

УДК 622.234

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДАМИ ПОКОМПОНЕНТНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ И ПОТОКОВОЙ ПРОГОНКИ

Пирназарова Т.Е.

к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий

Рассматривается алгоритм численного решения трехмерной задачи фильтрации сжимаемых жидкостей методом двухциклического покомпонентного расщепления с применением метода потоковой прогонки. Для решения задачи с произвольной областью применяется метод фиктивных областей. Приводятся результаты решения тестового примера для проверки достоверности разработанного алгоритма, а также по модельной задаче фильтрации со сложной областью решения в виде графиков.

**Ключевые слова:** задача, давление, скважина, дебит, модель, уравнения, таблица, математическая модель, расщепления, вычислительный эксперимент, прогонка, алгоритм, результат.

## NUMERICAL SOLUTION OF THE THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF GAS FILTRATION IN COMPLEX DOMAINS BY COMPONENT SPLITTING AND FLUX SWEEPING

Pirnazarova T.E.

The paper presents the algorithm for the numerical solution of three-dimensional problem of filtration of compressible liquids by two cyclical components splitting with the use of streaming sweep method. For solutions the problem with an arbitrary domain applicable the method of fictitious areas. The results of solving a test case for the validation of the developed algorithm, as well as a model problem filtering of complex area of solutions in the form of graphs.

**Keywords:** task, pressure, chink, debit, model, equation, table, mathematical model, splitting, computational experiment, sweep, algorithm, result.

## МУРАККАБ СОҲАДАГИ УЧ ЎЛЧОВЛИ ГАЗ ФИЛЬТРАЦИЯ МАСАЛАСИНИ КОМПОНЕНТЛИ ЎЛЧОВЛАРГА АЖРАТИШ ВА ПОТОКЛИ ХАЙДАШ УСУЛИ ОРҚАЛИ СОНЛИ ЕЧИШ

Пирназарова Т.Е.

Маколада уч улчовли сикилувчан фильтрация масаласини икки циклдан иборат компонентларга ажратиш усули ердамида сонли ечиш алгоритми потокли хайдаш усулини куллаш билан биргаликда қаралган. Масалани ихтиерий куринишдаги сохада ечиш учун фиктив соха усули кулланилган. Тест мисоли куринишдаги фильтрация масаласи ечилиб, алгоритмнинг кулланилиши текширилган, ҳамда модель куринишдаги ихтиерий сохада берилган масалани ечиш натижалари келтирилган.

**Таянч иборалар:** масала, босим, кудук, дебит, модель, тенглама, жадвал, математик модель, ўлчовларга ажратиш, ҳисоблаш тажрибаси, хайдаш, алгоритм, натижа.

### 1. Введение

Современные ЭВМ дали в руки исследователей эффективное средство для математического моделирования сложных задач науки и техники. В процессе познания и в стремлении создать детальную картину исследуемых процессов мы приходим к необходимости строить все более сложные математические модели, которые в свою очередь требуют универсального тонкого математического аппарата. Именно поэтому количественные методы исследования в настоящее время проникают практически во все сферы

человеческой деятельности. Реализация математических моделей осуществляется с помощью методов вычислительной математики, которая, как правило, связана с методами сведения задач к системам алгебраических уравнений и их последующему решению. Накопленный опыт решения одномерных задач на основе методов факторизации разностного оператора подготовил основу для формирования алгоритмов решения более сложных задач математической физики.

В настоящее время хорошо изучено решение двумерных задач одним из методов переменных направлений и локально-одномерных, а также различными вариантами метода расщепления,

которое приводится к решению одномерных задач. Их сходимости и применимости рассмотрены и изучены в работах Ж. Дугласа, Р. Рихтмайера, Н.Н. Яненко, А.А. Самарского, Г.И. Марчука и др. [1-5].

## 2. Постановка задачи

Как известно, когда требуется решить сложную задачу математической физики, оказывается возможным свести ее к последовательному решению задач более простых. Это можно осуществить, когда исходный положительно полуопределенный оператор задачи представлен в виде суммы простейших полуопределенных операторов. Этот метод решения называется расщеплением. К таким методам относятся методы стабилизации, предиктор-корректор, покомпонент-ное расщепление. В данной работе рассмотрим метод покомпонентного расщепления применительно к решению задачи фильтрации сжимаемых жидкостей.

