Время счета контрольного примера – 15 с.

3 Заключение

Таким образом, построение корректора приводит к вяснению нескольких «уровней» коррекции:

1) на множестве M_F корректор определяется из принципа оптимальной корректировки на априори заданном материале;

2) на множестве $\hat{M}_F$ корректор продолжается автоматически по ограничениям, наложенным на корректирующую функцию F;

3) на множестве $\hat{M}_F$ продолжение корректора не зависит от кодировки, а следовательно, и от выбранной д.н.ф.

Литература

[1] *Zhuravlev Yu.I.* Set-theoretic methods in the algebra of logic. — M.:Издательство Problems of Cybernetics,- 1962. - T. 8. - p. 5-44.

[2] *Zhuravlev Yu.I.* On a class of not everywhere defined functions of an algebra of logic. — Vb .: Discrete analysis, vol. 2. -Novosibirsk: MI SB AS USSR, 1964, pp.23-27.

[3] *Zhuravlev Yu.I.* Correct algebras over sets of incorrect (heuristic) algorithms. — Part I, Cybernetics. - 1977. - № 4. - p. 5-17.

[4] *Zhuravlev Yu.I.* Correct algebras over sets of incorrect (heuristic) algorithms. — Part II, Cybernetics. - 1977. - № 6. - p. 21-27.

[5] *Zhuravlev Yu.I.* Correct algebras over sets of incorrect (heuristic) algorithms. — Part III, Cybernetics. - 1978. - № 2. - p. 35-43.

[6] *Zhuravlev Yu.I.* On the algebraic approach to the solution of problems of recognition or classification. — Problems of Cybernetics. - 1978. - T. 33. - p. 5-68.

[7] *Zhuravlev Yu.I., Rudakov K.V.* On algebraic correction of information processing (transformation) procedures. — Problems of applied mathematics and computer science. - 1987. - p. 187-198.

[8] *Zhuravlev Yu.I., Flerov Yu. A.* Discrete analysis. — Dolgoprudny: Part 1, MIPT, 1999 136 p., ISBN 5-7417-0108-6

[9] *Zhuravlev Yu.I.,Ryazanov V.V., Senko O.V.* Recognition. Mathematical methods. Discrete analysis. Part 1. — Software system Practical applications. M.: Fazis, 2006. 147 p. ISBN 5-7036-0108-8.

[10] *Zhuravlev Yu.I., Flerov Yu.A., Vyaly M.N.* Discrete analysis. Basics of higher algebra. — M.: MZ-Press, 2006 (208 p., ISBN 5-94073-097-3) and 2007 (2nd ed., Rev. and ext., 224 p.).

[11] *Nurlibaev A.N.* On normal forms of k - valued logic. — Collected papers on mathematical cybernetics.Part 1. Pub.of the USSR Academy of Sciences Moscow 1976.

[12] *Zhuravlev Yu.I., Flerov Yu.A., Vyalyy M.N.* Discrete analysis. — Formal systems and algorithms. M .: MZ-Press, 2010. 336 p. ISBN 978-5-86567-092-1.

[13] *Kabulov V.K., Kabulov A.V., Normatov I.H.* Logic algorithms in the theory of control systems. — Monograph: Germany, "Lambert 2018, Pag. 191.

[14] *Kabulov V.K., Kabulov A.V., Normatov I.H* Algorithmization in the theory of control systems. — Monograph: Tashkent-2017, Ed. “Navruz” p. 176.

[15] *Yablonsky S.V.* Functional constructions in k - valued logic. — Dolgoprudny: MIPT, 1999 136 p., ISBN 5-7417-0108-6

Поступила в редакцию 01.12.2018

UDC 510.65

THE PRINCIPLE OF INDEPENDENCE OF THE CONTINUATION OF THE CORRECTOR FROM ENCODING

[1]***Kabulov A.V.***, [2]***Normatov I.H.***
[1]anvarkabulov@mail.ru, [2]ibragim_normatov@mail.ru
[1]National University of Uzbekistan;
[2]Scientific and innovation center of information and communication technologies

The article deals with not everywhere defined functions of multi-valued logic. The problem of the logical continuation of multivalued logic functions in the class of disjunctive normal forms is investigated. A theorem on the invariant continuation of multivalued logic functions in a class of disjunctive norms is proved, which does not depend on the adopted coding. An algorithm for constructing a set of invariant points independent of the adopted encoding is constructed.

Keywords: encoding, logic, conjunction, disjunction, set, quasibuli, invariant, synthesis, equivalent

Citation: Kabulov A.V., Normatov I.H. 2019. The principle of independence of the continuation of the corrector from encoding. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(19): 120–129.