Пусть дано эволюционное уравнение вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = f \quad \text{в} \quad \Omega \times \Omega_t, \quad \Omega_t = (0, T), \quad (1)$$

$$\phi = \phi^0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где оператор  $A(t) \geq 0$  представлен в виде  $A = A_1 + A_2 + A_3$ :

$$A = -\Delta;$$

здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

оператор Лапласа;

$$\Omega = \{(x, y, z), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1\}.$$

Будем предполагать, что на границе области определения решение рассматриваемой задачи удовлетворяет первым или вторым граничным условиям.

## 3. Метод решения

Предположим, что решение задачи (1) обладает необходимой гладкостью, она уже редуцирована к разностному виду, т.е. в результате проведенной редукции и с учетом требуемой аппроксимации задача с непрерывным аргументом приведена к задаче линейной алгебры. Далее необходимо решить систему алгебраических уравнений и, следовательно, операторы являются матрицами.

### 3.1. Двумерное представление метода

Пусть  $A_1(t) \geq 0, \quad A_2(t) \geq 0$ . Рассмотрим аппроксимации этих матриц на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$  в форме

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j);$$

$\Lambda_\alpha^j$  - разностный оператор.

Будем искать решение задачи (1) с помощью двухциклического полного расщепления, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j-\frac{1}{2}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j-1}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) (\phi^j - \tau f^j) &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j-\frac{1}{2}}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j+\frac{1}{2}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) (\phi^j + \tau f^j), \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f^j = f(t_j)$ ,  $E$  - единичный оператор.

Решая эти уравнения относительно  $\phi^{j+1}$ , получаем

$$\phi^{j+1} = T^j \phi^{j-1} + 2\tau T_1^j T_2^j f^j,$$

где

$$T^j = T_1^j T_2^j T_2^j T_1^j,$$

$$T_\alpha^j = (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j)^{-1} (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j),$$

$T_\alpha^j$  - оператор шага.

С помощью разложения по степеням малого параметра  $\tau$  приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \phi^{j+1} &= \left[ E - 2\tau \Lambda^j + \frac{(2\tau)^2}{2} (\Lambda^j)^2 \right] \phi^{j-1} + \\ &+ 2\tau (E - \tau \Lambda^j) f^j + O(\tau^3), \end{aligned}$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{j+1} - \phi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j (E - \tau \Lambda^j) \phi^{j-1} &= \\ = (E - \tau \Lambda^j) f^j + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Разложив решение в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_{j-1}$  с точностью до  $\tau^2$ , будем иметь

$$\phi^j = \phi^{j-1} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{j-1} \tau + O(\tau^2). \quad (4)$$

Для производного  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  запишем соотношение

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{j-1} = -\Lambda^j \phi^{j-1} + f^j + O(\tau). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем

$$\phi^j = (E - \tau \Lambda^j) \phi^{j-1} + \tau f^j + O(\tau^2).$$

Отсюда

$$(E - \tau \Lambda^j) \phi^{j-1} = \phi^j - \tau f^j + O(\tau^2). \quad (6)$$

Подставляем найденное соотношение (6) в (3) и в результате имеем

$$\frac{\phi^{j+1} - \phi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j \phi^j = f^j + O(\tau^2). \quad (7)$$

Известно, что уравнение (7) аппроксимирует исходное уравнение (1) на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$

со вторым порядком точности по  $\tau$ . Таким образом, нами найдена разностная аппроксимация неоднородного эволюционного уравнения второго порядка с помощью двухциклического метода расщепления.

Систему уравнений (2) можно записать также в следующей эквивалентной форме, которая предпочтительней, чем в форме (2):

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j-\frac{2}{3}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j-1}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j-\frac{1}{2}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j-\frac{2}{3}}, \\ \phi^{j+\frac{1}{3}} &= \phi^{j-\frac{1}{3}} + 2\tau f^j, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j+\frac{2}{3}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j-\frac{1}{3}}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j+\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Итак, если  $A_1 \geq 0$ ,  $A_2 \geq 0$ , то при достаточной гладкости решения  $\phi(t)$  и элементов матрицы  $A_1, A_2$  система разностных уравнений (2) и, соответственно, (8) абсолютно устойчива на интервале  $0 \leq t \leq T$  и аппроксимирует исходное уравнение со вторым порядком точности по  $\tau$ .

### 3.2. Трехмерное представление метода

Теперь рассмотрим случай, когда

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = -\Delta = -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}).$$

В этом случае тривиальное распространение метода расщепления в общем виде невозможно. Вместо (1) на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  положим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} + A_\alpha \phi_\alpha &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + A_3 \phi_3 &= f + \frac{\tau}{2} A_3 f \end{aligned}$$

при условии

$$\phi_1(t_{j-1}) = \phi(t_{j-1}), \quad \phi_{\alpha+1}(t_{j-1}) = \phi_\alpha(t_j), \quad \alpha = 1, 2,$$

а на интервале  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_4}{\partial t} + A_3 \phi_4 &= f - \frac{\tau}{2} A_3 f, \\ \frac{\partial \phi_{3+\alpha}}{\partial t} + A_{3-\alpha+1} \phi_{3+\alpha} &= 0, \quad \alpha = 2, 3 \end{aligned}$$

при условии

$$\phi_{\alpha+1}(t_j) = \phi_\alpha(t_{j+1}), \quad \alpha = 3, 4, 5.$$

Схема двухциклического многокомпонентного расщепления в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j-\frac{2}{3}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j-1}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j-\frac{1}{3}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j-\frac{2}{3}}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^j) (\phi^j - \tau f^j) &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^j) \phi^{j-\frac{1}{3}}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^j) \phi^{j+\frac{1}{3}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^j) (\phi^j + \tau f^j), \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j+\frac{2}{3}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j) \phi^{j+\frac{1}{3}}, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j) \phi^{j+\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{9}$$

(9) также можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j) \phi^{j-\frac{4-\alpha}{4}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j) \phi^{j-\frac{3-\alpha}{4}}, \\ \alpha &= 1, 2, 3, \\ \phi^{j+\frac{1}{4}} &= \phi^{j-\frac{1}{4}} + 2\tau f^j, \\ (E + \frac{\tau}{2} \Lambda_{5-\alpha}^j) \phi^{j+\frac{\alpha}{4}} &= (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{5-\alpha}^j) \phi^{j+\frac{\alpha-1}{4}}, \\ \alpha &= 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j)$ . Полученная схема в предположении достаточной гладкости решения задачи (1) и элементов матриц  $\{A_\alpha(t)\}$  абсолютно устойчива и аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком точности по  $\tau$ .

Система одномерных уравнений решается методом потоковой прогонки, алгоритм которой приводится в [6].

### 4. Вычислительный эксперимент

Приводим вычислительный эксперимент по применимости составленного алгоритма. Рассмотрим тестовый пример. Исходные данные на призме ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ) - числа узлов (60; 60; 10;) по осям (OX, OY, OZ) соответственно. Имеется пять источников с координатами (0.48, 0.48, 0.5; 0.24, 0.24, 0.5; 0.24, 0.72, 0.5; 0.72, 0.72, 0.5; 0.72, 0.24, 0.5) и одинаковыми значениями, равными 0.115, шаг по времени  $\tau = 0.000096$ .

Из-за симметричности полученных результатов приводим одну четверть изменения поля давления в табл. 1 и изолинии поля давления на шаге по оси OZ, равной  $hz = 0,5$  при  $\kappa = 5$  (рис.1). На рис.2 приводится трехмерное представление давления на отрезке по оси OZ.

Таблиця 1

0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,95	0,94
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,95	0,94	0,91
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,95	0,94
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,95
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,96	0,96	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,95	0,94	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,94	0,91	0,94	0,95	0,96	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,95	0,94	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98

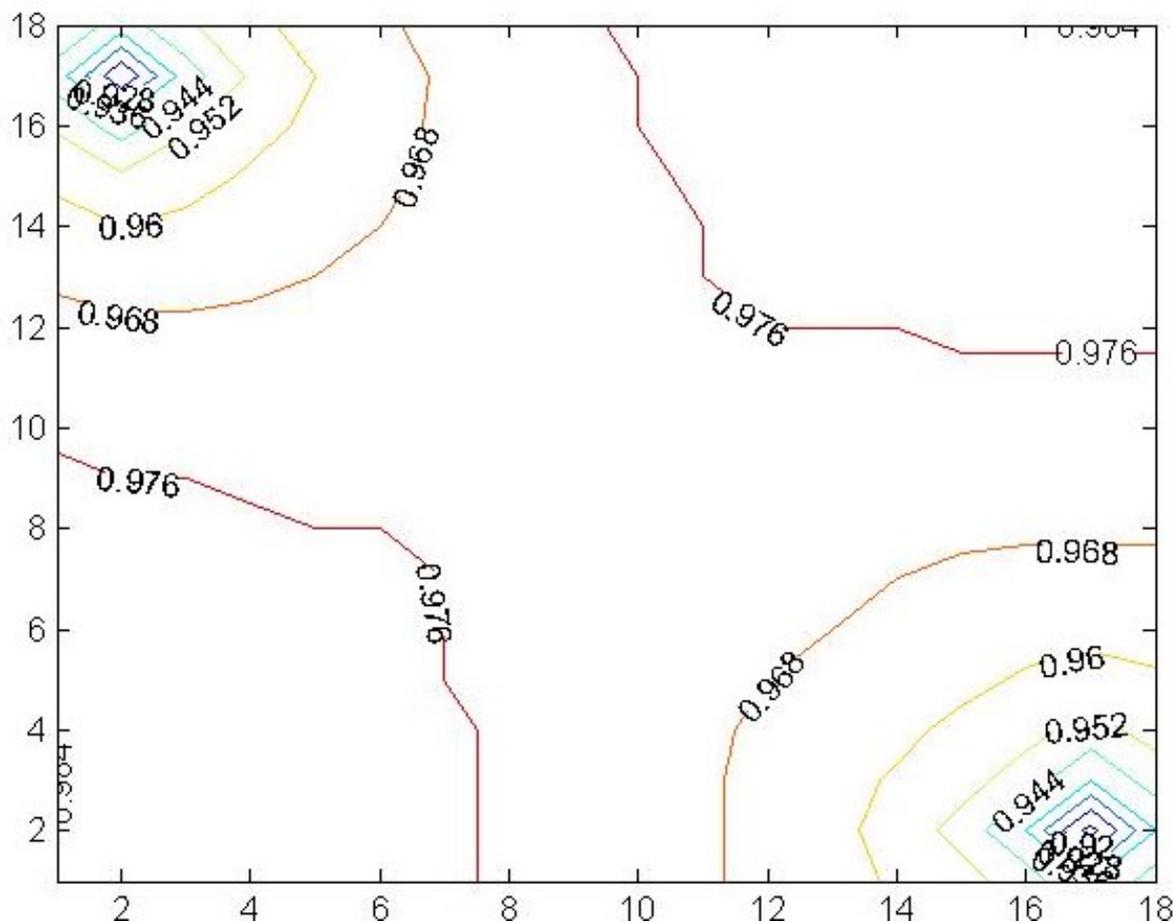


Рис. 1. Изолиния изменения поля давления при  $\kappa = 5$  и  $z = 0.5$  на отрезке оси OZ

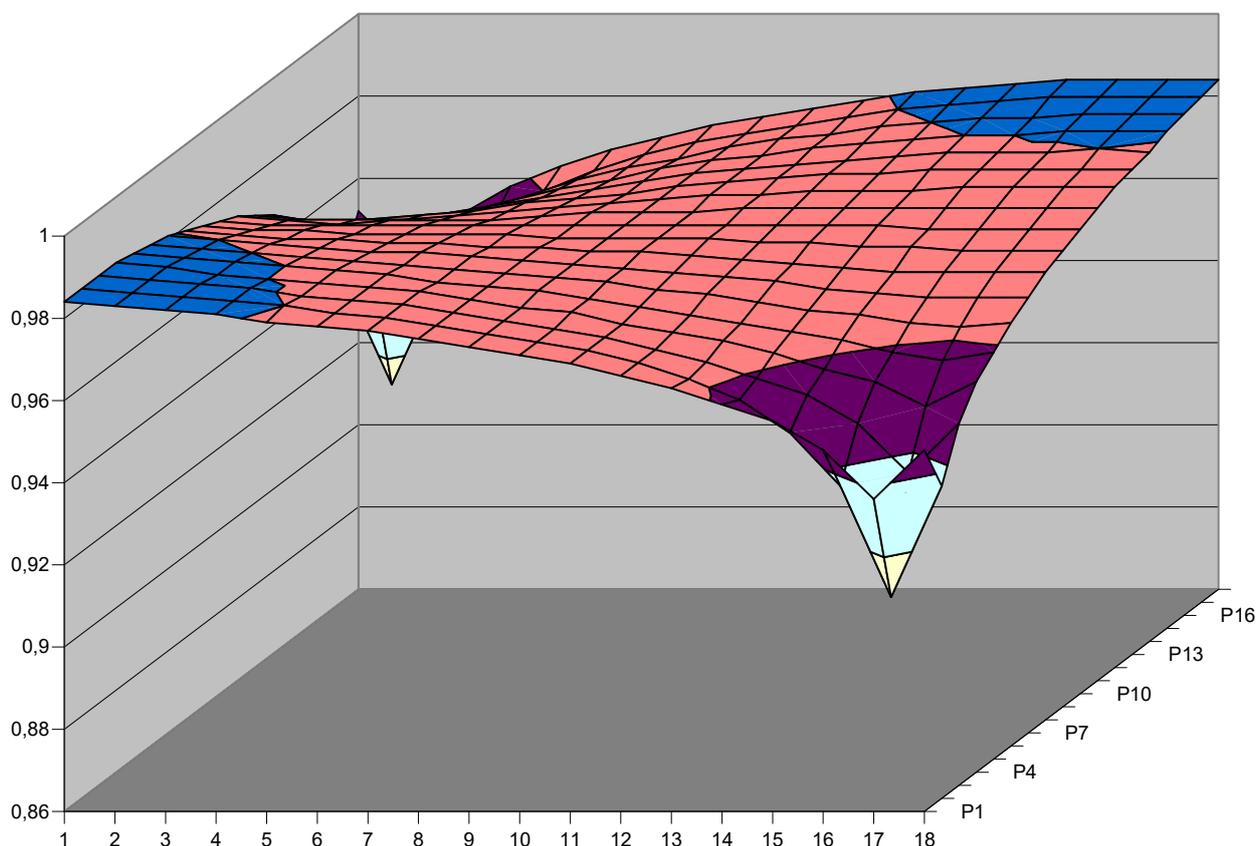


Рис. 2. Трехмерное представление давления на отрезке по оси OZ

Теперь рассмотрим модельную трехмерную задачу фильтрации газа с произвольной областью, структурная карта которой приведена на рис. 3. Трудности построения программного продукта в таких случаях во многом зависят от геометрии рассматриваемой области. Поэтому целесообразно строить программы не для конкретных областей, а для более или менее широкого класса областей. Одним из возможных путей решения этой проблемы является замена рассматриваемой задачи на задачу, в определенном смысле близкую к ней, но заданную в более простой области, например, призме. Такой подход получил название метода фиктивных областей [7]. Применяя метод фиктивных областей и переходя к безразмерным переменным, исходную задачу рассмотрим на призме ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ). Задав на границах призмы заданные краевые условия, можно ожидать, что решение полученной задачи будет мало отличаться от нуля в добавленной области и будет

почти совпадать с решением задачи в исходной области. Покрываем область равномерной сеткой

$$\omega_{x,y,z} = \{(x_i = ih_x, h_x = 1/N_x, y_j = jh_y,$$

$$h_y = 1/N_y, z_k = kh_z, h_z = 1/N_z),$$

$$i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z}\},$$

где  $(N_x, N_y, N_z)$  - число узлов по осям соответственно, и аппроксимируем задачу на сеточные уравнения. Имеется 76 источников с одинаковыми значениями  $q = 329500$  м.куб./сут при начальном давлении 300 МПа. Длина и ширина области равны 45 км и 26 км соответственно. Высота области 335 м. Число узлов по осям равно (46; 27; 6;) соответственно, интервал перфорации находится на отрезке, равном  $OZ = 3 \cdot h_z$ . Номера и координаты скважин приведены в табл. 2

Таблица 2

n/n	nsk	nx	ny	nz	n/n	nsk	nx	ny	nz	n/n	nsk	nx	ny	nz	n/n	nsk	nx	ny	nz
1	4	30	12	3	20	289	42	20	3	39	67	25	14	3	58	206	9	10	3
2	110	33	16	3	21	77	11	15	3	40	265	26	15	3	59	59	15	4	3
3	274	34	16	3	22	85	13	17	3	41	58	26	16	3	60	60	17	3	3
4	79	33	19	3	23	70	13	18	3	42	69	27	14	3	61	12	17	3	3
5	278	35	17	3	24	112	12	19	3	43	76	24	10	3	62	73	20	7	3
6	10	40	14	3	25	87	9	18	3	44	91	23	7	3	63	90	20	9	3

$n/n$	$nsk$	$nx$	$ny$	$nz$	$n/n$	$nsk$	$nx$	$ny$	$nz$	$n/n$	$nsk$	$nx$	$ny$	$nz$	$n/n$	$nsk$	$nx$	$ny$	$nz$
7	3	36	19	3	26	128	10	19	3	45	258	25	9	3	64	161	21	8	3
8	78	36	19	3	27	18	5	19	3	46	93	29	12	3	65	68	20	4	3
9	280	42	17	3	28	113	8	20	3	47	9	25	7	3	66	71	22	4	3
10	56	41	18	3	29	86	9	20	3	48	92	26	8	3	67	82	16	11	3
11	281	36	22	3	30	72	19	15	3	49	900	4	9	3	68	6	16	11	3
12	285	39	20	3	31	2	20	16	3	50	104	5	9	3	69	89	19	13	3
13	80	34	22	3	32	88	19	18	3	51	53	5	11	3	70	50	16	15	3
14	7	28	22	3	33	5	15	19	3	52	114	5	13	3	71	109	13	13	3
15	236	36	23	3	34	65	15	17	3	53	52	6	15	3	72	64	14	12	3
16	282	37	24	3	35	251	20	15	3	54	54	7	12	3	73	51	12	14	3
17	94	39	23	3	36	252	22	16	3	55	75	8	9	3	74	84	14	15	3
18	95	41	21	3	37	66	19	13	3	56	63	9	12	3	75	11	10	15	3
19	8	43	21	3	38	255	22	14	3	57	117	8	9	3	76	13	19	18	3

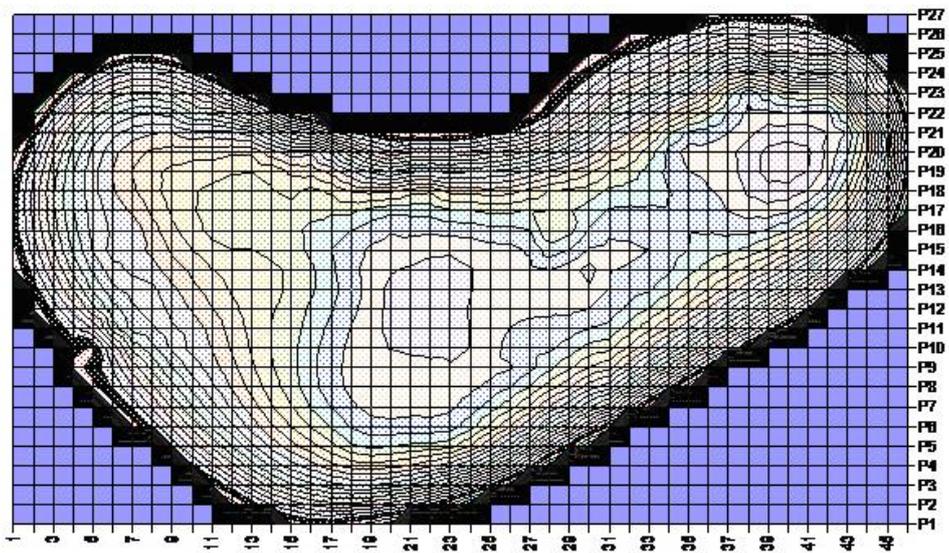


Рис. 3. Структурная карта рассматриваемой области

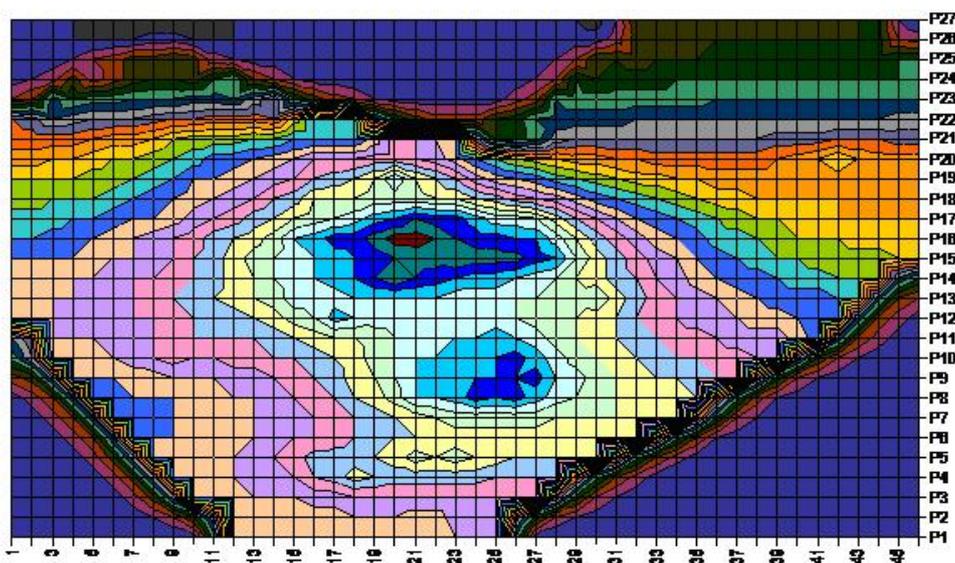


Рис. 4. Изобары при  $T = 360$  сут. на отрезке по оси  $OZ$

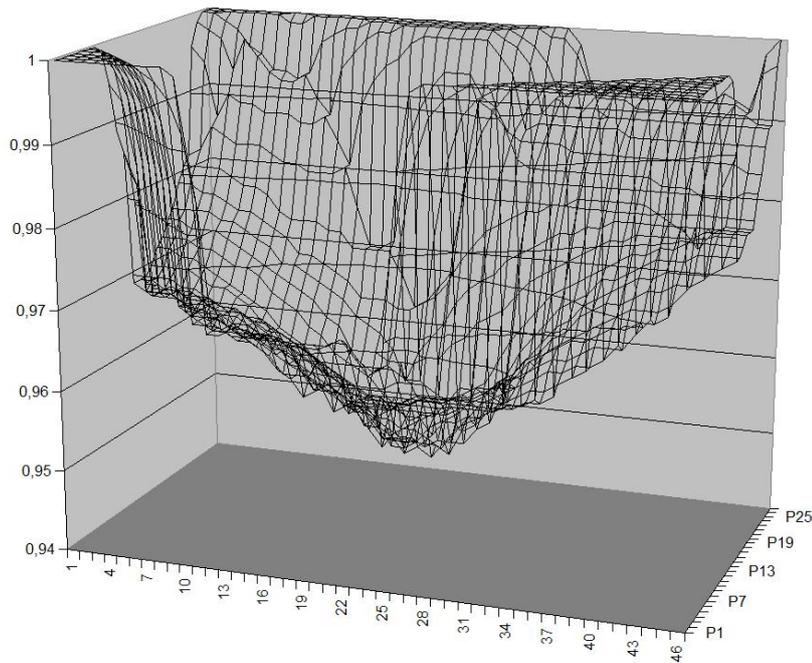


Рис. 5. Трехмерное представление поля давления на отрезке по оси OZ

Карта изобар при  $T = 360$  сут. и трехмерное представление значения поля давления на отрезке по оси OZ, расположенном на интервале перфорации скважин, представлены соответственно на рис. 4 и 5.

## 5. Заключение

Таким образом, разработанный алгоритм и программный продукт можно использовать для решения трехмерных задач фильтрации сжимаемых жидкостей.

## Литература

- [1] Douglas J. Alternating direction methods for three space variables // Numer. Math. - 1962.
- [2] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, 1972.
- [3] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967.
- [4] Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
- [5] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
- [6] Пирназарова Т.Е. Исследование двухфазной фильтрации сжимаемых жидкостей в одно- и многослойных пористых средах: Дис...канд.физ.-мат.наук. – Ташкент, 1988. – 122 с.
- [7] Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: Наука, 1988.